УДК 517.9

Л. П. Нижник (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. Г. Тарасов (Житомир. пед. ин-т)

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

We construct transformation operators, which enable us to study scattering problem and investigate properties of a scattering operator for multidimensional system of first order partial differential equations.

Побудовано оператори перетворення, що дали можливість вивчити задачу розсіяння та дослідити властивості оператора розсіяння для багатовимірної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_i(x)+\sum_{j\neq i}u_{ij}(x)\,\psi_j(x)\;=\;0,\quad i=1,\,\dots,\,n, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2,\,\dots\,,x_n)$, вектор-функция $\psi=\operatorname{col}(\psi_1,\,\dots\,,\psi_n)$ — решение этой системы уравнений, $u(x)\;=\;\{u_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ — матричный потенциал, имеющий нулевые элементы на диагонали $u_{ii}(x)\equiv 0$.

Системы дифференциальных уравнений вида (1) рассматривались в работах [1 – 4] в связи с применением метода обратной задачи интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений.

Задача рассеяния и обратная задача рассеяния для системы уравнений (1) при $n=2$ (нестационарная система Дирака в характеристических переменных) полностью изучены в работах [5 – 7]. В [8] для системы уравнений (1) рассмотрены прямая и обратная задачи рассеяния и указан алгоритм решения обратной задачи рассеяния.

Основными результатами настоящей работы являются подробное изучение операторов преобразования для системы уравнений (1) и на их основе изучение структуры оператора рассеяния.

В дальнейшем будем предполагать, что элементы потенциала $u(x)$ являются комплекснозначными измеримыми функциями, которые удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_{x_k\,(k\neq i,j)}\left|u_{ij}(x)\right|^2dx_i\,dx_j\;\le\;a\;<\;\infty,\quad i,j=1,\,\dots\,,n. \tag{2}$$

1. Если в системе уравнений (1) $u(x)\equiv 0$, то система называется *невозмущенной* и произвольная локально интегрируемая вектор-функция $\varphi(x)$, компоненты которой φ_i, $i=1,\,\dots\,,n$, не зависят от переменной x_i, т. е. $\varphi_i(x_1,\,\dots\,,x_{i-1},x_{i+1},\,\dots\,,x_n)$ является решением невозмущенной системы уравнений (1) в смысле теории обобщенных функций. Так описываются все локально интегрируемые решения невозмущенной системы уравнений (1).

Поскольку в дальнейшем рассматриваются вектор-функции, зависящие не от всех переменных, то для удобства обозначения набор независимых переменных $(x_{\alpha_1},\,x_{\alpha_2},\,\dots\,,x_{\alpha_m})=x_\alpha$ введем в рассмотрение подмножества $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\,\dots\,,\alpha_m)$, $\alpha\subset\{1,2,\,\dots\,,n\}$, которые будут обозначать совокупность номеров этих переменных. При этом $|\,\alpha\,|=m$ — количество независимых переменных. Дополнительный к α набор номеров независимых переменных будем обозначать через $(\alpha)=\{1, 2, \ldots, n\}\setminus\alpha$. В этих обозначениях решение невозмущенной системы уравнений (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \operatorname{col}(\varphi_1(x_{(1)}), \varphi_2(x_{(2)}), \ldots, \varphi_n(x_{(n)})). \tag{3}$$

Пусть $\Phi_i = C(-\infty < x_i < +\infty; L_2(E^{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, — пространства комплекснозначных измеримых функций $\psi_i(x)$, которые принадлежат пространствам $H_i = L_2(E^{n-1})$, $i = 1, \ldots, n$, по переменным $x_{(i)}$ и как вектор-функции из пространства $L_2(E^{n-1})$ непрерывно зависят от $x_i \in (-\infty, +\infty)$. Обозначим прямое произведение пространств Φ_i через $\Phi(E^n; C^n)$. Элементами пространства $\Phi(E^n; C^n)$ являются вектор-функции $\psi(x) = \operatorname{col}(\psi_i)_{i=1}^n$, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_\Phi = \max_i \left\{ \sup_{x_i} \left\{ \int |\psi_i(x)|^2 dx_{(i)} \right\}^{1/2} \right\} < \infty. \tag{4}$$

В пространстве $\Phi(E^n; C^n)$ рассмотрим множество вектор-функций вида (3). Для этих вектор-функций конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int \left|\varphi_i(x_{(i)})\right|^2 dx_{(i)} \right\}^{1/2}, \tag{5}$$

которая определяет пространство, являющееся прямым произведением гильбертовых пространств H_i, $i = 1, \ldots, n$; будем обозначать его через $L_2(E^{n-1}; C^n)$. При этом $\|\varphi\|_{L_2} \geq \|\varphi\|_\Phi$.

Среди всех обобщенных решений системы уравнений (1) выделим те, которые принадлежат пространству $\Phi(E^n; C^n)$. Эти решения будем называть *допустимыми решениями.*

Допустимые решения невозмущенной системы уравнений (1) имеют вид (3), т. е. совпадают с вектор-функциями из пространства $L_2(E^{n-1}; C^n)$.

Если потенциал $u(x)$ в системе уравнений (1) удовлетворяет условию (2), то решения этой системы на бесконечности имеют вид решения невозмущенной системы, т. е. справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого допустимого решения $\psi(x)$ системы уравнений* (1), *потенциал $u(x)$ которой удовлетворяет условию* (2), *существуют и единственны вектор-функции $\overset{\pm}{\psi} \in L_2(E^{n-1}; C^n)$ такие, что в норме пространства $L_2(E^{n-1})$ справедливы асимптотические представления*

$$\psi_i = \overset{-}{\psi}_i(x_{(i)}) + o(1), \quad x_i \to -\infty, \tag{6}$$

$$\psi_i = \overset{+}{\psi}_i(x_{(i)}) + o(1), \quad x_i \to +\infty, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\psi(x) \in \Phi(E^n; C^n)$ — допустимое решение системы уравнений (1). Определим вектор-функции $\overset{\pm}{\psi}$ равенствами

$$\overset{\pm}{\psi}_i = \psi_i(x) \pm (A^{(\pm)}\psi)_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где

$$(A^{(\pm)}\psi)_i(x) = \pm \sum_{j=1}^n \int_{\pm\infty}^{x_i} u_{ij}(x)\, \psi_j(x)\, dx_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

В силу оценки (2) потенциала $u(x)$ операторы $A^{(\pm)}$ являются линейными непрерывными операторами в пространстве вектор-функций $\Phi(E^n; C^n)$ и

$$\left\| A^{(\pm)} \right\| \leq n\sqrt{a}. \tag{10}$$

Из (8) и (10) имеем $\overset{\pm}{\psi}_i \in \Phi_i$. Дифференцируя (8) по x_i и учитывая, что ψ — допустимое решение системы уравнений (1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\overset{\pm}{\psi}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\psi_i(x) + \sum_{j\neq i} u_{ij}(x)\,\psi_j(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

т. е. вектор-функции $\overset{\pm}{\psi}$ являются решениями невозмущенной системы уравнений (12) и поэтому имеют вид (3). Кроме того, из (8) имеем

$$\left\| \psi_i - \overset{\pm}{\psi}_i \right\|_{L_2(E^{n-1})} \leq \|\psi\|_\Phi \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\pm\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{x_{(\{i,j\})}} \left| u_{ij}(x) \right|^2 dx_j\, dx_i \right\}^{1/2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу этой оценки и условия (2) получаем асимптотики (6), (7).

Замечание. Согласно лемме 1 существуют операторы преобразования, связывающие допустимое решение $\psi(x)$ с его асимптотиками $\overset{\pm}{\psi}$:

$$\overset{\pm}{\psi} = (I + P_\pm)\psi. \tag{11}$$

Эти операторы являются линейными непрерывными операторами из пространства $\Phi(E^n; C^n)$ в пространство $L_2(E^{n-1}; C^n)$.

Вектор-функции $\bar{\psi}$ ($\overset{+}{\psi}$) можно рассматривать как профили падающей (рассеянной) волны. Поэтому физически естественной является постановка задачи нахождения допустимого решения системы уравнений (1) по заданному профилю падающей (или рассеянной) волны. Эта задача называется *задачей рассеяния.* Для системы уравнений (1) она формулируется следующим образом: *Пусть задана система уравнений* (1), *потенциал* $u(x)$ *которой удовлетворяет оценке* (2) *и вектор-функция* $\bar{\psi}(x) \in L_2(E^{n-1}; C^n)$. *Необходимо найти допустимое решение* $\psi(x)$ *системы уравнений* (1), *для которого* $\bar{\psi}$ *является профилем падающей волны, так что справедливо асимптотическое представление* (6).

Аналогично ставится задача рассеяния по заданной рассеянной волне $\overset{+}{\psi}(x) \in \in L_2(E^{n-1}; C^n)$.

Задачу рассеяния для системы уравнений (1) можно свести к системам интегральных уравнений. Действительно, при известных $\overset{\pm}{\psi}$ равенства (8) можно рассматривать как системы интегральных уравнений относительно вектор-функций $\psi(x)$:

$$\psi = \overset{\pm}{\psi} + A^{(\pm)}\psi, \tag{12}$$

где операторы $A^{(\pm)}$ определены в (9).

Решения систем интегральных уравнений (12) из пространства $\Phi(E^n; C^n)$ являются допустимыми решениями системы уравнений (1) и имеют требуемую асимптотику. Таким образом, разрешимость задачи рассеяния эквивалентна разрешимости систем интегральных уравнений (12) в пространстве $\Phi(E^n; C^n)$.

Системы интегральных уравнений (12) будем называть системами интегральных уравнений задачи рассеяния.

Вольтерровский тип системы уравнений задачи рассеяния (12) дает возможность доказать однозначную разрешимость этих систем уравнений при любом свободном члене.

Лемма 2. *Пусть элементы потенциала* $u(x)$ *удовлетворяют оценке* (2), *тогда для любых* $\overset{\pm}{\psi} \in \Phi(E^n; C^n)$ *существует и единственно решение системы интегральных уравнений* (12) *в пространстве* $\Phi(E^n; C^n)$.

Доказательство. Рассмотрим доказательство для случая оператора $A^{(-)}$ в уравнении (12). В силу (10) система интегральных уравнений (12) является системой с линейным непрерывным оператором $A^{(-)}$ в пространстве $\Phi(E^n; C^n)$. Покажем, что для этой системы сходится метод последовательных приближений. Для этого введем в рассмотрение множество полунорм $\|\psi\|_{\Phi(T)}$ относительно параметра $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, $T_i \in (-\infty, +\infty)$:

$$\|\psi\|^2_{\Phi(T)} = \max_i \left\{ \sup_{x_i \le T_i} \int_{-\infty}^{T_{(i)}} |\psi_i(x)|^2 dx_{(i)} \right\}, \tag{13}$$

$$\|\psi\|_{\Phi} = \|\psi\|_{\Phi(\infty)}.$$

Из условия (2), используя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\left\|A^{(-)}\psi\right\|^2_{\Phi(T)} = \max_i \left\{ \sup_{x_i \le T_i} \int_{-\infty}^{T_{(i)}} \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} u_{ij}(x)\psi_j(x)\,dx_i \right|^2 dx_{(i)} \right\} \le$$

$$\le \max_i \left\{ \sup_{x_i \le T_i} \int_{-\infty}^{T_{(i)}} n \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x_i} |u_{ij}(x)| \, |\psi_j(x)| dx_i \right)^2 dx_{(i)} \right\} \le$$

$$\le n \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{T_{(i)}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{x_{(\{i,j\})}} |u_{ij}(x)|^2 dx_i \right) \int_{-\infty}^{T_{(i)}} |\psi_j(x)|^2 dx_i \, dx_{(i)} \right\}.$$

Отсюда

$$\left\|A^{(-)}\psi\right\|^2_{\Phi(T)} \le \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{T_j} a(T_j) \|\psi\|^2_{\Phi(T)} dT_j, \tag{14}$$

где

$$a(\xi) = \max_j a_j(\xi), \qquad a_j(x_j) = n \max_i \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{x_{(\{i,j\})}} |u_{ij}(x)|^2 dx_i \right\}. \tag{15}$$

Учитывая условие (2) и то, что $u_{ii} \equiv 0$, имеем $a(\xi) \in L_1(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi)\, d\xi \le an < +\infty. \tag{16}$$

Неравенство (14) обеспечивает сходимость метода последовательных приближений для системы интегральных уравнений задачи рассеяния (12). Действительно, для этого оценим $\left\|(A^{(-)})^N\right\|_{\Phi(T)}$. Пусть A_j, $j = 1, \ldots n$, — интегральные операторы вида

$$(A_j f)(T) = \int_{-\infty}^{T_j} a(\xi)\, f(T)\Big|_{T_j=\xi} d\xi \,,$$

которые переводят ограниченные неотрицательные функции n переменных в ограниченные неотрицательные. Для этих операторов при любых $f \in \Phi$ справедливо неравенство

$$\left\| A_j^k f \right\|_{\Phi(T)} \le (an)^k (k!)^{-1} \| f \|_{\Phi(T)}, \quad k \in N. \tag{17}$$

Тогда неравенство (14) можно записать в виде

$$\left\| A^{(-)} \psi \right\|^2_{\Phi(T)} \le \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \| \psi \|^2_{\Phi(\cdot)} \right)(T). \tag{18}$$

Используя оценки (17), (18), получаем

$$\left\| A^{(-)N} \psi \right\|^2_{\Phi(T)} \le \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \right)^N \| \psi \|^2_{\Phi(T)} = \sum_{|k|=N} N!\,(k!)^{-1} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_n^{k_n} \| \psi \|^2_{\Phi(T)} \le$$

$$\le \sum_{|k|=N} N!\,(an)^N (k!)^{-2} \| \psi \|^2_{\Phi(T)} \le (an)^N (N!)^{-1} \left(\sum_{|k|=N} N!\,(k!)^{-1} \right)^2 \| \psi \|^2_{\Phi(T)} =$$

$$= (an^3)^N (N!)^{-1} \| \psi \|^2_{\Phi(T)}.$$

Таким образом, оператор $(I - A^{(-)})^{-1} = I + A^{(-)} + \ldots + A^{(-)N} + \ldots$ существует и ограничен в пространстве $\Phi(E^n; C^n)$ и

$$\left\| (I - A^{(-)})^{-1} \right\|_{\Phi} < E\left(n\sqrt{an}\right), \tag{19}$$

где

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \sqrt{k!}\,.$$

В силу (19) существует и единственно в пространстве $\Phi(E^n; C^n)$ решение системы интегральных уравнений (12), для которого справедлива оценка

$$\| \psi \|_{\Phi} \le E\left(n\sqrt{an}\right) \| \bar{\psi} \|_{\Phi}. \tag{20}$$

Доказательство леммы в случае оператора $A^{(+)}$ проводится аналогично.

Задача рассеяния для системы уравнений (1), как отмечалось выше, эквивалентна разрешимости в пространстве $\Phi(E^n; C^n)$ системы уравнений задачи рассеяния (12). В частности, в силу леммы 2 эта система однозначно разрешима и при любом свободном члене $\overset{\pm}{\psi} \in L_2(E^{n-1}; C^n)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если потенциал $u(x)$ в системе уравнений* (1) *удовлетворяет условию* (2), *то для любой вектор-функции $\bar{\psi}(x) \in L_2(E^{n-1}; C^n)$, определяющей падающую волну, существует и единственно решение задачи рассеяния.*

В силу оценки (20) и замечания к лемме 1 справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Следствие. *Существуют линейные и непрерывные из пространства $L_2(E^{n-1}; C^n)$ в пространство $\Phi(E^n; C^n)$ операторы преобразования $\psi = (I +$*

$+ P_{\pm})^{-1} \overset{\pm}{\psi}\; u \,\| (I + P_{\pm})^{-1} \| \le E\left(n\sqrt{an}\right)$.

Если в системе уравнений (1) потенциал $u(x)$ удовлетворяет оценке (2), то согласно теореме 1, каждой вектор-функции $\bar{\psi} \in L_2(E^{n-1}; C^n)$, определяющей падающую волну, соответствует единственное допустимое решение $\psi \in \Phi(E^n; C^n)$ этой системы. Этому решению, согласно лемме 1, соответствует единственная вектор-функция $\overset{+}{\psi} \in L_2(E^{n-1}; C^n)$, определяющая рассеянную волну. Таким образом, существует линейный и ограниченный в пространстве $L_2(E^{n-1}; C^n)$ оператор рассеяния S

$$S\bar{\psi} = \overset{+}{\psi}, \tag{21}$$

который имеет ограниченный обратный S^{-1} и выражается через операторы преобразования (11) формулой

$$S = (I + P_+)(I + P_-)^{-1}. \tag{22}$$

2. Для получения более точной структуры оператора рассеяния S в данном пункте изучается структура операторов преобразования для системы уравнений (1).

Теорема 2. *Допустимое решение системы уравнений* (1) *с потенциалом* $u(x)$, *удовлетворяющим условию* (2), *может быть представлено через свои профили* $\overset{\pm}{\psi}(x)$ *падающей и рассеянной волн в виде*

$$\psi_i(x) = \overset{\pm}{\psi}_i(x_{(i)}) + \sum_{j,\alpha}\left(\overset{\mp}{H}{}^{\alpha}_{ij}\,\overset{\pm}{\psi}_j\right)(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{23}$$

где суммирование проводится по всем j *от* 1 *до* n *и по всем подмножествам* $\alpha \subset \{1, \ldots, n\}$. *Операторы* $\overset{\pm}{H}{}^{\alpha}_{ij}$ *являются интегральными операторами по переменным* x_α *с переменным верхним* (+) *или нижним* (–) *пределом интегрирования. По остальным переменным эти операторы действуют в пространстве* $L_2(E^{n-1}; C^n)$ *как ограниченные операторы умножения, т. е.*

$$\left(\overset{\pm}{H}{}^{\alpha}_{ij}\, f_j\right)(x) = \int\limits_{E^{|\alpha|}} \overset{\pm}{H}{}^{\alpha}_{ij}(x, s_\alpha) f_j(x_{(i)})\Big|_{x_\alpha = s_\alpha} ds_\alpha.$$

При этом $\overset{\pm}{H}{}^{\alpha}_{ij}(x, s_\alpha) \equiv 0$, *если* $i = j$ *и* $i \in \alpha$ *или если* $i \ne j$ *и* $i \notin \alpha$, $j \in \alpha$. *Ядра операторов* H^{α}_{ij} *удовлетворяют оценкам*

$$\int\limits_{E^{2|\alpha|}} \sup_{x_{(\beta)}} \left|\overset{\pm}{H}{}^{\alpha}_{ij}(x, s_\alpha)\right|^2 dx_\beta\, ds_\alpha < \infty, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

где $\beta = (\alpha \setminus \{i\}) \cup \{j\}$, *т. е. являются интегральными операторами Гильберта – Шмидта по некоторым переменным. Ядра операторов преобразования* (23) *однозначно определяются потенциалом* $u(x)$, *который выражается через ядра операторов преобразования формулами*

$$u_{ij}(x) = \mp \overset{\pm}{H}{}^{\{i\}}_{ij}(x, x_i \mp 0), \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad i \ne j. \tag{25}$$

Доказательство. Подставим (23) в систему интегральных уравнений задачи рассеяния (12). При этом в силу произвольности $\overset{\pm}{\psi}$ получим системы интегральных уравнений для ядер операторов преобразования

$$\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\{i\}}(x,s) \pm u_{ij}(x)\Big|_{x_i=s} + \int_s^{x_i} u_{ij}(x)\overset{\pm}{H}{}_{jj}^{\{i\}}(x,s)\,dx_i = 0,$$

$$\overset{\pm}{H}{}_{jj}^{\{i\}}(x,s) + \int_{\mp\infty}^{x_j} u_{ji}(x)\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\{i\}}(x,s)\,dx_j = 0, \quad \pm(x_i-s) \ge 0, \tag{26}$$

$$i,j=1,\ldots,n, \quad i \ne j,$$

$$\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\alpha}(x,s_\alpha) \pm \sum_{k\in\beta}\left[u_{ik}(x)\overset{\pm}{H}{}_{kj}^{\alpha\setminus\{i\}}(x,s_{\alpha\setminus\{i\}})\right]_{x_i=s} +$$

$$+ \sum_{k\in\beta}\int_{s_i}^{x_i} u_{ik}(x)\overset{\pm}{H}{}_{kj}^{\alpha}(x,s_\alpha)\,dx_i = 0,$$

$$\overset{\pm}{H}{}_{jj}^{\alpha}(x,s_\alpha) + \sum_{k\in\alpha}\int_{\pm\infty}^{x_j} u_{jk}(x)\overset{\pm}{H}{}_{kj}^{\alpha}(x,s_\alpha)\,dx_j = 0, \tag{27}$$

$$\mp(x_i-s_i) \ge 0, \quad i,j=1,\ldots,n; \quad i\ne j, \quad |\alpha| = 2,\ldots,n-1,, \quad \beta = (\alpha\setminus\{i\})\cup\{j\}.$$

Наоборот, если функции $\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\alpha}(x,s_\alpha)$ удовлетворяют системам (26), (27) и оценкам (24), то представления (23) дают допустимое решение системы (1) для любого $\overset{\pm}{\psi} \in L_2(E^{n-1}; C^n)$.

Отметим, что система уравнений (26) получается из системы (27) при $\alpha = \{i\}$ и $\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\alpha\setminus\{i\}}(x,s_{\alpha\setminus\{i\}}) \equiv 1$.

Таким образом, для доказательства представления (23) необходимо показать, что системы интегральных уравнений (26), (27) однозначно разрешимы в соответствующих пространствах и их решения удовлетворяют оценке (24).

Системы интегральных уравнений (27) будем рассматривать при каждом фиксированном α и j относительно вектор-функций $\nu(x_\gamma) = \operatorname{col}(\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\alpha}(x,s_\alpha))_{i\in\gamma}$, $\gamma = \alpha\cup\{j\}$, $|\gamma| = 2,\ldots,n$, по переменным x_γ. При этом система интегральных уравнений (27) содержит $|\alpha|+1 = |\gamma|$ уравнений и ее можно записать в операторном виде

$$\nu(x,s_\alpha) = h(x,s_\alpha) + (A^\gamma\nu)(x,s_\alpha), \tag{28}$$

где $h(x,s_\alpha) = \operatorname{col}(h_i(x_{(i)},s_\alpha))_{i\in\gamma}$,

$$h_i(x_{(i)},s_\alpha) = \sum_{k\in\beta}\left[u_{ik}(x)\overset{\pm}{H}{}_{kj}^{\alpha\setminus\{i\}}(x,s_{\alpha\setminus\{i\}})\right]_{x_i=s_i}, \tag{29}$$

$$h_j(x,s_\alpha) \equiv 0, \quad i,j=1,\ldots,n, \quad i\ne j, \quad i\in\alpha,$$

а A^γ — матричный интегральный оператор в пространстве вектор-функций от $n+|\alpha|$ переменных и $|\gamma|$ компонент. Этот оператор является интегральным оператором вольтерровского типа, матричное ядро которого $A^\gamma(x,\xi)$ имеет вид

$$A_{ik}^{\gamma}(x_{(i)}, \xi) = \begin{cases} u_{ik}(x)\big|_{x_i=\xi}\,\theta(x_i-\xi)\,\theta(\xi-s_i), & i\in\gamma, \quad i\neq j, \quad k\in\beta; \\ u_{ik}(x)\big|_{x_j=\xi}\,\theta(\pm(x_j-\xi)), & i=j, \quad k\in\alpha; \\ 0, \quad i=k, \end{cases} \tag{30}$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хевисайда.

Для изучения разрешимости уравнения (28) введем в рассмотрение пространства $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(E^{n+|\alpha|};\, C^{|\alpha|+1})$, $|\alpha| = 1, 2, \ldots, n$, комплекснозначных измеримых вектор-функций $\nu(x, s_\alpha)$ от $n + |\alpha|$ переменных, для которых конечна норма

$$\|\nu\|_{\Omega_\alpha}^2 = \max_i \left\{ \int\limits_{E^{2|\alpha|}} \sup_{x_{(\beta)}} |\nu_i(x, s_\alpha)|^2\, dx_\beta\, ds_\alpha \right\} < \infty. \tag{31}$$

В этих пространствах справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Если потенциал* $u(x)$ *удовлетворяет оценке* (2) *и свободный член* $h(x, s_\alpha)$ *в уравнении* (28) *принадлежит пространству* Ω_α, *то существует и единственно решение этого уравнения из пространства* Ω_α.

Доказательство. В силу оценки (2) из (30) получаем

$$\left\|A^\gamma \nu\right\|_{\Omega_\alpha}^2 \le a|\gamma|^2 \|\nu\|_{\Omega_\alpha}^2,$$

т. е. оператор A^γ является линейным непрерывным оператором в пространстве Ω_α и $\left\|A^\gamma\right\| \le |\gamma|\sqrt{a}$. Покажем, что для уравнения (28) с этим оператором сходится метод последовательных приближений.

Для этого рассмотрим систему полунорм $\|\nu\|_{\Omega(T)}$ относительно параметра $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$, $T_i \in (-\infty, +\infty)$:

$$\|\nu\|_{\Omega(T)}^2 = \max_i \left\{ \int\limits_{-\infty}^{T_\beta} \int\limits_{E^{|\alpha|}} \sup_{x_{(\beta)} \le T_{(\beta)}} |\nu_i(x, s_\alpha)|^2\, ds_\alpha\, dx_\beta \right\}, \tag{32}$$

$$\|\nu\|_{\Omega_\alpha} = \|\nu\|_{\Omega(\infty)}.$$

Учитывая оценку (2), легко получить аналог неравенства (14)

$$\left\|A^\gamma \nu\right\|_{\Omega(T)}^2 \le \sum_{j=1}^{|\alpha|} \int\limits_{-\infty}^{T_j} a(T_j)\, \|\nu\|_{\Omega(T)} dT_j,$$

где функция $a(\xi)$ определена в (15) и $n = |\alpha|$.

Последовательно проводя оценки, аналогичные оценкам для оператора $A^{(-)}$ и его степеней $A^{(-)N}$ в (13) – (19), получаем

$$\left\|(I + A^\gamma)^{-1}\right\|_{\Omega_\alpha} \le E\big(|\alpha|\sqrt{a|\alpha|}\big). \tag{33}$$

В силу (33) существует и единственно в пространстве Ω_α решение уравнения (28), для которого справедлива оценка

$$\|\nu\|_{\Omega_\alpha} \le E\big(|\alpha|\sqrt{a|\alpha|}\big)\, \|h\|_{\Omega_\alpha}. \tag{34}$$

Лемма доказана.

Поскольку свободный член (29) системы уравнений (27) зависит от решения с меньшим числом переменных, доказательство разрешимости этой системы проводится методом математической индукции по $|\alpha| = 1, 2, \ldots, n-1$. При этом из оценки (2) легко показать, что для любого $|\alpha| = 1, 2, \ldots, n-1$ свободный член (29) удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда, в силу этой леммы, существует и единственно решение системы интегральных уравнений (28) из пространства Ω_α, которое удовлетворяет оценке (24).

Формулы (25) получаются из системы (26) при $x_i = s$. Таким образом, теорема 2 доказана.

В теореме 2 показано, что операторы преобразования для системы уравнений (1) представляют собой сумму интегральных операторов по различному количеству переменных. При этом существует возможность однозначного разбиения этих операторов на сумму операторов по количеству переменных интегрирования. Более точно, пусть $A = \sum_{|\alpha|=1}^{n} H^\alpha$ — линейный, ограниченный оператор в пространстве функций от n переменных, который является суммой интегральных операторов H^α по набору переменных x_α и оператором умножения по остальным переменным. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Каждый из операторов H^α однозначно определяется через сумму A.*

Доказательство. Рассмотрим функции $\omega_\delta^\alpha(x)$ вида

$$\omega_\delta^\alpha(x) = \varepsilon^{-|\alpha|} \prod_{i=1}^{n} \omega\Big((x_i - \xi_i)\,\varepsilon^{-1}\Big), \tag{35}$$

где $\omega(x)$ — функция с компактным носителем, принадлежащая классу C_0^∞ и такая, что $\int \omega(x)\,dx = 1$, $\omega(0) = 1$. Тогда, как легко видеть,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left((A\omega_\varepsilon^\alpha)(x)\Big|_{x_{(\alpha)} = \xi_{(\alpha)}}^{x_\alpha \neq \xi_\alpha}\right) = H^\alpha\big(x_\alpha, \xi_{(\alpha)}; \xi_\alpha\big). \tag{36}$$

В силу этой леммы корректным является следующее определение.

Определение. *Сингулярными частями операторов преобразования* (23) *будем называть матричные интегральные операторы $\overset{\pm}{H}$, элементы которых $\overset{\pm}{H}_{ij} = \overset{\pm}{H}{}_{ij}^{(i)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, являются интегральными операторами только по одной переменной x_i, а $\overset{\pm}{H}_{ii} = \sum_{k\neq i} \overset{\pm}{H}{}_{ii}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$. Все остальные операторы объединим в регулярную часть операторов преобразования.*

Выделяя сингулярную и регулярную части, операторы преобразования (23) можно записать в операторном виде

$$\psi = \left(I + \overset{\mp}{H} + \sum_{|\alpha|\geq 2} \overset{\mp}{H}{}^\alpha\right)\overset{\pm}{\psi}, \tag{37}$$

где сингулярная и регулярная части, в силу леммы 4, однозначно определяются по оператору преобразования.

С другой стороны, потенциал $u(x)$ непосредственно однозначно определяется сингулярными частями $\overset{\pm}{H}$ операторов преобразования равенствами (25). И наоборот, сами сингулярные части операторов преобразования однозначно определяются потенциалом $u(x)$. При этом системы интегральных уравнений (26) для ядер сингулярных частей операторов преобразования (37) распадаются так,что ядра $\overset{\pm}{H}{}_{ii}^{(j)}(x,s)$, $\overset{\pm}{H}{}_{jj}^{(i)}(x,s)$, $\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{(i)}(x,s)$, $\overset{\pm}{H}{}_{ji}^{(j)}(x,s)$ определяются парой элементов потенциала $u_{ij}(x)$, $u_{ji}(x)$. И наоборот, пара элементов потенциала

$u_{ij}(x)$, $u_{ji}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$, через систему интегральных уравнений (26) однозначно определяет элементы $\overset{\pm}{H}{}_{ii}^{\{i\}}(x,s)$, $\overset{\pm}{H}{}_{jj}^{\{i\}}(x,s)$, $\overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\{i\}}(x,s)$, $\overset{\pm}{H}{}_{ji}^{\{j\}}(x,s)$ сингулярных частей операторов преобразования (37).

Используя результаты работ [3, 5], получаем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Сингулярные части операторов преобразования* (37) *для системы уравнений* (1) *состоят из элементов матричных операторов преобразования для множества* $(n^2-n)/2$ *систем уравнений Дирака вида*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & u_{ij}(x) \\ u_{ji}(x) & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix} \psi^{ij}(x) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad i < j, \tag{38}$$

с потенциалом $u_{ij}(x)$, $u_{ji}(x)$, *удовлетворяющим оценке* (2).

3. Использование операторов преобразования позволяет в следующей теореме описать более тонкую структуру операторов рассеяния S и S^{-1}.

Теорема 3. *Операторы рассеяния* S *и* S^{-1} *для системы дифференциальных уравнений* (1) *с потенциалом* $u(x)$, *удовлетворяющим оценке* (2), *имеют вид*

$$S = I + F^{(S)} + F^{(R)}, \quad S^{-1} = I + G^{(S)} + G^{(R)}, \tag{39}$$

где $F^{(S)}$, $G^{(S)}$, $F^{(R)}$, $G^{(R)}$ — *матричные интегральные операторы, которые будем называть соответственно сингулярной и регулярной частями операторов* S *и* S^{-1}. *При этом* $F_{ij}^{(S)} = F_{ij}^{\{i\}}$, $G_{ij}^{(S)} = G_{ij}^{\{i\}}$, $i \neq j$, — *интегральные операторы по* i*-й переменной;* $F_{ii}^{(S)} = \sum_{k \neq i} \overset{+}{F}{}_{ii}^{\{k\}}$, $G_{ii}^{(S)} = \sum_{k \neq i} \overset{-}{G}{}_{ii}^{\{k\}}$, *где* $\overset{+}{F}{}_{ii}^{\{k\}}$, $\overset{-}{G}{}_{ii}^{\{k\}}$ — *вольтерровские интегральные операторы по* k*-й переменной с полярностью, соответствующей индексу* (+) *или* (–); $F_{ij}^{(R)} = \sum_{|\alpha| \geq 2} F_{ij}^{\alpha}$, $G_{ij}^{(R)} = \sum_{|\alpha| \geq 2} G_{ij}^{\alpha}$ — *сумма интегральных операторов по двум и более переменным, а по остальным переменным они действуют как операторы умножения. Ядра операторов* S *и* S^{-1} *удовлетворяют оценкам*

$$\int\limits_{E^{|\alpha|}} \sup_{x_{(\beta)}} \left| F_{ij}^{\alpha}(x_{(i)}, s_{\alpha}) \right|^2 dx_{\beta}\, ds_{\alpha} < \infty, \qquad \int\limits_{E^{|\alpha|}} \sup_{x_{(\beta)}} \left| G_{ij}^{\alpha}(x_{(i)}, s_{\alpha}) \right|^2 dx_{\beta}\, ds_{\alpha} < \infty, \tag{40}$$

$$i, j = 1, \ldots, n; \qquad \beta = (\alpha \setminus \{i\}) \cup \{j\}.$$

Доказательство. В операторах преобразования (23) перейдем к пределу $x_i \to \pm\infty$ в смысле поточечной сходимости. Тогда, учитывая определение оператора рассеяния S (21), получаем указанную в условии теоремы структуру операторов S и S^{-1}. При этом ядра операторов S и S^{-1} выражаются через ядра операторов преобразования (37) формулами

$$F_{ij}^{(S)}(x_{(i)}, s) = F_{ij}^{\{i\}}(x_{(i)}, s) = \lim_{x_i \to +\infty} \overset{+}{H}{}_{ij}^{\{i\}}(x, s),$$

$$\overset{+}{F}{}_{ii}^{\{k\}}(x_{(i)}, s) = \lim_{x_i \to +\infty} \overset{+}{H}{}_{ii}^{\{k\}}(x, s),$$

$$F_{ij}^{(R)}(x_{(i)}, s) = \sum_{|\alpha|\ge 2} F_{ij}^{\alpha}(x_{(i)}, s_\alpha) = \sum_{|\alpha|\ge 2} \lim_{x_i\to+\infty} \overset{+}{H}{}_{ij}^{\{i\}}(x, s_\alpha), \tag{41}$$

$$G_{ij}^{(S)}(x_{(i)}, s) = G_{ij}^{\{i\}}(x_{(i)}, s) = \lim_{x_i\to-\infty} \bar{H}_{ij}^{\{i\}}(x, s),$$

$$\bar{G}_{ii}^{\{k\}}(x_{(i)}, s) = \lim_{x_i\to-\infty} \bar{H}_{ii}^{\{k\}}(x, s),$$

$$G_{ij}^{(R)}(x_{(i)}, s) = \sum_{|\alpha|\ge 2} G_{ij}^{\alpha}(x_{(i)}, s_\alpha) = \sum_{|\alpha|\ge 2} \lim_{x_i\to-\infty} \bar{H}_{ij}^{\{i\}}(x, s_\alpha),$$

$$i, j = 1, \ldots, n; \quad i \ne j.$$

Существование пределов, указанных в правых частях (41), следует из систем интегральных уравнений (26), (27). При этом

$$\begin{gathered}
\lim_{x_i\to\pm\infty} \overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\{i\}}(x, s) = \mp u_{ij}(x)\big|_{x_i=s} - \int_s^{\pm\infty} u_{ij}(x)\overset{\pm}{H}{}_{jj}^{\{i\}}(x, s)\,dx_i, \\
\lim_{x_i\to\pm\infty} \overset{\pm}{H}{}_{ii}^{\{k\}}(x, s) = -\int_{-\infty s}^{+\infty} u_{ij}(x)\overset{\pm}{H}{}_{ji}^{\{i\}}(x, s)\,dx_j, \\
\lim_{x_i\to\pm\infty} \overset{\pm}{H}{}_{ij}^{\alpha}(x, s) = \pm \sum_{k\in\beta}\left[u_{ik}(x)\,\overset{\pm}{H}{}_{kj}^{\alpha\setminus\{i\}}(x, s_{\alpha\setminus\{i\}})\right]_{x_i=s_i} - \\
- \sum_{k\in\beta}\int_{s_i}^{\pm\infty} u_{ik}(x)\overset{\pm}{H}{}_{kj}^{\alpha}(x, s_\alpha)\,dx_i, \\
\lim_{x_i\to\pm\infty} \overset{\pm}{H}{}_{ii}^{\alpha}(x, s_\alpha) = -\sum_{k\in\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{ik}(x)\overset{\pm}{H}{}_{ki}^{\alpha}(x, s_\alpha)\,dx_i, \\
i, j = 1, \ldots, n; \quad i \ne j.
\end{gathered} \tag{42}$$

Используя оценки (2) и (24), из (42) получаем оценки (40).

Следствие. *Для систем уравнений Дирака вида* (38) *с потенциалом* $u_{ij}(x)$, $u_{ji}(x)$, *удовлетворяющим оценке* (2), *в пространстве* $L_2(E^{n-1}; C^2)$ *существуют ограниченные операторы рассеяния* S^{ij} *и обратные к ним* $(S^{ij})^{-1}$

$$S^{ij} = I + F^{ij}, \quad (S^{ij})^{-1} = I + G^{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad i < j, \tag{43}$$

где F^{ij}, G^{ij} — *матричные интегральные операторы вида*

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} \overset{+}{F}{}_{ii}^{\{j\}} & F_{ij}^{\{i\}} \\ F_{ji}^{\{j\}} & \overset{+}{F}{}_{jj}^{\{i\}} \end{pmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{pmatrix} \bar{G}_{ii}^{\{j\}} & G_{ij}^{\{i\}} \\ G_{ji}^{\{j\}} & \bar{G}_{jj}^{\{i\}} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad i < j. \tag{44}$$

Следствием леммы 4 является следующая лемма.

Лемма 6. *Сингулярные части* $F^{(S)}$, $G^{(S)}$ *однозначно определяются по оператору рассеяния* S. *При этом*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(S_{ij}\omega_\varepsilon^j\big|_{x=\xi}\right) = F_{ij}^{(S)}(\xi_{(i)}, \xi_i), \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \ne j, \tag{45}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left((S_{ii} - I)\,\omega_\varepsilon^j\big|_{x_{(k)}=\xi_{(k)},\, x_k\ne\xi_k}\right) = \overset{+}{F}{}_{ii}^{\{k\}}(\xi_{(i)}, \xi_k), \quad i, k = 1, \ldots, n, \quad i \ne k,$$

где $\omega_\varepsilon^i(x_{(i)}) = \delta_{ij}\,\omega_\varepsilon^{(i)}(x_{(i)})$ (δ_{ij} — *символ Кронекера*), *а функция* $\omega_\varepsilon^{(i)}$ *определена в* (35).

Формулы, аналогичные формулам (45), справедливы и для $G^{(S)}$.

В силу леммы 5 и формул (41) имеет место следующая лемма.

Лемма 7. *Сингулярные части* $F^{(S)}$, $G^{(S)}$ *операторов рассеяния* S *и оператора* S^{-1} *для системы дифференциальных уравнений* (1) *с потенциалом* $u(x)$, *удовлетворяющим оценке* (2), *состоят из элементов операторов рассеяния* S^{ij} *и обратных операторов* $(S^{ij})^{-1}$ (43), (44) *для* $(n^2-n)/2$ *систем уравнений Дирака вида* (38).

В заключение отметим, что свойства оператора рассеяния S и S^{-1}, сформулированные в лемме 7, играют существенную роль при решении обратной задачи рассеяния для системы уравнений (1).

1. *Cornille H.* Multidimentional invertion formalism as a compatibility condition between different linear differential systems // J. Phys. – 1979. – **12**, № 9. – P. 1375 – 1398.
2. *Kaup D.* The inverse scattering solution for the full three-dimensional three-wave resonant interaktion // Physica 1D. – 1980. – № 1. – P. 45 – 67.
3. *Манаков С. В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 5. – С. 245 – 246.
4. *Fokas A.* Inverse problem for multidimentional first-order systems // J. Math. Phys. – 1986. – **27**, № 7. – P. 1737 – 1746.
5. *Нижник Л. П., Починайко М. Д., Тарасов В. Г.* Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака в характеристических переменных // Спектральная теория операторов в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 72 – 93.
6. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
7. *Nizhnik L. P.* The inverse scattering problem for the hyperbolic equations and their application to non-linear integrable systems // Repts Math. Phys. – 1988. – **26**, № 2. – P. 261 – 283.
8. *Нижник Л. П., Тарасов В. Г.* Многомерная обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 84 – 93.

Получено 07.07.98