УДК 517. 986

В. И. Рабанович (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОДНОПОРОЖДЕННЫЕ C^*-АЛГЕБРЫ

We consider C^*-algebra A generated by k self-adjoint generators. We prove that, for $n \geq \sqrt{k-1}$, the algebra $M_n(A)$ is singly generated, i.e., generated by one generator which is not self-adjoint. We present an example of algebra A for which the fact that $M_n(A)$ is singly generated implies the relation $n \geq \sqrt{k-1}$.

Розглядається C^*-алгебра A, породжена k самоспряженими твірними. Доводиться, що при $n \geq \sqrt{k-1}$ алгебра $M_n(A)$ є однопороджeною, тобто породжена одним несамоспряженим генератором. Наведено приклад алгебри A, для якої з однопороджeності $M_n(A)$ випливає, що $n \geq \sqrt{k-1}$.

Введение. Вопрос о том, порождается ли C^*-алгебра одним несамосопряженным генератором, привлекал внимание многих математиков. Некоторые результаты приведены в работе [1]. В настоящей статье рассматриваются матричные алгебры над C^*-алгебрами. Доказывается теорема 1 о существовании одного порождающего элемента в матричной алгебре порядка n над C^*-алгеброй с единицей и k самосопряженными образующими при $n^2 \geq k-1$. Аналогичная теорема была доказана в [2], но с более грубой оценкой.

Далее мы приводим пример C^*-алгебры (теорема 2), который показывает, что оценка точна. Пример основан на том, что любую самосопряженную матрицу с непрерывными элементами $(a_{ij}(t))$, $t \in K \subset \mathbb{R}^k$, в некоторой области $\Omega \subset K$ унитарным преобразованием (оно строится конструктивно и является непрерывным) можно привести к диагональному виду.

1. Обозначения и соглашения. Пусть A — C^*-алгебра с единицей. Алгебра $M_n(A)$ всех $(n \times n)$-матриц с элементами из A также является C^*-алгеброй (инволюция на $M_n(A)$ это транспозиция матрицы плюс инволюция на элементах из A). Символом E будем обозначать единичную матрицу из $M_n(A)$. Если $b_1, \ldots, b_n$ — элементы A, то под $C^*(b_1, \ldots, b_n)$ будем понимать наименьшую C^*-подалгебру, содержащую элементы $b_1, \ldots, b_n$. Если A с единицей e однопорождена (порождается одним элементом a), то это означает, что $A = C^*(e, a, a^*)$.

В дальнейшем мы часто будем использовать утверждение: *Если C^*-алгебра имеет k-элементное порождающее множество, то она порождается $2k$-элементным самосопряженным множеством.* Например:

$$A = C^*(a_1, a_2, \ldots, a_k) = C^*(a_1 + a_1^*, (a_1 - a_1^*)/i, \ldots, (a_k - a_k^*)/i),$$

где $i = \sqrt{-1}$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть A — C^*-алгебра с единицей, порожденная k самосопряженными образующими. Тогда для $n \geq \sqrt{k-1}$ алгебра матриц $M_n(A)$ однопорождена.*

Замечания. **1.** В [2] было доказано, что $M_n(A)$ однопорождена для $n \geq (-3 + \sqrt{9 + 8k})/2$.

2. Справедливо утверждение, аналогичное теореме 1, для C^*-алгебр, порожденных k несамосопряженными образующими. Достаточно изменить неравенство для n: $n \geq \sqrt{2k-1}$.

Доказательство. Пусть A — алгебра, удовлетворяющая условиям теоремы и порождающаяся самосопряженными элементами $a_1, \ldots, a_k$, $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, и выполняется соотношение $n^2 = k-1$ (если $n^2 > k-1$, то, дополнив набор a_j единицами, можно добиться равенства). Выберем новые образующие для A:

$$b_1 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 e, \quad b_2 = \lambda_2 a_2 + \mu_2 e, \ldots, b_{n-1} = \lambda_{n-1} a_{n-1} + \mu_{n-1} e,$$

$$c_1 = \lambda_n (a_n + i\, a_{n+1}) + \mu_n e, \ldots, c_n = \lambda_{2n-1}(a_{3n-2} + i\, a_{3n-1}) + \mu_{2n-1} e,$$

$$c_{n+1} = (a_{3n} + i\, a_{3n+1}), \ldots, C_{\frac{n(n-1)+2}{2}} = a_{k-1} + i\, a_k,$$

$$\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \mu_j \in \mathbb{C}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

подобрав λ_j и μ_j так, что:

1) каждый $b_j > e$ (т. е. спектр b_j является множеством из $\mathbb{R}$ и лежит правее единицы);

2) образующие c_j, $j = 1, \ldots, n$, обратимы и их спектры содержатся в непересекающихся дисках в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Порождающим генератором для $M_n(A)$ будет верхнетреугольная матрица T:

$$T = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2} \\ & \ddots & b_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c_{\frac{n^2-n+2}{2}} \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_n \end{pmatrix}.$$

Из доказательства теоремы 1 в [2] следует утверждение: *Для того чтобы* E_{ii} *и* $E_{jj+1} \in C^*(T)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, *необходимо чтобы выполнялись условия* 1, 2 (E_{ij} – *матричная единица с* e *на* (i,j)*-м месте*). Поэтому E_{ii} и $E_{jj+1} \in C^*(T)$, i, $j \geq 1$, но $C^*(E_{ii}, E_{jj+1}, i, j \geq 1) \cong M_n(\mathbb{C})$, т. е. все матричные единицы E_{ij} лежат в $C^*(T)$. Таким образом, все матрицы

$$B_i = \begin{pmatrix} b_i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C_j = \begin{pmatrix} c_j & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$1 \leq i \leq n-1, \qquad 1 \leq j \leq \frac{n(n-1)+2}{2},$$

принадлежат $C^*(T)$. А значит, $C^*(T) = M_n(A)$, что и завершает доказательство теоремы.

Как показывает следующая теорема, оценку $n \geq \sqrt{k-1}$ нельзя улучшить.

Теорема 2. *Пусть* A *является* C^**-алгеброй всех непрерывных функций на* *замкнутом единичном шаре* K в $\mathbb{R}^k$: $A = C(K)$. *Тогда* $M_n(A)$ *однопорождена тогда и только тогда, когда* $n^2 \geq k-1$.

Доказательство. Пусть $a_j(t_1, \ldots, t_k) = t_j - 3$, $(t_1, \ldots, t_k) \in K$, $1 \leq j \leq k$ и $n^2 \geq k-1$. Тогда a_j будут непрерывными функциями, порождающими A. Поэтому в силу теоремы 1 $M_n(A)$ однопорождена.

Докажем необходимость условия $n^2 \geq k-1$. Пусть $M_n(A)$ однопорождена и T — порождающий элемент для $M_n(A)$. Если обозначить $X = (T + T^*)$, $Y = (T - T^*)/i$, то $X = X^*$, $Y = Y^*$, и $C^*(X, Y) = M_n(A)$.

Замечание 3. В последующих леммах все шары B_i имеют ненулевой радиус, а $B(t, \varepsilon)$ обозначает открытый шар радиуса ε с центром в точке t.

Лемма 1. *Пусть* $Z \in M_n(A)$ *и* $Z > E$. *Тогда существует замкнутый шар* $B_1 = \overline{B}(t_0, \varepsilon_1) \subset K$, *число* $s \in \mathbb{N}$, *ортопроекторы* $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_s \in M_n(A)$ *и действительные непрерывные функции* $\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)$ *такие, что для* $t \in B_1$ *верно разложение*

$$Z(t) = \mu_1(t)\mathbb{P}_1 + \ldots + \mu_s(t)\mathbb{P}_s,$$

и для любого $t \in K$ $\mathbb{P}_i(t)\mathbb{P}_j(t) = 0$, $i \neq j$.

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение для $Z(t)$:

$$\det(\lambda E - Z(t)) = \lambda^n + u_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + u_n(t).$$

Все собственные значения $Z(t)$: $\lambda_1(t) \geq \ldots \geq \lambda_n(t)$ — непрерывные функции по t.

Далее, при каждом фиксированном t число различных собственных значений $l(t)$ матрицы $Z(t)$ не превышает n. Поэтому существует $t_0 \in K$ такое, что $l(t_0) \geq l(t)$, $t \in K$, т. е. максимально. В точке t_0 некоторые λ_i могут совпадать:

$$\lambda_1(t_0) = \lambda_2(t_0) = \ldots = \lambda_{m_1}(t_0) > \lambda_{m_1+1}(t_0) = \ldots = \lambda_{m_1+m_2}(t_0) \ldots$$
$$\ldots > \lambda_{m_1+\ldots+m_{l(t_0)-1}+1}(t_0) = \ldots = \lambda_n. \tag{1}$$

Рассмотрим $Z(t)$ в окрестности точки t_0. В силу непрерывности λ_i знаки неравенства для $\lambda_i(t)$ в (1) при t из некоторого открытого множества Ω не изменятся. Но $l(t_0)$ — максимальное число различных собственных значений. Поэтому не изменятся и знаки равенства в (1) при $t \in \Omega$. Введем новые обозначения: пусть $s = l(t_0)$, $B_1 = \overline{B}(t_0, \varepsilon_1)$ — замкнутый шар и $B_1 \subset \Omega$, $\mu_1(t) > \mu_2(t) > \ldots > \mu_s(t) > 1$ — собственные числа $Z(t)$, $t \in B_1$, с кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_s$,

$$H_j(\mu)(t) = \frac{\det(\mu E - Z(t))}{(\mu - \mu_j(t))^{m_j} \prod_{i \neq j} (\mu_j(t) - \mu_i(t))^{m_i}}, \qquad t \in B_1,$$

— полиномы по μ. Тогда $H_j(Z(t)) = P_j(t)$ — ортопроекторы при $t \in B_1$, а так как H_j являются полиномами, то элементы матриц $P_j(t)$ будут непрерывными функциями по t на множестве B_1. Также для любого $t \in B_1$ выполняется условие $P_i(t)P_j(t) = 0$, $i \neq j$. Зададим значения новых матриц-функций $\mathbb{P}_j(t)$, $j = 1, \ldots, s$, на всем K по принципу расширения:

$$\mathbb{P}_j(t) = \begin{cases} P_j(t), & |t-t_0| \le \varepsilon_1; \\ P_j\left(\dfrac{(t-t_0)\varepsilon_1}{|t-t_0|} + t_0\right), & |t-t_0| > \varepsilon_1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\mathbb{P}_j \in M_n(A)$ и $\mathbb{P}_i\mathbb{P}_j = 0$, $i \ne j$. Значит, существует локальное разложение

$$Z(t) = \mu_1(t)\mathbb{P}_1(t) + \ldots + \mu_s(t)\mathbb{P}_s(t), \quad t \in B_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $Z \in M_n(A)$ *и* $Z > E$. *Тогда существует замкнутый шар* $B \subset K$ *ненулевого радиуса и* $U \in M_n(A)$, $U^* = U^{-1}$ *такие, что для* $t \in B$ *матрица* $U^* ZU(t)$ — *диагональная.*

***Замечание* 4.** В формулировках лемм 1 и 2 можно опустить условие $Z > E$ (достаточно чтобы элемент Z был самосопряжен), а также во всех утверждениях заменить единичный шар K из $\mathbb{R}^k$ любым компактом, содержащим внутреннюю точку.

Доказательство. Достаточно диагонализовать ортопроектор $\mathbb{P}_1(t) \in M_n(A)$ для t из некоторого множества B_3, а потом применить лемму 1. Это хорошо видно из следующего примера.

Пример. Пусть $p, q \in M_n(\mathbb{C})$ — ортопроекторы, $pq = 0$. Пусть также

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $pq = qp = 0$, то $q_{1i} = q_{i1} = 0$ и существует унитарная матрица

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

такая, что $U^* pU$ и $U^* qU$ — диагональны.

Итак, пусть $\mathbb{P}_1(t)$ — ортопроектор, $\mathbb{P}_1(t) \in M_n(A)$. Если $t_0 \in K$, m_1 — след матрицы $\mathbb{P}_1(t_0)$, то существует целочисленная унитарная матрица $V \in M_n(\mathbb{C})$ такая, что у матрицы $V^*\mathbb{P}_1(t_0)V$ первые m_1 строк линейно независимы. В силу непрерывности элементов из $\mathbb{P}_1(t)$ существует замкнутый шар B_1 такой, что для $t \in B_1$ у матрицы $V^*\mathbb{P}_1(t)V$ первые m_1 строк линейно независимы. Обозначим эти строки как векторы $\vec{p}_1(t), \ldots, \vec{p}_{m_1}(t)$. Если мы сумеем диагонализовать $V^*\mathbb{P}_i(t)V$, $i = 1, \ldots, n$, то диагональное разложение для $\mathbb{P}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, тоже реализуется. Поэтому, не ограничивая общности, положим $V = E$. Применим процесс ортогонализации и нормирования Грамма – Шмидта к системе $\left\langle \vec{p}_1(t), \ldots, \vec{p}_{m_1}(t) \right\rangle$. Заметим, что процесс непрерывен, т. е. существует система ортонормированных векторов $\left\langle \vec{u}_1(t),\ldots,\vec{u}_{m_1}(t)\right\rangle$ с непрерывными в B_1 координатами и при каждом $t \in B_1$ линейная оболочка системы $\left\langle \vec{p}_1(t),\ldots,\vec{p}_{m_1}(t)\right\rangle$ совпадает с линейной оболочкой системы $\left\langle \vec{u}_1(t),\ldots,\vec{u}_{m_1}(t)\right\rangle$. Построим аналогичную систему для ортопроектора $(E(t)-\mathbb{P}_1(t))$. А именно: в матрице $(E(t_0)-\mathbb{P}_1(t_0))$ есть $n-m_1$ линейно независимых строк. Из-за непрерывности $\mathbb{P}_1$ они линейно независимы в B_2. Обозначим эти строки $\vec{p}_{m_1+1}(t),\ldots,\vec{p}_n(t)$, $t \in B_2$, и построим ортонормированную систему $\left\langle \vec{u}_{m_1+1}(t),\ldots,\vec{u}_n(t)\right\rangle$ с непрерывными в B_2 координатами. Пусть $B_3 = \overline{B}(t_3, \varepsilon_3) \subset K$ — замкнутый шар, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, тогда для $t \in B_3$ определена нормированная система $\left\langle \vec{u}_1(t),\ldots,\vec{u}_n(t)\right\rangle$, которая состоит из ортогональных единичных векторов ($\vec{u}_1(t)$ ортогонален $\vec{u}_n(t)$, поскольку $\vec{u}_1(t) \in \operatorname{Im}\mathbb{P}_1(t)$, $\vec{u}_n(t) \in \operatorname{Ker}\mathbb{P}_1(t)$). Здесь мы задаем шары B_1, B_2 как окрестности точки t_0, поэтому определение шара B_3 корректно. Определим унитарный оператор $\mathbb{U} \in M_n(A)$:

$$\mathbb{U}(t) = \begin{cases} [\bar{u}_1(t)\ldots\bar{u}_n(t)], & |t-t_3| \le \varepsilon_3; \\ \mathbb{U}\left(\dfrac{(t-t_3)\varepsilon_3}{|t-t_3|}+t_3\right), & |t-t_3| > \varepsilon_3, \end{cases}$$

где $[\bar{u}_1(t)\ldots\bar{u}_n(t)]$ — матрица, составленная из вектор-столбцов $\vec{u}_1(t),\ldots$ $\ldots,\ \vec{u}_n(t)$. В силу построения

$$\forall t \in B_3 \qquad U^*(t)\mathbb{P}_1(t)U(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

что и завершает доказательство леммы.

Лемма 3. *Пусть* $Z(t) \in M_n(A)$. *Если*

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_{11}(t) & \ldots & z_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1}(t) & \ldots & z_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то существует $B \subset K$ *— замкнутый шар* $B = \overline{B}(t, \varepsilon)$ *такой, что при каждом* i, $1 \le i \le n$, *справедливо одно из утверждений (для любых* $t \in B$ *функция* $z_{1i}(t) = 0$) *или (для любых* $t \in B$ *функция* $z_{1i}(t) \neq 0$).

Доказательство леммы простое и мы его опускаем.

Продолжим доказательство теоремы 2. Применяя лемму 2, можно доказать, что $M_n(A) = C^*(X, Y)$, где X, Y — самосопряженные матрицы, и существует $B = \overline{B}(t_0, \varepsilon)$ — замкнутый шар из K такой, что при $t \in B$ матрица $X(t)$ — диагональна. А применяя лемму 3 к оператору Y, можно предположить, что в

B выполняется утверждение леммы 3 для первой строки матрицы Y. Определим унитарную диагональную матрицу U:

$$U(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \mu_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n(t) \end{pmatrix}, & |t-t_0| \le \varepsilon, \\ U\left(\dfrac{(t-t_0)\varepsilon}{|t-t_0|} + t_0\right), & |t-t_0| > \varepsilon, \end{cases},$$

где

$$\mu_i(t) = \begin{cases} |y_{1i}(t)|/y_{1i}(t), & y_{1i}(B) \ne 0; \\ 1, & y_{1i}(B) = 0, \end{cases}$$

$y_{ij}(t)$ — элементы матрицы $Y(t)$.

Тогда $U^* X U(t) = X(t)$, а $U^* Y U(t)$ — матрица с действительными функциями в первой строке, $t \in B$. Естественно, что $M_n(A) = C^*(X_1 = U^* X U,\ Y_1 = U^* Y U)$. Рассмотрим новую алгебру $A_1 = C(B)$ (алгебру непрерывных функций на B). Операторы X_1 и Y_1 можно сузить на B. Из утверждения $M_n(A) = C^*(X_1(t), Y_1(t), t \in K)$ следует $M_n(A_1) = C^*(X_1(t), Y_1(t), t \in B)$. Справедливы следующие равенства:

$$M_n(A_1) = C^*(X_1, Y_1) = C^*(X_1\ Y_1, M_n(\mathbb{C})\cdot E) =$$

$$= M_n(C^*(x_{ii}(t),\ i = 1,\ldots, n, \quad y_{ij}(t), \quad 1 \le i \le j \le n,\ t \in B).$$

Таким образом A_1 порождается $n + n + (n-1) + (n-1)(n-2) = n^2 + 1$ самосопряженными образующими. С другой стороны , известно (см., например, [3, с. 196; 4, с. 238]), что алгебра непрерывных функций $C(K_1)$, где $K_1 \subset \mathbb{R}^k$ — компакт, содержащий внутреннюю точку, не порождается меньше чем k самосопряженными образующими. Поэтому $n^2 + 1 \ge k$. Теорема 2 доказана.

1. *Topping D. M.* Lectures on von Neumann algebras. – Princeton: Van Nostrand, 1971. –112 p.
2. *Olsen C. L., Zame W. R.* Some C^*-algebras with a single generator // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – **215**. – P. 205 – 215.
3. *Александров П. С.* Комбинаторная топология. – М.: Гостехтеоретиздат, 1947. – 660 с.
4. *Наймарк И. М.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 668 с.

Одержано 18. 09. 98