УДК 512. 64

Б. З. Шаваровський (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

РОЗКЛАД МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ В ПРЯМУ СУМУ ТРИКУТНИХ ДОДАНКІВ

By using transformations $SA(x)R(x)$, where S and $R(x)$ are invertible matrices, we reduce a polynomial matrix $A(x)$ whose elementary divisors are pairwise relatively prime to the direct sum of nonreducible triangle summands with invariant factors on principal diagonal.

Многочленна матриця $A(x)$, елементарні дільники якої попарно взаємно прості, перетвореннями $SA(x)R(x)$, де S, $R(x)$ – оборотні матриці, зводиться до прямої суми незвідних трикутних доданків з інваріантними множниками на головних діагоналях.

В даній статті продовжено вивчення напівскалярної еквівалентності многочленних матриць, започатковане П. С. Казімірським і В. М . Петричковичем спільно ще в 1976 році [1] (див. також [2 – 4]). Як відомо, задача класифікації матриць відносно напівскалярної еквівалентності в цілому є досить складною, тому її розв'язання в даний час можливе лише в часткових випадках. Зокрема, ця задача досліджувалась в двох випадках, а саме: 1) при відсутності в матриці кратних характеристичних коренів [5, 6]; 2) при наявності в матриці лише одного елементарного дільника [7, 8]. Мета даної роботи — зведення многочленної матриці з попарно взаємно простими елементарними дільниками до блочно-діагонального вигляду напівскалярно еквівалентними перетвореннями.

Нехай P — алгебраїчно замкнене поле нульової характеристики, $P_n[x]$ — кільце матриць розмірності $n \times n$ над $P[x]$. Нагадаємо [2, 3], що матриці $A(x)$, $B(x) \in P_n[x]$ називаються напівскалярно еквівалентними (нпс. е., в позначеннях $A(x) \sim B(x)$), якщо $B(x) = SA(x)R(x)$ для деяких матриць $S \in GL_n(P)$, $R(x) \in GL_n(P[x])$. Будемо використовувати поняття значення матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\Delta(x) = (x-\alpha_1)^{p_1} \dots (x-\alpha_t)^{p_t}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, і відповідне позначення $M_{G(x)}(\Delta)$. За означенням із [3]

$$M_{G(x)}(\Delta) = \left\| \begin{matrix} H_1 \\ \vdots \\ H_t \end{matrix} \right\|, \quad H_j = \left\| \begin{matrix} G(\alpha_j) \\ G^{(1)}(\alpha_j) \\ \vdots \\ G^{(p_j-1)}(\alpha_j) \end{matrix} \right\|, \quad j = 1, \dots, t,$$

$G^{(m)}(x)$ — m-та похідна матриці $G(x)$. Оскільки матриця $M_{G(x)}(\Delta)$ залежить від нумерації коренів многочлена $\Delta(x)$, то її позначають також через $M_{G(x)}[\alpha_1^{(p_1)}, \dots, \alpha_t^{(p_t)}]$.

Розглянемо матрицю $A(x) \in P_n[x]$, елементарні дільники якої попарно взаємно прості. Нехай $A_*(x)$ і $\Delta(x)$ — її відповідно приєднана матриця і характеристичний многочлен: $A_*(x) = \operatorname{adj} A(x)$, $\Delta(x) = \det A(x)$. Нехай також $r = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta)$ і $\Delta(x) = (x-\alpha_1)^{p_1} \dots (x-\alpha_t)^{p_t}$ — канонічний розклад $\Delta(x)$. На підставі [2] $A(x)$ нпс. е. до матриці вигляду

$$A_0(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n-1} & \\ \hline a_1(x) \dots a_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|, \tag{1}$$

де $\deg a_s < \deg \Delta$, $s = 1, \dots, n-1$, E_{n-1} — одинична матриця порядку $n-1$. Тут і далі незазначені елементи матриці рівні нулеві. В множині рядків $\overline{b}(x) =$

$= \overline{a}(x)B$, де $\overline{a}(x) = \left\| a_1(x) \ldots a_{n-1}(x)\, 1 \right\|$, $B \in GL_n(P)$, зафіксуємо такий, щоб матриця $M = M_{\overline{b}(x)}[\alpha_1^{(p_1)}, \ldots, \alpha_t^{(p_t)}]$ містила r перших рядків матриці E_n. Щоб знайти потрібну матрицю B, досить в матриці $M_{\overline{a}(x)}[\alpha_1^{(p_1)}, \ldots, \alpha_t^{(p_t)}]$ вибрати r лінійно незалежних рядків, доповнити підматрицю з цих рядків до оборотної Q і покласти $B = Q^{-1}$. Оскільки, згідно з твердженням 4 §2 р. II [3], $\operatorname{rang} M_{\overline{a}(x)}(\Delta) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = r$, то така матриця Q існує. Підматриці

$$\left\| \begin{matrix} \overline{b}(\alpha_j) \\ \overline{b}^{(1)}(\alpha_j) \\ \vdots \\ \overline{b}^{(p_j-1)}(\alpha_j) \end{matrix} \right\|, \quad j = 1, \ldots, t,$$

матриці M будемо називати її смугами. Система смуг називається зв'язаною, якщо існує така їх послідовність, що в кожній з наступних знайдеться рядок, зв'язаний з деяким рядком попередніх смуг. Два рядки однакової довжини називаються зв'язаними, якщо існує номер i такий, що i-ті елементи цих рядків одночасно відмінні від нуля. Перестановками смуг зведемо матрицю M до матриці

$$\tilde{M} = \left\| \begin{matrix} M_1 \\ \vdots \\ M_k \end{matrix} \right\|, \quad 1 \le k \le r, \tag{2}$$

де підматриці M_i, $i = 1, \ldots, k$, попарно не зв'язані* і кожна з них містить ціле число смуг, система яких зв'язана. Тим самим ми отримуємо розклад многочлена $\Delta(x)$ на попарно взаємно прості множники:

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \ldots \Delta_k(x), \quad ((\Delta_i(x), \Delta_j(x)) = 1, \quad i \ne j, \tag{3}$$

так, що $M_i = M_{\overline{b}(x)}(\Delta_i)$.

Твердження. *Розклад* (3) *характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *класом* $\{SA(x)R(x)\}$ *нпс. е. матриць визначається однозначно з точністю до числових множників многочленів* $\Delta_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$.

Доведення. Нехай матриця $A_0(x)$ (1) нпс. е. до деякої іншої матриці того ж вигляду з останнім рядком $\left\| a_1'(x) \ldots a_{n-1}'(x)\ \Delta(x) \right\|$, $\deg a_s' < \deg \Delta$, $s = 1, \ldots, n-1$. За цими матрицями для деякого розкладу $\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$, $(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 1$, побудуємо матриці

$$N = \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right\|, \quad N' = \left\| \begin{matrix} N_1' \\ N_2' \end{matrix} \right\|,$$

кожна з яких містить r перших рядків матриці E_n і $N_j = M_{\overline{b}(x)}(\varphi_j)$, $N_j' = M_{\overline{b}'(x)}(\varphi_j)$, $\overline{b}(x) = \left\| a_1(x) \ldots a_{n-1}(x)\ 1 \right\| B$, $\overline{b}'(x) = \left\| a_1'(x) \ldots a_{n-1}'(x)\ 1 \right\| B'$, $j = 1, 2$, $B, B' \in GL_n(P)$. Якщо підматриці N_1 і N_2 не зв'язані і $\operatorname{rang} N_j = r_j$, $j = 1, 2$, то $r_1 + r_2 = r$ і з урахуванням твердження 4 §2 р.II [3] $\operatorname{rang} N_j' = r_j$, $\operatorname{rang} N' = r$. Тому із r перших рядків матриці E_n, що є в матриці N', рівно r_j

*Дві матриці називаються зв'язаними, якщо деякий рядок однієї з них зв'язаний з деяким рядком іншої.

міститься в N'_j, $j = 1, 2$, Отже, підматриці N'_1 і N'_2 також не зв'язані. З наведених міркувань і випливає потрібне твердження.

Будемо говорити, що матриця є звідною, якщо нпс. е. перетвореннями вона зводиться до прямої суми доданків менших порядків. В протилежному випадку називатимемо матрицю незвідною.

Теорема. *Матриця* $A(x)$ *незвідна, якщо числа* $r = \operatorname{rang} M$ *і кількість* k *попарно не зв'язаних підматриць* M_i *матриці* $\tilde{M}$ *вигляду* (2) *є відповідно максимально і мінімально можливими, тобто* $r = n$, $k = 1$. *В протилежному випадку матриця* $A(x)$ *звідна, причому* $A(x) \sim E_{n-r} \oplus C_1(x) \oplus \ldots \oplus C_k(x)$, *де*

$$C_i(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n_i-1} & \\ \hline c_{1i}(x) \ldots c_{n_i-1i}(x) & \Delta_i(x) \end{array} \right\|,$$

$\Delta_i(x)$ — (*унітальні*) *множники розкладу* (3), $n_i = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta_i)$. *Прямі доданки* $C_i(x)$ *незвідні і визначаються матрицею* $A(x)$ *з точністю до нпс. е.*

Доведення. Нехай $r = n$, $k = 1$. Припустимо спочатку, що $A(x) \sim E_l \oplus \oplus A_1(x)$, $l \geq 1$. Тоді на основі згадуваного твердження 4 §2 р.II [3] $n = = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = \operatorname{rang} M_{A_{1*}(x)}(\Delta) \leq n - l$, що неможливо.

Далі, нехай $A(x) \sim A_1(x) \oplus A_2(x)$, де $A_j(x)$ — матриця розмірності $n_j \times n_j$ над $P[x]$, $1 \leq n_j < n$; $\det A_j(x) = \varphi_j(x)$, $j = 1, 2$; $(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 1$; $n_1 + n_2 = n$. Розглянемо підматриці $N_j = M_{\overline{b}(x)}(\varphi_j)$, $j = 1, 2$, матриці M. Оскільки $\operatorname{rang} N_j = = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi_j) = \operatorname{rang} M_{A_{j*}(x)}(\varphi_j) = n_j$, то із n рядків матриці E_n, що наявні в M, рівно n_j міститься в N_j. Тому кожна з підматриць N_j містить рівно $n - n_j$ нульових стовпців, причому множини номерів ненульових стовпців цих підматриць не перетинаються. Отже, підматриці N_1 N_2 не зв'язані, що суперечить умові зв'язності смуг матриці M $(k = 1)$.

Нехай тепер виконується хоча б одна з нерівностей: $r < n$, $k > 1$. Тоді за матрицею $\tilde{M}$ вигляду (2) отримуємо розбиття рядка $\overline{b}(x)$ на k підрядків $\overline{b}_i(x)$ довжини n_i, $i = 1, \ldots, k$; $n_1 + \ldots + n_k = r$, і нульовий рядок довжини $n - r$. А саме, якщо позначити через $\tilde{M}_i$ підматрицю матриці M_i, складену з всіх її n_i ненульових стовпців, то $\tilde{M}_i = M_{\overline{b}_i(x)}(\Delta_i)$. Отже, рядки $\overline{b}(x)$, $\left\| \overline{b}_1(x) \ldots \overline{b}_k(x)\ \overline{0} \right\|$ різняться, можливо, лише розміщенням елементів і

$$\overline{b}_i(x) \equiv \overline{0} \pmod{\Delta(x)/\Delta_i(x)}, \qquad i = 1, \ldots, k \tag{4}$$

($\overline{0}$ – нульовий рядок потрібної довжини). З вигляду та визначення рядків $\overline{a}(x)$, $\overline{b}(x)$ випливає існування лінійної комбінації елементів рядка $\overline{b}(x)$, тотожно рівної 1. Це означає, що $\overline{b}_1(x)\overline{a}_1^T + \ldots + \overline{b}_k(x)\overline{a}_k^T = 1$, де $\overline{a}_i$ — числовий рядок довжини n_i, T — операція транспонування. Зважаючи на конгруенції (4), робимо висновок, що $\overline{a}_i \neq \overline{0}$, $i = 1, \ldots, k$. Тому нехай q_i — номер ненульового елемента рядка $\overline{a}_i$. Викресленням q_i-го елемента рядка $\overline{b}_i(x)$ і зведенням решти його елементів за модулем $\Delta_i(x)$ отримуємо рядок $\overline{c}_i(x) = = \left\| \overline{c}_{1i}(x) \ldots \overline{c}_{n_i-1i}(x) \right\|$, $\deg c_{li} < \deg \Delta_i$, $l = 1, \ldots, n_i - 1$, $i = 1, \ldots, k$. Далі побудуємо пряму суму $C(x) = E_{n-r} \oplus C_1(x) \oplus \ldots \oplus C_k(x)$, де

$$C_i(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n_i-1} & \\ \hline c_{1i}(x) \ldots c_{n_i-1i}(x) & \Delta_i(x) \end{array} \right\|, \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{5}$$

і покажемо, що $C(x) \sim A(x)$. Доведення цього факту досить провести для

$k=2$. Оскільки $(\Delta_1(x), \Delta_2(x)) = 1$, то існують $u_1(x)$, $u_2(x) \in P[x]$ такі, що $u_1(x)\Delta_1(x) + u_2(x)\Delta_2(x) = 1$, $\deg u_1 < \deg \Delta_2$, $\deg u_2 < \deg \Delta_1$. Тому

$$C(x) \sim \left(E_{n-r} \oplus \left\| \begin{array}{cc|cc} E_{n_1-1} & & & \\ \hline \overline{c}_1(x) & \Delta_1(x) & \overline{c}_2(x) & \Delta_2(x) \\ \hline & & E_{n_2-1} & \\ \cline{3-4} & & \overline{c}_2(x & \Delta_2(x) \end{array} \right\| \right) \times$$

$$\times \left(E_{n-n_2-1} \oplus \left\| \begin{array}{ccc} u_1(x) & & -\Delta_2(x) \\ & \boxed{E_{n_2-1}} & \\ u_2(x) & & \Delta_1(x) \end{array} \right\| \right) \sim$$

$$\sim E_{n-r} \oplus \left\| \begin{array}{c|c} E_{r-1} & \\ \hline d_1(x) \ldots d_{r-1}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\| = D(x),$$

де $d_l(x) \equiv c_{l1}(x)\Delta_2(x)u_2(x) (\operatorname{mod} \Delta(x))$, $l = 1,\ldots, n_1 - 1$, $d_{n_1}(x) = \Delta_2(x)u_2(x)$, $d_{n_1+j}(x) \equiv c_{j2}(x)\Delta_1(x)u_1(x)(\operatorname{mod} \Delta(x))$, $j = 1,\ldots, n_2 - 1$. Враховуючи вигляд та спосіб побудови рядків $\overline{a}(x)$, $\overline{b}(x)$, $\overline{c}_1(x)$, $\overline{c}_2(x)$, переконуємось, що $D(x) \sim$ $\sim A_0(x) \sim A(x)$.

Щоб впевнитись у незвідності кожного доданка $C_i(x)$ матриці $C(x)$, досить взяти до уваги зв'язність систем смуг кожної з підматриць M_i.

З'ясуємо, накінець, питання єдиності побудованої тут прямої суми. Зрозуміло, що число прямих доданків $C_i(x)$, їх порядки та характеристичні многочлени визначаються матрицею $A(x)$ однозначно. Нехай тепер $E_{n-r} \oplus C_1(x) \oplus \ldots$ $\ldots \oplus C'_k(x) \sim E_{n-r} \oplus C'_1(x) \oplus \ldots \oplus C'_k(x)$, де $C_i(x)$, $C'_i(x)$ — матриці вигляду (5) однакових порядків і $\det C_i(x) = \det C'_i(x) = \Delta_i(x)$; $i = 1,\ldots, k$. Покажемо, що $C_i(x) \sim C'_i(x)$. Доведення досить провести для $k = 2$. Для цього перейдемо в очевидній рівності

$$S\big(E_{n-r} \oplus C_1(x) \oplus C_2(x)\big) = \big(E_{n-r} \oplus C'_1(x) \oplus C'_2(x)\big)R(x), \tag{6}$$

де $R(x)$ — оборотні матриці, до приєднаних матриць. З отриманої рівності, зобразивши приєднані матриці $S_*, R_*(x)$ у блочному вигляді

$$S_* = \left\| \begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline S_1 & * & * \\ \hline S_2 & S_3 & * \end{array} \right\|, \qquad R_*(x) = \left\| \begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline R_1(x) & * & * \\ \hline R_2(x) & R_3(x) & * \end{array} \right\|,$$

узгодженому з блочно-діагональним виглядом матриць із (6), можемо записати $\Delta_2(x)C_{1*}(x)S_1 = \Delta(x)R_1(x)$, $\Delta_1(x)C_{2*}(x)S_2 = \Delta(x)R_2(x)$, $\Delta_1(x)C_{2*}(x)S_3 =$ $= \Delta_2(x)R_3(x)C'_{1*}(x)$. Звідси випливає, що блоки S_1, S_2, S_3, $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ нульові, оскільки $(\Delta_1(x), \Delta_2(x)) = 1$ і $\operatorname{rang} M_{C_{i*}(x)}(\Delta_i) = n_i$, $i = 1, 2$. А це означає, що матриці S, $R(x)$ — блочно-трикутні, так що $C_i(x) \sim C'_i(x)$, $i = 1, 2$. Теорему доведено.

1. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* К выделению из полиномиальной матрицы линейного множителя с заданной системой инвариантных многочленов // III Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей (Тарту, 21 – 24 сент. 1976 г.): Тез. докл. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.

2. *Казімірський П.* С., *Петричкович В. М*. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61 – 66.
3. *Казімірський П.* С. Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Baratchart L.* Un theoreme de factorisation et son application a la representation des systemes cyclique causaux // C. r. Acad. sci. Ser. 1. – 1982. – **295**, № 3. – P. 223 – 226.
5. *Шаваровский Б.* З. Полускалярная эквивалентность полиномиальных матриц с попарно различными корнями их характеристического многочлена // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 19. – С. 33 – 37.
6. *Казимирский П. С., Мельник О. М.* Подобие и строение унитальных матричных квадратных трехчленов // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **175**. – С. 63 – 68.
7. *Шаваровский Б.* З. Каноническая форма многочленной матрицы с одним элементарным делителем относительно полускалярно эквивалентных преобразований // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – №10. – С. 33 – 35.
8. *Билонога Д. М.* Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с одним элементарным делителем. – Львов, 1992. – 57 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т прикл. пробл. механики и математики; 8 – 91).

Одержано 02. 06. 97,
після доопрацювання – 01. 08. 97