УДК 519.21

**В. А. Гасаненко** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ПОЛНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕБЫВАНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА В ТОНКИХ ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

We investigate a diffusion process $\xi(t)$ with absorption defined in a thin domain $D_\varepsilon = \{(x, t): \varepsilon G_1(t) < x < \varepsilon G_2(t),\ t \geq 0\}$. We obtain the complete decomposition of probability of containment of $\xi(t)$ in $D_\varepsilon$ with respect to $\varepsilon \to 0$.

Досліджується дифузійний процес з поглинанням $\xi(t)$, визначений у вузькій області: $D_\varepsilon = \{(x, t): \varepsilon G_1(t) < x < \varepsilon G_2(t),\ t \geq 0\}$. Отримано повне розвинення, відносно $\varepsilon \to 0$, ймовірності перебування $\xi(t)$ в $D_\varepsilon$.

Хорошо известно, что задача малых уклонений диффузионного процесса может быть сведена к задаче асимптотического разложения решений определенных граничных задач для уравнений в частных производных с малым параметром. В работах [1, 3] использовалась такая редукция для получения главного члена в разложении вероятности пребывания диффузионного процесса в малом шаре. В [2, 4], исследуя граничную задачу для уравнения теплопроводности, автором получено полное разложение вероятности пребывания винеровского процесса в тонкой криволинейной полосе. Работа [5] посвящена формальному описанию двух схем получения полного асимптотического разложения вероятности пребывания диффузионного процесса в границах, зависящих от времени. Там же получены два различных представления главного члена этого разложения. Целью этой статьи есть реализация одной из этих схем и уточнение главного члена разложения.

Пусть даны две функции $G_1(t)$ (нижняя граница) и $G_2(t)$ (верхняя граница) такие, что

$$G_1(t) < G_2(t), \quad t \geq 0, \quad G_1(0) < 0 < G_2(0).$$

Рассмотрим случайный диффузионный процесс с поглощением $\xi(t)$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sigma(t, \xi(t))\,dw(t), \qquad \xi(0) = 0, \tag{1}$$

для всех $t$ таких, что $G_1(t) < \xi(t) < G_2(t)$ и $\xi(t) = G_i(t)$ для $t > t'$, если $\xi(t') = G_i(t')$.

Теорема из §22 [6] утверждает, что следующие условия достаточны для существования такого процесса:

1) $G_i(t)$ непрерывны при $t \geq 0$;

2) функции $a(t, x)$, $\sigma(t, x)$ определены в интервале $G_1(t) < x < G_2(t)$, непрерывны по $t$ и удовлетворяют условию Липшица по $x$: для некоторой ограниченной константы $K$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Будем изучать первый момент поглощения

$$\tau = \inf\{s: \xi(s) \notin D_s\}, \quad \text{здесь} \quad D_s = [G_1(s), G_2(s)], \quad \xi(0) = 0.$$

Рассмотрим преобразование области $D = \{(x, t): G_1(t) < x < G_2(t),\ t \geq 0\}$ в область с границами, независящими от времени $L = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0\}$, с верхней границей $G_2(t) = 1$ и нижней $G_1(t) = 0$.

Это преобразование можно сделать с помощью функции $f(t, x) = (x - G_1(t))/G(t)$, здесь $G(t) = G_2(t) - G_1(t)$, $x \in D_t$.

Таким образом, процесс $\eta = f(t, \xi(t))$ — процесс с поглощением в области $L$.

Получим для процесса $\eta(t)$ стохастическое дифференциальное уравнение. Пусть $p(t, x)$ — обратная функция для функции $f(t, x)$, так что $f(t, p(t, x)) = x$, $x \in [0, 1]$ и $p(t, f(t, y)) = y$, $y \in [G_1(t), G_2(t)]$.

Очевидно, что $p(t, x) = xG(t) + G_1(t)$, $x \in [0, 1]$.

Пусть функции $G_i(t)$, $i = 1, 2$, имеют первые ограниченные производные. Согласно формуле Ито процесс $\eta(t)$ — решение следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$d\eta(t) = \overline{a}(t, \eta(t))\,dt + \overline{\sigma}(t, \eta(t))\,dw(t), \qquad \eta(0) = -\frac{G_1(0)}{G(0)}. \tag{2}$$

Здесь

$$\overline{a}(t, x) = f_t(t, p(t, x)) + f_x(t, p(t, x))\,a(t, p(t, x)),$$

$$\overline{\sigma}(t, x) = f_x(t, p(t, x))\,\sigma(t, p(t, x)).$$

Условие непрерывности для границ гарантирует существование $\eta(t)$ как решения (2) с поглощением на границе области $L$.

Определим $\tau$ как момент поглощения процесса $\eta(t)$:

$$\tau = \inf\{s: \eta(s) \notin L\}, \qquad \eta(0) = y = -\frac{G_1(0)}{G(0)}.$$

Известно, что вероятность $P(\tau > T)$ равна $u(T, y)$, где $u(t, z)$, $0 \leq t \leq T$, $z \in [0, 1]$ — решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, z) = \overline{a}(T - t,\ z)\frac{\partial}{\partial z}u(t, z) + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2(T - t,\ z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u(t, z), \tag{3}$$

$$u(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1); \qquad u(t, 1) = u(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Далее рассмотрим узкую область

$$D_\varepsilon\colon D_\varepsilon = \{(x, t): \varepsilon G_1(t) < x < \varepsilon G_2(t),\ t \geq 0\}.$$

Теперь функция распределения определяется равенством $P(\tau_{\varepsilon, y} > T) = u_\varepsilon(T, y)$. Здесь $u_\varepsilon(t, z)$ — решение (3), если коэффициенты $\overline{a}$, $\overline{\sigma}$ зависят от параметра $\varepsilon$ следующим образом:

$$\overline{a}_\varepsilon(T - t,\ z) = -\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}z - \frac{\dot{g}_1(t)}{g(t)} + \varepsilon^{-1}\frac{a(T - t,\ \varepsilon(z\,g(t) + g_1(t)))}{g(t)},$$

$$\overline{\sigma}_\varepsilon(T-t,\ z) = \frac{a(T-t,\ \varepsilon(zg(t)+g_1(t)))}{g(t)\,\varepsilon}.$$

Здесь $g_i(t) = G_i(T-t),\ i = 1, 2;\ g(t) = g_2(t) - g_1(t)$.

Таким образом, для разложения $u_\varepsilon(T, y)$ надо получить разложение решения (3) с коэффициентами $\overline{a}_\varepsilon,\ \overline{\sigma}_\varepsilon^2$ в точке $(T, y)$. Это разложение получим методом исчерпывания. Для демонстрации метода вначале предположим, что функции $G_i(t),\ a(t,x),\ \sigma(t,x)$ — аналитические.

Положим

$$a_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k} a(T-t,\ 0); \quad \sigma_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\sigma^2(T-t,\ 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(T-t,\ \varepsilon(zg(t)+g_1(t))) &= \sum_{k\geq 0}\sigma_k(t)\,\varepsilon^k(zg(t)+g_1(t))^k, \\ \sigma^2(T-t,\ \varepsilon(zg(t)+g_1(t))) &= \sum_{k\geq 0}\sigma_k(t)\,\varepsilon^k(zg(t)+g_1(t))^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Сделаем регуляризирующее преобразование

$$u_\varepsilon(t,z) = \exp\left(\int_0^t \left(-\varepsilon^{-2}f(s) - \varepsilon^{-1}\varphi(s) + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\alpha_k(s)\right)ds\right)v_\varepsilon(t,z).$$

Позже будем опускать символы аргументов функций.

Для $v_\varepsilon$ получим задачу

$$\begin{gathered} -\varepsilon^{-2}fv_\varepsilon - \varepsilon^{-1}\varphi v_\varepsilon + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\alpha_k v_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t}v_\varepsilon = \\ = \overline{a}_\varepsilon(T-t,\ z)\frac{\partial}{\partial z}v_\varepsilon + \frac{1}{2}\overline{\sigma}_\varepsilon^2(T-t,\ z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_\varepsilon, \qquad (5) \\ v_\varepsilon(0,z) = 1, \quad z\in(0,1); \qquad v_\varepsilon(t,1) = v_\varepsilon(t,0) = 0, \quad t\in[0,T]. \end{gathered}$$

Решение (5) будем искать в виде следующей суммы:

$$u_\varepsilon(t,z) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k v_k(t,z). \tag{6}$$

Подставим (4) и (6) в (5). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ в правых и левых частях (4), определим систему задач для $v_k$ (6) с соответствующими граничными и начальными условиями.

Следующим равенством определим оператор $B(t),\ t\geq 0$, на функциях из класса $C^2(0,1)$

$$B(t)\psi(z) = -f(t)\psi(z) - \frac{\sigma_0(t)}{2g^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(z).$$

Теперь указанная система имеет вид

$$B(t)v_0 = 0, \quad v_0(t,0) = v_0(t,1) = 0; \quad v_0(0,z) = 1, \quad z\in(0,1);$$

$$B(t)v_1 = \frac{1}{2g^2}\sigma_1(zg+g_1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_0 + \frac{a_0}{g}\frac{\partial}{\partial z}v_0 + \varphi v_0;$$

$$v_1(t,0) = v_1(t,1) = 0; \quad v_1(0,z) = 1, \quad z\in(0,1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{7}$$

$$B(t)v_k = \frac{1}{2g^2}\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}(zg+g_1)^{k-l}\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_l - \frac{\dot g_1}{g}\frac{\partial}{\partial z}v_{k-2} +$$
$$+\frac{1}{g}\sum_{l=0}^{k-1}a_{k-1-l}(zg+g_1)^{k-1-l}\frac{\partial}{\partial z}v_l - \frac{\dot g}{g}z\frac{\partial}{\partial z}v_{k-2} - \frac{\partial}{\partial t}v_{k-2} + \varphi v_{k-1} + \sum_{l=1}^{k-2}\alpha_l v_{k-2-l};$$
$$v_k(t,0) = v_k(t,1) = 0; \quad v_k(0,z) = 0, \quad z\in(0,1), \quad 0\le t\le T.$$

Первая задача из (7) имеет решение тогда и только тогда, когда $-f(t)$ равен одному из собственных значений задачи

$$\frac{1}{2g^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}l(t,z) = \lambda\, l(t,z), \quad l(t,0) = l(t,1) = 0.$$

Собственные функции последней задачи имеют вид $\sin i\pi z$, $i\ge 1$. Тогда $f(t)=f_i(t)=(i\pi)^2\dfrac{\sigma_0(t)}{2g^2(t)}$, $i\ge 1$.

Таким образом, для каждого фиксированного собственного значения $f_i(t)$ получим отдельную систему (7). Сумма по $i$ всех решений $k$-й задачи из (7) есть коэффициент при $k$-й степени $\varepsilon$. Решение $k$-й задачи из (7) при условии $f(t)=f_i(t)$ обозначим через $v_{k,i}(t,z)$. Теперь общее решение имеет вид

$$u_\varepsilon(t,z) = \sum_{i\ge1}\exp\left(-\int_0^t\left(\varepsilon^{-2}f_i(x)+\varepsilon^{-1}\varphi_i(x)-\sum_{m\ge1}\varepsilon^m\alpha_{i,m}(x)\right)dx\right)\sum_{k\ge0}\varepsilon^k v_{k,i}(t,z). \tag{8}$$

Сумма $v_k(t,z)=\sum_{i\ge1}v_{k,i}(t,z)$ должна обеспечить граничные и начальные условия $k$-й задачи

$$v_0(0,z) = 1, \quad v_k(0,z) = 0, \quad k\ge1; \quad v_l(t,0) = v_l(t,1) = 0; \quad l\ge0.$$

Первая задача из (7) определяет решение всех последующих задач. Первая задача из (7) при фиксированном $i$ имеет решение $b_i(t)\sin i\pi z$. Функция $b_i(t)$ определяется из условий разрешимости следующих задач. Однако, используя начальное условие, можно уже сделать важное утверждение об этих функциях. Поскольку

$$1 = v_0(0,z) = \sum_{i\ge0}v_{0,i}(0,z) = \sum_{i\ge1}b_i(0)\,l_i(z),$$

то, используя обычный прием вычисления коэффициентов в последней сумме, получаем, что $b_i(0)=2\sqrt2/(\pi i)$, если $i$ — нечетное число, и $b_i(0)=0$, если $i$ — четное. В дальнейшем будем предполагать, что $b_i(t)\equiv0$, если $i$ — четное. Таким образом,

$$v_0(t,z) = \sum_{l\ge0}b_{2l+1}(t)\,l_{2l+1}(z).$$

Теперь система (7) при фиксированном $f_i(t)$, $i=2l+1$, $l\ge0$, имеет вид

$$B_i(t)\,v_{0,i} = 0, \quad v_{0,i}(0,z) = b_i(0)\sin i\pi z, \quad z\in(0,1), \quad v_{0,i}(t,1) = v_{0,i}(t,0) = 0;$$

$$B_i(t)\,v_{k,i} = \beta_{k,i}(t,z), \quad v_{k,i}(0,z) = v_{k,i}(t,1) = v_{k,i}(t,0) = 0, \quad k\ge1. \tag{$7_i$}$$

Здесь $B_i(t)$ получается из $B(t)$ после замены $f(t)$ на $f_i(t)$ и $\beta_{k,i}$ обозначает правые части (7) после замены $v_l$, $\varphi$, $\alpha_{l+1}$, $l \geq 0$ на $v_{l,i}$, $\varphi_i$, $\alpha_{l+1,i}$, $l \geq 0$.

Предположим, что имеем два множества функций $v_{k,i}$, $k \geq 0$, и $\tilde{v}_{k,i}$, $k \geq 0$, доставляющих решение $(7_i)$. Тогда разности $\hat{v}_{k,i} = v_{k,i} - \tilde{v}_{k,i}$, $k \geq 1$, также удовлетворяют некоторой системе. Операторные части этой системы совпадают с операторными частями $(7_i)$, а начальные граничные условия имеют следующий вид: $\hat{v}_{k,i}(0, z) = \hat{v}_{k,i}(t, 1) = \hat{v}_{k,i}(t, 0) = 0$ для всех $k \geq 0$. Из последнего и принципа максимума для такого рода задач имеем $\hat{v}_{k,i}(t, z) \equiv 0$, $k \geq 0$.

Таким образом, если существует решение $(7_i)$, то оно единственное.

Покажем, что частичные суммы из (8) доставляют аппроксимацию истинного решения.

Предположим, что мы построили функции $v_{0,i}(t, z), \ldots, v_{k,i}(t, z)$, $i = 2s + 1$, $s \geq 0$, как решение первых $k + 1$ задач системы $(7_i)$. Сделаем оценку аппроксимации.

Положим

$$\delta_i(\varepsilon, x) = \left( -\varepsilon^{-2} f_i(x) - \varepsilon^{-1}\varphi_i(x) + \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_{l,i}(x)\varepsilon^l \right),$$

$$u_{k,\varepsilon}(t, z) = \sum_{i=2s+1,\, s\geq 0} \exp\left\{ \int_0^t \delta_i(x)\,dx \right\} \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m v_{m,i}(t, z).$$

**Лемма.** *Пусть $k$-я и $(k+1)$-я производные от функции сноса $a(t, x)$ и функции диффузии $\sigma(t, x)$ соответственно существуют и ограничены в точке $(t, 0)$, $t \geq 0$. Тогда для $t > 0$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left| u_\varepsilon(t, z) - u_{k,\varepsilon}(t, z) \right| \leq K \varepsilon^{k+1} \exp\left( -\varepsilon^{-2} \int_0^t f_1(x)\,dx \right), \quad K < \infty.$$

***Доказательство.*** Сделаем замену переменных

$$u_\varepsilon = \exp\left( \int_0^t \delta_1(x)\,dx \right) \mu_\varepsilon.$$

Таким образом, $\mu_\varepsilon$ — решение следующей задачи:

$$-f_1\mu_\varepsilon - \varepsilon\varphi_1\mu_\varepsilon + \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_{l,1}\varepsilon^l \mu_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t}\mu_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{g}(\varepsilon(z\dot{g} + \dot{g}_1) - a(T-t,\, \varepsilon(zg+g_1)))\frac{\partial}{\partial t}\mu_\varepsilon -$$

$$-\frac{1}{2g^2}\sigma^2(T-t,\, \varepsilon(zg+g_1))\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mu_\varepsilon = 0,$$

$$\mu_\varepsilon(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1); \qquad \mu_\varepsilon(t, 1) = \mu_\varepsilon(t, 0) = 0.$$

Обозначим $\lambda_i(\varepsilon, x) = \delta_i(\varepsilon, x) - \delta_1(\varepsilon, x)$.

Далее $u_\varepsilon - u_{k,\varepsilon} = \exp\left(\int_0^t \delta_1(\varepsilon, x)\,dx\right) r_\varepsilon$, где

$$r_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \sum_{i\geq 1} \exp\left( \int_0^t \lambda_i(\varepsilon, x)\,dx \right) \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m v_{m,i}.$$

Из условий леммы можно получить следующие представления:

$$a(T-t,\, \varepsilon(zg+g_1)) = \sum_{l=0}^{k-1} a_l(t)\,(\varepsilon(zg+g_1))^l + \tilde{a}_k\,\varepsilon^k,$$

$$\tilde{a}_k := a_x^{(k)}\,(T-t,\, \theta_1(\varepsilon(zg+g_1)))\,\frac{(zg+g_1)^k}{(k)!};$$

$$\sigma^2(T-t,\, \varepsilon(zg+g_1)) = \sum_{l=0}^{k} \sigma_l(t)\,(\varepsilon(zg+g_1))^l + \tilde{\sigma}_{k+1}\,\varepsilon^{k+1},$$

$$\tilde{\sigma}_{k+1} := (\sigma^2)_x^{(k+1)}\,(T-t,\, \theta_2(\varepsilon(zg+g_1)))\,\frac{(zg+g_1)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad 0 \le \theta_1, \quad \theta_2 \le 1.$$

Здесь $r_\varepsilon$ — решение следующей задачи:

$$\varepsilon^2\,\delta_1(\varepsilon,t)\,r_\varepsilon + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}r_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{g}(\varepsilon(\dot{g}_1+zg) - a(T-t,\, \varepsilon(zg+g_1)))\frac{\partial}{\partial z}r_\varepsilon -$$

$$-\frac{1}{2g^2}\sigma^2(T-t,\, \varepsilon(zg+g_1))\frac{\partial^2}{\partial z^2}r_\varepsilon = f_1\sum_{i\ge1}\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,i} +$$

$$+\ \varepsilon\varphi_1\sum_{i\ge1}\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,i} -$$

$$-\ \varepsilon^2\sum_{m=1}^{k-2}\alpha_{m,1}(t)\varepsilon^m\sum_{i\ge1}\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,i} -$$

$$-\ \varepsilon^2\sum_{i\ge1}\lambda_i(\varepsilon,t)\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,i} -$$

$$-\ \varepsilon^2\sum_{i\ge1}\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m\frac{\partial}{\partial t}v_{m,i} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{g}\left(\varepsilon(\dot{g}_1+z\dot{g}) - \left(\sum_{l=0}^{k-1} a_l\,(\varepsilon(zg+g_1))^l + \tilde{a}_k\,\varepsilon^k\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{i\ge1}\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m\frac{\partial}{\partial z}v_{m,i} +$$

$$+\frac{1}{2g^2}\left(\sum_{l=0}^{k}\sigma_l(\varepsilon(gz+g_1))^l + \tilde{\sigma}_{k+1}\,\varepsilon^{k+1}\right)\times$$

$$\times\sum_{i\ge1}\exp\left(\int_0^t \lambda_i(\varepsilon,x)\,dx\right)\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_{m,i} =$$

$$= f_1\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,1} + \varepsilon\varphi_1\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,1} - \varepsilon^2\sum_{m=1}^{k-2}\alpha_{m,1}\,\varepsilon^m\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m v_{m,1} - \varepsilon^2\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^m\frac{\partial}{\partial t}v_{m,1} -$$

$$- \frac{\varepsilon}{g}\left(\varepsilon(\dot{g}_1 + z\dot{g}) - \sum_{l=0}^{k-1} a_l (\varepsilon g + g_1)^2 - \tilde{a}_k \varepsilon^k\right) \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial z} v_{m,1} +$$

$$+ \frac{1}{2g^2}\left(\sum_{l=0}^{k} \sigma_l(\varepsilon(zg + g_1))^l + \tilde{\sigma}_{k+1} \varepsilon^{k+1}\right) \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_{m,1} +$$

$$+ O\left(\exp\left(-\varepsilon^{-2}\int_0^t (f_2(x) - f_1(x))\, dx\right)\right) =: J_k(t),$$

$$r_\varepsilon(0, z) = 0, \quad z \in (0,1); \qquad r_\varepsilon(t, 1) = r_\varepsilon(t, 0) = 0.$$

Поскольку $v_{m,1}$, $1 \le m \le k$, удовлетворяют первым $k+1$ уравнениям системы $(7_i)$, нетрудно вычислить, что

$$J_k(t) = \varepsilon^{k+1} \varphi_1 v_{k,1} - \varepsilon^2 \sum_{s=k-1}^{2k-2} \varepsilon^s \sum_{m=1}^{k-2} \alpha_{m,1} v_{s-m,1} - \varepsilon^2 \sum_{m=k-1}^{k} \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial t} v_{m,1} -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{g}(\dot{g}_1 + z\dot{g}) \sum_{m=k-1}^{k} \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial z} v_{m,1} - \frac{\tilde{a}_k}{g} \varepsilon^{k+1} \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial z} v_{m,1} +$$

$$+ \frac{\tilde{\sigma}_{k+1}}{2g^2} \varepsilon^{k+1} \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_{m,1} + O\left(\exp\left(-\varepsilon^{-2}\int_0^t (f_2(x) - f_1(x))\, dx\right)\right).$$

Отсюда следует, что для $t \ge t_1 > 0$

$$J_k(t) = \varepsilon^{k+1} K_\varepsilon(t, z),$$

где

$$\max_{(t,z,\varepsilon)} |K_\varepsilon(t, z)| < C < \infty.$$

Сделаем замену переменных $r_\varepsilon = \exp(\lambda t) r_{\varepsilon,\lambda}$. Тогда $r_{\varepsilon,\lambda}$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\left(\lambda - f_1(t) - \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_{l,1} \varepsilon^l\right) r_{\varepsilon,\lambda} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} r_{\varepsilon,\lambda} + \frac{\varepsilon}{g}(\varepsilon(\dot{g}_1 + zg) - a(T - t, \varepsilon(zg + g_1))) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z} r_{\varepsilon,\lambda} - \frac{1}{2g^2} \sigma^2 (T - t,\ \varepsilon(zg_1 + g_1)) \frac{\partial^2}{\partial z^2} r_{\varepsilon,\lambda} = \varepsilon^{k+1} \exp(-\lambda t)\, K_\varepsilon(t, z), \qquad (9)$$

$$r_{\varepsilon,\lambda}(0, z) = 0, \quad z \in (0,1); \qquad r_{\varepsilon,\lambda}(t, 1) = r_{\varepsilon,\lambda}(t, 0) = 0.$$

Известно, что решение (9) существует и единственно. Получим априорную оценку $r_\varepsilon(t, z)$ в некоторой окрестности $Q \subset L$ точки $(T, y)$, использовав доказательство принципа максимума из [7]. Пусть точка $(t_0, z_0) \in Q$ — точка максимума функции $r_\varepsilon$ в окрестности $Q$ и $t_1 := \min\{t : (t, z) \in Q\}$. Тогда следующие соотношения выполняются в этой точке:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} r_{\varepsilon,\lambda} \le 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} r_{\varepsilon,\lambda} \ge 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} r_{\varepsilon,\lambda} = 0.$$

Теперь из последнего и (9), следуя [7], получаем оценку

$$r_{\varepsilon,\lambda}(t_1, z) \le \varepsilon^{k+1} \inf_{\lambda > f_0} \max\left\{0;\ \max\left(0;\ \frac{1}{\lambda - f_0} \max_Q \left(K_\varepsilon(t, z) \exp\left(\lambda(T - t_1)\right)\right)\right)\right\},$$

где

$$f_0 = \max_Q \left( f_1(x) + \varepsilon\varphi_1(x) - \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_{l,1}(x)\, \varepsilon^l \right).$$

Нижняя оценка для минимума $r_{\varepsilon,\lambda}$ получается аналогично:

$$r_{\varepsilon,\lambda}(t_1, z) \ge \varepsilon^{k+1} \sup_{\lambda > f_0} \min\left\{0;\ \min\left(0;\ \frac{1}{\lambda - f_0} \min_Q \left(K_\varepsilon(t, z) \exp\left(\lambda(T - t_1)\right)\right)\right)\right\}.$$

Таким образом, $\max\limits_{(t,z)\in Q} \left| r_{\varepsilon,\lambda}(t, z) \right| \le \varepsilon^{k+1} C_1 C$.

Этим завершается доказательство леммы.

Далее, опишем алгоритм решения системы $(7_i)$ и вычислим главный член разложения $P_\varepsilon(T) = P(\tau_\varepsilon > T)$.

Определим несколько функций:

$$\omega_{im} = \begin{cases} 0, & i+m \text{ — четное}, \\ 1, & i+m \text{ — нечетное}; \end{cases}$$

$$\gamma_i(t) = \frac{\sigma_1 (i\pi)^2 (g_1 + g_2)}{4g^2},$$

$$r_{mi}(t) = \left( \frac{2g\sigma_1 m i^3}{(m-i)^2 (m+i)^2} + \frac{a_0 g 4m}{\pi(m^2 - i^2)} \right) \frac{1}{\sigma_0 \pi^2 (m^2 - i^2)},$$

$$\Phi_i(t) = -\frac{\sigma_2}{2g^2}\left( (i\pi g_2)^2 - \frac{g}{2} \right) - \frac{\sigma_1}{g} \sum_{m\ge 0,\, m\ne i} \omega_{im} r_{im} \frac{2m^3 i}{(m-i)^2 (m+i)^2} -$$

$$- \frac{a_0}{g} \sum_{m\ge 0,\, m\ne i} \omega_{im} r_{im} \frac{2im}{m^2 - i^2} - \frac{a_1}{2} + \frac{\dot g}{2g}.$$

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $G_i(t)$, $i = 1, 2$, *имеют ограниченные первые производные.*

2. *Функции* $a(t, x)$, $\sigma(t, x)$ *непрерывны по* $t$ *и* $\sup\limits_{0\le t\le T} \left(|a_1(t)| + |\sigma_2(t)|\right) < \infty$.

*Тогда справедливо асимптотическое представление*

$$P_\varepsilon(T) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \exp\left( -\int_0^T \Phi_1(y)\, dy \right) \exp\left( -\int_0^T \left( \varepsilon^{-2} \frac{\pi^2 \sigma^2(x, 0)}{2G^2(x)} + \varepsilon^{-1} \gamma_1(x) \right) dx \right) \times$$

$$\times \sin\left( -\frac{G_1(0)}{G(0)} \pi \right) \left(1 + \varepsilon K_\varepsilon(T)\right), \quad \sup_{\varepsilon, T} K_\varepsilon(T) < \infty.$$

***Доказательство.*** Прежде всего, заметим, что существование равномерно ограниченных по $t \le T$ первых частных производных $a_x(t, \cdot)$, $\sigma_x(t, \cdot)$ в точке $x = 0$ гарантирует выполнение условия Липшица по $x$ из достаточного условия существования решения (1) для тонкой области $D_\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. Таким образом, условия 1 и 2 гарантируют существование единственного диффузионного процесса с поглощением $\xi_\varepsilon(t)$ в области $D_\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

Как следует из представления общего решения $u_\varepsilon$, для определения главного члена асимптотики нам достаточно вычислить функции $v_{0,1}(t,z)$, $\varphi_1(t)$.

Решение $k$-й задачи из $(7i)$, при фиксированном $i$-м значении $f_i(t)$, будем искать в виде следующей суммы:

$$v_{k,i}(t,z) = \sum_{m\geq 1} c_{m,k}^{(i)}(t)\, l_m(z). \tag{10}$$

Функция $v_{0,i}(t,z)$ имеет вид $v_{0,i} = b_i(t)\sin i\pi z$, $i = 2s+1$, $s \geq 0$. Для того чтобы определить функцию $b_i(t)$, рассмотрим следующие задачи.

Вычислим $v_{1,i}(t,z)$. Подставим выражение для $v_{1,i}(t,z)$ из (10) в операторную часть второй задачи из $(7_i)$. После этого умножим правую и левую части уравнения этой задачи на функцию $l_m(z)$ и проинтегрируем на интервале $[0, 1]$. Таким методом определим коэффициенты $c_{m,1}^{(i)}(t)$. Правая часть уравнения второй задачи из $(7_i)$ имеет следующий вид:

$$\beta_{1,i}(t,z) = \frac{\sigma_1(zg+g_1)}{2g^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_{0,i} + \frac{a_0}{g}\frac{\partial}{\partial z}v_{0,i} + \varphi_i v_{0,i}.$$

Теперь, если $m \neq i$, после несложных вычислений получим

$$c_{m,1}^{(i)}(t) = \frac{2g^2}{\sigma_0\left((m\pi)^2-(i\pi)^2\right)}\int_0^1 l_m(z)\,\beta_{1,i}(t,z)\,dz = b_i(t)\,\omega_{im}\,r_{im}. \tag{11}$$

В случае $m = i$ левая часть уравнения второй задачи из $(7_i)$ (как и всех последующих) равна нулю независимо от $c_{i,1}^{(i)}(t)$. Последнее определяет уравнение для $\varphi_i(t)$:

$$0 = \int_0^1 l_i(z)\,\beta_{1,i}(t,z)\,dz = b_i(t)\left(-\frac{\sigma_1(t)\,(i\pi)^2\,(g_2(t)+g_1(t))}{4g^2(t)} + \varphi_i(t)\right) = 0, \tag{12}$$

из которого получаем

$$\varphi_i(t) = \frac{\sigma_1(t)\,(i\pi)^2\,(g_2(t)+g_1(t))}{4g^2(t)}.$$

Коэффициент $c_{i,1}^{(i)}(t)$ равен константе $c_{i,1}^{(i)}$. Эта константа определяется из начального условия

$$v_1(0,z) = \sum_{i\geq 1} v_{1,i}(0,z) = \sum_{i\geq 1}\sum_{m\geq 1} c_{m,1}^{(i)}(0)\,l_m(z) = 0.$$

Из последнего вытекает, что $c_{i,1}^{(i)}(0) = -\sum_{j\neq i} c_{i,1}^{(j)}(0)$. Учитывая (11) и тот факт, что $i$ нечетно, нетрудно убедиться в тождестве $c_{i,1}^{(i)} \equiv 0$.

Далее, определим функцию $b_i(t)$. Обозначим правую часть третьей задачи из $(7_i)$ через $\beta_{2,i}(t,z)$. Эта функция ортогональна к $l_i(z)$, последнее условие приводит к уравнению для $b_i(t)$:

$$\int_0^1 l_i(z)\,\beta_{2,i}(t,z)\,dz = b_i(t)\,\Phi_i(t) - \dot{b}_i(t) = 0.$$

Отсюда

$$b_i(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi i}\exp\left(-\int_0^t \Phi_i(x)\,dx\right).$$

Таким образом, мы построили все необходимые функции для определения главного члена асимптотического разложения. Оценка приближения следует из леммы. Теорема доказана.

Теперь опишем процедуру вычисления следующих членов асимптотического разложения. В условиях достаточной гладкости коэффициентов сноса и диффузии построение $v_{k,i}$, $k \geq 2$, для фиксированного $i$ выполняется одной и той же процедурой. Предположим, что функции $v_{l,i}$, $l \leq k-1$; $\alpha_{m,i}$, $m \leq k-3$; $\varphi_i$ уже построены. Сделаем следующий шаг и построим $v_{k,i}$ и $\alpha_{k-2,i}$.

Сначала определим $\alpha_{k-2,i}$. Правую часть задачи для определения $v_{k,i}$ из системы $(7_i)$ обозначим через $\beta_{k,i}(t,z)$. Как следует из $(7_i)$, справедливо представление $\beta_{k,i} = \tilde{\beta}_{k,i} + \alpha_{k-2,i}\, v_{0,i}$. Здесь выражение $\tilde{\beta}_{k,i}(t,z)$ содержит уже определенные функции. Функция $\beta_{k;i}$ ортогональна к $l_i(z)$, откуда получаем уравнение для $\alpha_{k-2,i}(t)$:

$$0 = \int_0^1 \tilde{\beta}_{k,i}(t,z)\, l_i(z)\,dz + \alpha_{k-2,i}(t)\, b_i(t) = 0\,.$$

Поскольку $b_i(t) \neq 0$ $\forall\, t \geq 0$, $i = 2s+1$, $s \geq 0$, то из последнего уравнения корректно определяем $\alpha_{k-2,i}(t)$ в виде

$$\alpha_{k-2,i}(t) = -\, b_i^{-1}(t)\int_0^1 \tilde{\beta}_{k,i}(t,z)\,dz\,.$$

Таким образом, $\beta_{k,i}(t,z)$ определена полностью. Далее, имея в виду представление (10), вычисляем коэффициенты $c_{m,k}^{(i)}(t)$ в случае, когда $m \neq i$:

$$c_{m,k}^{(i)}(t) = \frac{2g^2}{\sigma_0\left((m\pi)^2 - (i\pi)^2\right)}\int_0^1 l_m(z)\,\beta_{k,i}(t,z)\,dz\,.$$

Наконец, используя начальное условие $v_k(0,z) = 0$, вычисляем еще неопределенный коэффициент

$$c_{i,k}^{(i)}(t) = c_{i,k}^{(i)} = -\sum_{j \neq i} c_{i,k}^{(i)}(0)\,.$$


1. *Fujita T., Kotani S.* The Onsager – Mashlup function for diffusion processes // J. Math. Kyoto Univ. – 1982. – **22**. – P. 131 – 153.
2. *Гасаненко В. А.* Винеровский процесс в тонкой области // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 225 – 229.
3. *Zeitouni O.* On the Onsager – Mashlup functional of diffusion processes around non $C^2$ curves // Ann. Probab. – 1989. – **17**. – P. 1037 – 1054.
4. *Гасаненко В. А.* Винеровский процесс в криволинейной полосе // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 561 – 563.
5. *Гасаненко В. А.* Малі відхилення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у трубчастих областях // Там же. – 1997. – **49**, № 5. – С. 638 – 650.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1976. – 736 с.


Получено 02.11.98