УДК 519.41/47

О. В. Городник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДОБУТОК АБЕЛЕВОЇ ГРУПИ НА НІЛЬПОТЕНТНУ

The structure of a product of Abelian group by nilpotent group is studied. Conditions for the existence of normal subgroup in one of the factors are given. These conditions generalize the known results on the product of two Abelian groups. The statements obtained are used to describe the structure of a product of infinite cyclic subgroup by periodic nilpotent subgroup.

Вивчається структура добутку абелевої групи на нільпотентну. Наведені умови, при яких існує нормальний дільник в одному з множників, що узагальнює відомі результати про добуток двох абелевих груп. Отримані твердження застосовуються для опису будови добутку нескінченної циклічної та періодичної нільпотентної підгруп.

Одним з методів вивчення добутків груп є побудова нормальних дільників, що задовольняють певні властивості, зокрема містяться в одному з множників. Виходячи з цього, в роботі [1] в загальному вигляді була сформульована наступна властивість.*

„INSIDE"-*властивість. Нехай група $G = AB$ є добутком підгруп A та B. Тоді існує нетривіальна нормальна підгрупа N, що міститься в A або B.*

Спочатку цей факт був доведений у випадку скінченного добутку двох абелевих підгруп в [2]. Потім його отримано для добутку абелевих підгруп в [3], коли одна з них скінченнопороджена, та в [4], коли одна з них має скінченний абелів секційний ранг.

З іншого боку, доведено, що „INSIDE"-властивість не вірна для добутку двох нільпотентних підгруп. В [5] побудовано контрприклад, де множники некомутативні групи порядку p^3 (p — просте). Оскільки цей приклад є мінімальним з точки зору некомутативності множників, то природно розглянути випадок добутку абелевої групи на нільпотентну. У цьому напрямку буде отримано декілька позитивних результатів.

Нагадаємо, що група має скінченний абелів секційний ранг, якщо довільна елементарна абелева секція скінченна.

Теорема 1. *Нехай неодинична розв'язна група G має скінченний абелів секційний ранг та факторизується за допомогою абелевої підгрупи A та нільпотентної підгрупи B. Тоді існує нетривіальна нормальна підгрупа N, для якої $N \leq A$ або $N \leq B$.*

Зауважимо, що зараз здається невідомим, чи випливає розв'язність групи з інших умов теореми 1. Але відповідна теорема є вірною, якщо умову розв'язності групи замінити на періодичність.

Теорема 2. *Нехай неодинична періодична група $G = AB$ є добутком абелевої підгрупи A та нільпотентної підгрупи B. Якщо група G має скінченний абелів секційний ранг, то існує нетривіальна нормальна підгрупа N, що міститься в одному з множників.*

Зазначимо, що В. Г. Василів в [6] побудував приклад добутку двох абелевих підгруп, що не задовольняє „INSIDE"-властивість. Пізніше в [7] було вказано подібний приклад з вільними абелевими факторами, та в [8] — з елементарними абелевими факторами. Таким чином, певна умова скінченності потрібна в теоремі 1. Але можливо достатнім буде припускати, що лише один з множників має скінченний абелів секційний ранг. Зауважимо, що при таких умовах твердження, наприклад, буде вірним для метабелевих груп. Але автору зараз невідомо, чи має місце відповідний загальний результат. Першим кроком до цього

---

* Іноді також використовується термін R-властивість.

узагальнення є випадок, коли абелів множник є циклічним. Тоді можна довести наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай неодинична розв'язна група* $G = AB$ *є добутком циклічної підгрупи* A *та нільпотентної підгрупи* B. *Тоді для групи* G *виконується „INSIDE"-властивість.*

В [9] вказано вичерпний опис добутку вигляду AB, де підгрупи A та B нескінченні циклічні при умові, що $A \bigcap B = 1$. Як приклад застосування „INSIDE"-властивості наведемо опис добутку нескінченної циклічної підгрупи на нільпотентну періодичну.

Нагадаємо, що нескінченною діедральною групою D_∞ називається нескінченна група, породжена двома інволюціями.

Теорема 4. *Нехай розв'язна група* $G = AB$ *є добутком нескінченної циклічної підгрупи* $A = \langle a \rangle$ *та нільпотентної періодичної підгрупи* B. *Тоді можливі випадки:*

1. $B \trianglelefteq G$ *та* $G \simeq \langle a \rangle \ltimes B$.

2. *Існує* G*-інваріантна підгрупа* B_1 *з* B, *для якої*

$$|B : B_1| = 2 \quad \text{та} \quad G/B_1 \simeq D_\infty .$$

Зауважимо, що умову періодичності в попередній теоремі не можна відкинути. Для випадку локально нільпотентної групи більш точний результат міститься в лемі 5.

Доведення теорем. Далі будуть використовуватись стандартні позначення з [1, 10].

Нехай група $G = AB$ є добутком підгруп A та B. Підгрупа H називається факторизованою, якщо $H = (A \bigcap H)(B \bigcap H)$ та $A \bigcap B \le H$. Факторизатором нормальної підгрупи N називається підгрупа $X(N) = AN \bigcap BN$. Також має місце розклад

$$X(N) = A_1 B_1 = A_1 N = B_1 N, \quad \text{де} \quad A_1 \le A, \; B_1 \le B .$$

Для доведення теореми 1 будуть потрібні дві леми. Перша з них є досить простою.

Лема 1. *Нехай група* $G = AB$ *є добутком абелевої підгрупи* A *та підгрупи* B. *Якщо центр* $Z(G)$ *групи* G *неодиничний, то існує нетривіальна нормальна підгрупа, що міститься в* A *або в* B.

Доведення. Розглянемо елемент $x: 1 \ne x = a_0 b_0 \in Z(G)$, де $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Тоді для довільного $a \in A$, оскільки підгрупа A абелева,

$$a_0 (a b_0) = a (a_0 b_0) = (a_0 b_0) a .$$

Скоротивши на a_0, отримаємо $b_0^a = b_0$. Якщо $b_0 = 1$, то $A \bigcap Z(G)$ — шукана нормальна підгрупа. В іншому випадку

$$\langle b_0 \rangle^G = \langle b_0 \rangle^B \le B .$$

Наступна лема є ключовою в доведенні теореми 1.

Лема 2. *Нехай група* G *має факторизацію*

$$G = AB = AH ,$$

де A — абелева підгрупа, B — нільпотентна підгрупа та H — нормальна факторизована підгрупа з неодиничним центром.

Тоді існує підгрупа N, $1 \neq N \trianglelefteq G$, що міститься в A або в B.

Доведення. Оскільки підгрупа H факторизована, то

$$H = X(H) = AH \bigcap BH = BH.$$

Значить, $B \leq H$. Тоді з модулярного закону Дедекінда отримаємо $H = A_1 B$ для деякої підгрупи $A_1 \in A$. Розглянемо довільний елемент $h = a_0 b_0 \in Z(H)$, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Для будь-якого $a \in A_1$ отримаємо $a(a_0 b_0) = (a_0 b_0)a$ та, таким чином, $a b_0 = b_0 a$. Зокрема, $a_0 b_0 = b_0 a_0$.

Тоді для елемента $b \in B$ маємо

$$a_0^b = b^{-1} a_0 b = b^{-1} b_0^{-1} b b_0 a_0 = b_0^{-b} b_0 a_0.$$

Звідси отримаємо

$$a_0^G = a_0^B = b_0^{-B} b_0 a_0.$$

Тепер розглянемо множину

$$X = a_0^G a_0^{-1} = b_0^{-B} b_0 \leq B.$$

Оскільки $X^A = X$, то $\langle X \rangle^G = \langle X \rangle^B \leq B$. Таким чином, достатньо розглянути випадок, коли $X = 1$, тобто $a_0^G = a_0$. Це означає, що елемент a_0 належить $Z(G)$. За лемою 1 можна вважати, що $a_0 = 1$. Оскільки h — довільний елемент з $Z(H)$, то $Z(H) \leq B$. Підгрупа H нормальна в G, тому $Z(H)$ є теж нормальною в G.

***Доведення теореми* 1.** Позначимо через H радикал Хірша–Плоткіна групи G. Згідно з [1], теорема 6.3.9, підгрупа H є факторизованою. Позначимо $G_1 = AH$. З тотожності Дедекінда маємо $G_1 = AB_1$ для деякої підгрупи B_1 з B. За теоремою з [11] $G_1 \trianglelefteq G$. Звідси випливає, що $Z(G_1) \trianglelefteq G$. Оскільки група G має скінченний абелів секційний ранг, то H гіперцентральна. Зокрема, $Z(H) \neq 1$. Застосуємо лему 2 до підгрупи G_1. Отримаємо, що існує нетривіальна G_1-інваріантна підгрупа N така, що $N \leq A$ або $N \leq B_1$. Якщо $N \leq B_1$, то $N^G = N^B \leq B$ і все доведено.

Розглянемо випадок, коли $N \leq A$.

Спочатку доведемо, що $Z(G_1) \neq 1$. Позначимо $U = N \bigcap H$. Нехай $U \neq 1$. Оскільки $U \trianglelefteq H$ та H гіперцентральна, то $U \bigcap Z(H) \neq 1$. Звідси отримаємо $U \bigcap Z(H) \leq Z(G_1)$, тому що група A абелева. З іншого боку, якщо $N \bigcap H = 1$, то $[N, H] \leq N \bigcap H = 1$. Таким чином, $N \leq Z(G_1)$.

Позначимо $Y = AZ(G_1) \bigcap B_1$. Тоді $Y^A = Y$ та $Y^G = Y^B \leq B$. Отже, залишилось розглянути випадок, коли $Y = 1$. Тоді за лемою Дедекінда маємо

$$AZ(G_1) = A(AZ(G_1) \bigcap B_1) = AY = A.$$

Таким чином, $Z(G_1) \leq A$.

Наступне твердження є аналогом теореми з [11].

Твердження 1. *Нехай періодична група G має скінченний абелів секційний ранг та факторизується абелевою підгрупою A та нільпотентною підгрупою B. Тоді підгрупа AH нормальна в G, де H — радикал Хірша–Плоткіна групи G.*

Доведення. Спочатку доведемо, що періодична нільпотентна група скінченного абелевого секційного рангу є FC-групою. Оскільки така група розкладається в прямий добуток своїх силовських p-підгруп, то достатньо розглянути випадок p-групи. Зауважимо, що при вказаних умовах група є локально скінченною та задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Отже, за теоремою 4.1 із [12] вона є черніковською, а згідно з теоремою 1.9 із [12] і майже центральною та, зокрема, FC-групою.

За відомою теоремою Д. І. Зайцева (див., наприклад, [1], наслідок 7.3.9) група G є гіперабелевою.

Нехай H_p — силовська p-підгрупа в H. Для довільної скінченної множини простих чисел π позначимо $H_\pi = \langle H_p \mid p \overline{\in} \pi \rangle$. Тоді фактор-група H/H_π є нільпотентною.

Згідно з [13] фактор-група $\overline{G} = G/H'$ є розв'язною. За даними з [11] підгрупа AH_* — нормальна в G, де $\overline{H}_*$ — радикал Хірша–Плоткіна групи $\overline{G}$. Таким чином, достатньо довести, що $H = H_*$.

Очевидно, $H_* \geq H$. Також фактор-група

$$(H_*/H_\pi)/(H/H_\pi)' \simeq H_*/H'$$

є локально нільпотентною. Тому з використанням теореми Ф. Хола [10], теорема 5.2.10, група H_*/H_π теж локально нільпотентна. Тоді вона також гіперцентральна, оскільки має скінченний абелів секційний ранг. Таким чином, періодична група H_*, що має скінченний абелів секційний ранг, вкладається в декартів добуток гіперцентральних груп, отже, й сама гіперцентральна. Значить, $H_* \leq H$ і лему доведено.

З використанням твердження 1 доведення теореми 2 цілком аналогічне доведенню теореми 1.

Для доведення теореми 3 будуть потрібні три леми.

Лема 3. *Нехай абелева група $G = A \times B$ з скінченною групою операторів Ω є прямим добутком скінченнопородженої групи A та нескінченнопородженої групи B. Тоді в групі B міститься нетривіальна Ω-інваріантна підгрупа.*

Доведення. Розглянемо скінченнопороджену групу

$$U = \prod_{\omega \in \Omega} A$$

та гомоморфізм $\phi : B \to U$, що задається правилом

$$\phi(b) = \prod_{\omega \in \Omega} \overline{b^{\omega}},$$

де риска зверху означає природний гомоморфізм з G на $A \simeq G/B$. Тоді Ω-інваріантна підгрупа $\operatorname{Ker}\phi$ є нетривіальною, оскільки інакше B була б скінченнопородженою.

Лема 4. *Нехай локально нільпотентна група $G = AB$ є добутком абелевої скінченнопородженої підгрупи A та нільпотентної підгрупи B. Тоді для G виконується „INSIDE"-властивість.*

Доведення. Можливі два випадки:

1. $C_G(A) = A$. Згідно з результатом [14] про централізатор скінченнопородженої підгрупи маємо $Z(G) \neq 1$. Далі використовуємо лему 1.

2. $A < C_G(A)$. Покладемо $B_0 = C_G(A) \cap B \neq 1$.

Тоді підгрупа $N = \langle B_0^G \rangle = \langle B_0^B \rangle$ є шуканою.

Лема 5. *Нехай локально нільпотентна група $G = AB$ є добутком нескінченної циклічної підгрупи A та нільпотентної підгрупи B. Тоді якщо $A \cap B = 1$, то підгрупа B є нормальною в G.*

Доведення. Нехай N — максимальна в B підгрупа, що є нормальною в G. Тоді для фактор-групи отримаємо

$$\overline{G} = G/N = (AN/N)(BN/N) = \overline{A}\,\overline{B},$$

де $\overline{B}$ не містить неодиничних нормальних в $\overline{G}$ підгруп. Згідно з лемою 4 існує $\overline{G}$-інваріантна підгрупа $\overline{M} = \langle \overline{a}^k \rangle$. Розглянемо $\overline{G}_1 = C_{\overline{G}}(\overline{M})$.

Для $\overline{G}_1$ отримаємо

$$\overline{G}_1 \trianglelefteq \overline{G}, \quad |\overline{G} : \overline{G}_1| \leq 2, \quad \overline{G}_1 = \overline{A}\,\overline{B}_1 \quad (\overline{B}_1 \leq \overline{B}).$$

Доведемо, що $\overline{B}_1 = 1$. Припустимо, що це не так. Розглянемо два випадки.

1. $\overline{B}_1$ — нескінченна.

За лемою Пуанкаре в фактор-групі $\overline{B}\,\overline{M}/\overline{M}$ існує нетривіальна $\overline{G}_1$-інваріантна підгрупа $\overline{L}\,\overline{M}$, де $\overline{L} \leq \overline{B}$ та $\overline{L} \neq 1$. Позначимо

$$\overline{G}_2 = \langle \overline{a} \rangle Z(\overline{L}\,\overline{M}) = \langle \overline{a} \rangle Z(\overline{L}).$$

Якщо підгрупа $Z(\overline{L})$ є нескінченнопородженою, то згідно з лемою 3 існує $\overline{A}$-інваріантна підгрупа $\overline{B}_*$ з $\overline{B}$. Тоді підгрупа $\overline{B}_*^{\overline{B}}$ є нормальною в $\overline{G}$. Значить, $Z(\overline{L})$ є скінченнопородженою. Таким чином, $\overline{G}_2$ є теж скінченнопородженою, отже, і нільпотентною. В фактор-групі $\overline{G}_2/\overline{M}$ маємо $Z(\overline{L})\overline{M} \cap \cap Z(\overline{G}_2/\overline{M}) \neq 1$. Значить, існує елемент $\overline{b} \in Z(\overline{L})$, для якого $\overline{b}^{\overline{a}} = \overline{a}^i\,\overline{b}$. Тоді $\overline{b}^{\overline{a}^k} = \overline{a}^{ik}\,\overline{b}$. Але також $\overline{b}^{\overline{a}^k} = \overline{b}$. Значить, $\overline{b}^{\overline{a}} = \overline{b}$ та підгрупа $\langle \overline{b}^{\overline{B}} \rangle$ є нормальною в $\overline{G}$. Ця суперечність показує, що $\overline{B}_1 = 1$.

2. $\overline{B}_1$ — скінченна.

У цьому випадку група $\overline{G}_1$ є майже центральною. Тоді $\overline{G}_1'$ скінченна. Розглянемо факторизатор

$$X(\overline{G}_1') = \overline{A}_2\,\overline{B}_2 = \overline{A}_2\,\overline{G}_1' = \overline{B}_2\,\overline{G}_1', \quad \text{де} \quad \overline{A}_2 \leq \overline{A}, \quad \overline{B}_2 \leq \overline{B}_1.$$

Підгрупи $\overline{A}_2$ та $\overline{B}_2$ мають скінченний індекс в $X(\overline{G}_1')$. Тому $\overline{A}_2 \cap \overline{B}_2 = 1$ теж має скінченний індекс. Значить, $\overline{A}_2 = 1$ та $\overline{G}_1' \leq \overline{B}_1$. Тоді $\overline{G}_1' = 1$. Отже, $\overline{B}_1 \trianglelefteq \overline{G}$. Таким чином, $\overline{B}_1 = 1$.

Остаточно група $\overline{G}$ або комутативна, тоді $B \trianglelefteq G$ і лему доведено, або ізоморфна нескінченній діедральній групі. Але цей випадок суперечить локальній нільпотентності.

Доведення теореми **3.** Відзначимо, що коли один з множників скінченний, твердження теореми безпосередньо випливає з теореми 2 та леми Пуанкаре про нормальну підгрупу скінченного індексу. Якщо $A \cap B \neq 1$, то підгрупа $(A \cap \cap B)^G = (A \cap B)^B$ є шуканою.

Розглянемо інші випадки. Позначимо через F підгрупу Фітінга групи G. Згідно з [1], теорема 4.5.3, в G існує нормальна нільпотентна підгрупа N, для якої фактор-група G/N поліциклічна. Зокрема, G/F є поліциклічною. Оскільки G/N задовольняє умову максимальності для підгруп, то існує максимальна нормальна нільпотентна підгрупа M, що містить N. Доведемо, що $F = = M$. Дійсно, якщо існує нормальна нільпотентна підгрупа $K \not\leq M$, то за теоремою Фітінга [10], теорема 5.2.8, підгрупа KM нільпотентна, що суперечить вибору M. Зокрема, F — нільпотентна.

Доведемо, що факторизатор $X(F)$ буде гіперцентральним. Розглянемо розклад

$$X(F) = A_0 B_0 = A_0 F = B_0 F, \text{ де } A_0 \leq A, \ B_0 \leq B.$$

За теоремою Ф. Хола [10], теорема 5.2.10, достатньо довести, що фактор-група $X(F)/F'$ є гіперцентральною. Отже, можна вважати, що N абелева. Отримаємо випадки.

1. $F \cap B_0 = 1$.

Тоді $B_0 \simeq A_0/(A_0 \cap F)$, отже, B_0 є поліциклічною. Отже, $X(F)$ є поліциклічною за теоремою 4.4.2 з [1]. Значить, $X(F)$ має скінченний абелів секційний ранг та за теоремою 6.3.6 з [1] є гіперцентральною.

2. $F \cap B_0 \neq 1$.

Оскільки $F \cap B_0 \trianglelefteq B$, то також $F \cap Z(B_0) \neq 1$. Але F абелева, тому $F \cap \cap Z(B_0) \leq Z(B_0 F) = Z(X(F))$.

Таким чином, $Z(X(F)) \neq 1$. Застосовуючи попередні міркування до фактор-групи $X(F)/Z(X(F))$, переконуємось, що підгрупа $X(F)$ гіперцентральна. Згідно з [1], розділ 7.5, вона також є субнормальною. Значить, $X(F)$ міститься в радикалі Хірша–Плоткіна, зокрема, є локально нільпотентною.

За лемою 5 підгрупа B_0 є нормальною в $X(F)$. Тоді також отримаємо, що $X(F)' \leq B_0$. Зауважимо, що підгрупа $X(F)$ інваріантна відносно A. Тому комутант $X(F)'$ також інваріантний відносно A. Значить, підгрупа $\langle X(F)' \rangle^B$ є нормальною в G. Отже, можна вважати, що $X(F)$ абелева. Таким чином, $X(F) = F$, оскільки для підгрупи Фітінга $C_G(F) \leq F$.

Розглянемо можливі випадки.

Нехай підгрупа B_0 — нескінченнопороджена. Тоді за лемою 3 в B_0 існує A-інваріантна підгрупа, а отже, й в B існує G-інваріантна підгрупа.

Нехай підгрупа B_0 — скінченнопороджена. Тоді група G є поліциклічною та задовольняє „INSIDE"-властивість за теоремою 1.

***Доведення теореми* 4.** Можна вважати, що B не містить нормальних в G підгруп. Тоді згідно з теоремою 3 існує нормальна підгрупа $M = \langle a^k \rangle$. Як і в доведенні леми 5, покладемо $B_1 = C_B(M)$ та доведемо, що $B_1 = 1$.

Нехай B_1 — нескінченна. Оскільки підгрупа $B_1 M/M$ має в фактор-групі G/M скінченний індекс, то за лемою Пуанкаре існує власна нормальна підгрупа KM, де $K \leq B_1$. Також $Z(K) \neq 1$. Підгрупа $Z(KM) = Z(K)M$ є абелевою та нормальною в G. Тому $Z(K)$ теж нормальна як періодична частина групи $Z(KM)$. Ця суперечність вказує на те, що B_1 є скінченною.

Якщо підгрупа B_1 скінченна, то за міркуваннями п.2 доведення леми 5 отримаємо $B_1 = 1$.

Зауважимо, що $|B : B_1| \leq 2$. Таким чином, остаточно маємо або $B = 1$, що відповідає першому випадку, або $|B| = 2$, тоді $G \simeq D_\infty$.

1. *Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F.* Products of groups. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. – 220 p.
2 *Ito N.* Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen // Math. Z. – 1955. – **62**. – S. 400–401.
3. *Сесекин Н. Ф.* О произведении конечно-порожденных абелевых групп // Мат. заметки. – 1973. – **13**. – С. 443–446.
4. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – **19**. – С. 150–172.
5. *Gillam J. D.* A finite p-group $P = AB$ with Core (A) = Core(B) = 1 // Rocky Mountain J. Math. – 1973. – № 3. – P. 15–17.
6. *Васильев В. Г.* Об автоморфизмах аддитивных групп колец. – Красноярск, 1980. – 10 с. – (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние, ВЦ; 15).
7. *Сысак Я. П.* Произведения бесконечных групп. – Киев, 1982. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.53).
8. *Holt D. F., Howlett R. B.* On groups which are the product of two Abelian subgroups // J. London Math. Soc. – 1984. – **29**. – P. 453–461.
9. *Heineken H., Lennox J. C.* A note on product of Abelian groups // Arch. Math. – 1983. – **41**. – P. 498–501.
10. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – Berlin: Springer, 1982. – 482 p.
11. *Franciosi S., de Giovanni F., Heineken H., Newell W. L.* On the Fitting length of a soluble product of nilpotent groups // Arch. Math. – 1991. – **57**. – P. 313–318.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
13. *Franciosi S., de Giovanni F., Sysak Y. P.* On locally finite groups factorized by locally nilpotent subgroups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1996. – **106**. – P. 45–56.
14. *Зайцев Д. И., Онищук В. А.* О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлетворяющим условию конечности // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – № 7, 8. – С. 1084–1087.

Одержано 28.08.97,
після доопрацювання — 30.11.98