УДК 519. 21

Ю. Н. Линьков, Ю. А. Шевляков
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ СЕМИМАРТИНГАЛОВ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ТРИПЛЕТАМИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

We consider semimartingales with determined discontinuous triplets. We obtain properties of likelihood ratio for the parametric case in terms of the Hellinger processes.

Розглянуто семімартингали з детермінованими розривними триплетами. Одержано властивості відношення правдоподібності для параметричного випадку у термінах процесів Хелінгера.

1. Введение. Свойства отношения правдоподобия играют важную роль в асимптотической теории оценивания параметров. Создание теории асимптотического оценивания параметров для общих параметрических экспериментов, основанной на свойствах отношения правдоподобия, связано с работами Л. Ле Кама [1], И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [2]. Распространение этой теории на статистические эксперименты, порождаемые наблюдениями случайных процессов, начато в работах И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [2], К. О. Джапаридзе [3], Ю. А. Кутоянца [4], Ю. Н. Линькова [5], А. Ф. Тараскина [6], Е. Огаты [7] и др. Основные результаты здесь получены для случайных процессов семимартингального типа с непрерывными характеристиками. Отметим, что недавно эта теория достаточно детально разработана для считающих процессов с разрывными компенсаторами в работах Ю. Н. Линькова [8 – 12], Ю. Н. Линькова и Мунира аль Шахфа [13].

В данной работе общие асимптотические методы оценивания параметров распространяются на семимартингалы с детерминированными триплетами, которые, вообще говоря, могут быть разрывными по времени. При этом устанавливаются свойства отношения правдоподобия в терминах процессов Хеллингера. Отметим работы М. Г. Акритаса [14], М. Г. Акритаса и Р. А. Джонсона [15], Т. Комацу [16], в которых исследуются свойства отношения правдоподобия для процессов Леви, и близкую к нам работу Ю. Н. Линькова и М. С. Диалло [17], в которой изучаются свойства отношения правдоподобия для процессов с независимыми приращениями с разрывными характеристиками. Некоторые свойства отношения правдоподобия для процессов с независимыми приращениями в непараметрическом случае изложены в работе Ю. Н. Линькова и Ю. А. Шевлякова [18].

2. Отношение правдоподобия и процессы Хеллингера. Пусть $\mathbf{D}$ — пространство вещественных функций $x=(x_t)$, непрерывных справа и имеющих пределы слева, называемое пространством Скорохода (здесь и ниже (x_t) означает семейство $(x_t)_{t\in R_+}$). Через $\mathcal{G}_t$ обозначим наименьшую σ-алгебру множеств из $\mathbf{D}$, порождаемую цилиндрическими множествами вида $\{x=(x_t)\colon x_{t_1}\in A_1,\ x_{t_2}\in A_2,\dots,\ x_{t_n}\in A_n\}$, где $0\le t_1<t_2<\ldots<t_n\le t$, $A_i\in\mathcal{B}$, $i=1,2,\dots,n$, а $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $R^1=(-\infty,\infty)$. Пусть $\mathcal{G}=\bigvee_{t\in R_+}\mathcal{G}_t$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все σ-алгебры $\mathcal{G}_t$, $t\in R_+$. На измеримом пространстве $(\mathbf{D},\mathcal{G})$ зададим параметрическое семейство вероятностных мер $(\mathbf{P}_\theta,\ \theta\in\Theta)$, где Θ — непустое множество из R^k, $k\ge 1$. Возьмем две точки θ и y из множества Θ, рассмотрим две меры $\mathbf{P}_\theta$ и $\mathbf{P}_y$ из семейства $(\mathbf{P}_\theta,\theta\in\Theta)$ и положим $\mathbf{Q}=2^{-1}(\mathbf{P}_\theta+\mathbf{P}_y)$. Обозначим через $\mathcal{G}^Q$ и $\mathcal{G}_t^Q$ пополнения σ-алгебр

$\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_t$ по мере $\mathbf{Q}$. Рассмотрим стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$, где $\Omega = \mathbf{D}$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{Q}$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}^{Q}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{G}^{Q}_s$. Таким образом, мы имеем полный стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$, удовлетворяющий обычным условиям [19]. Кроме того, будем рассматривать стохастические базисы $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_y)$, которые, вообще говоря, не удовлетворяют обычным условиям.

Пусть $\xi = (\xi_t)$ — координатный процесс на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ такой, что $\xi_t(\omega) = x_t$ для всех $t \in R_+$ и $\omega = (x_t) \in \Omega$. Будем предполагать, что процесс ξ является семимартингалом на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ (в этом случае будем писать $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$) и имеет следующее каноническое представление:

$$\xi_t = \xi_0 + B_t(\theta) + M_t(\theta) + xI(|x| \le 1) * (\mu - \nu(\theta))_t + xI(|x| > 1) * \mu_t \tag{1}$$

с триплетом предсказуемых характеристик $T(\theta) = (B(\theta), \langle M(\theta)\rangle, \nu(\theta))$. Здесь $B(\theta) \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta) \cap \mathcal{P}(\mathbf{F})$ — предсказуемый процесс с локально интегрируемой вариацией, $M(\theta) \in \mathcal{M}^{c}_{\mathrm{loc},0}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ — непрерывный локальный мартингал с $M_0(\theta) = 0$ и квадратической характеристикой $\langle M(\theta)\rangle$, а μ — мера скачков процесса ξ с компенсатором $\nu(\theta)$. В настоящей работе используем хорошо известные понятия и факты из общей теории случайных процессов, следуя [5, 19 – 21], без дополнительных объяснений. Хорошо известно [19], что семимартингал $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ является процессом с независимыми приращениями тогда и только тогда, когда триплет $T(\theta) = (B(\theta), \langle M(\theta)\rangle, \nu(\theta))$ является детерминированным. Всюду ниже будем считать, что семимартингал $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ при любом $\theta \in \Theta$ — процесс с независимыми приращениями.

Через $\mathbf{P}^t_y$ и $\mathbf{P}^t_\theta$ обозначим сужения мер $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$ на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$, $t \in R_+$. Если $\mathbf{P}^t_y \ll \mathbf{P}^t_\theta$ для всех $t \in R_+$, то мера $\mathbf{P}_y$ называется локально абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}_\theta$ (обозначение: $\mathbf{P}_y \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$). Если $\mathbf{P}_y \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$ и $\mathbf{P}_\theta \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}_y$, то меры $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$ локально эквивалентны (обозначение: $\mathbf{P}_y \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathbf{P}_\theta$). Если $\mathbf{P}_y \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$, то существует единственный с точностью до $\mathbf{P}_\theta$-неразличимости случайный процесс $z(y, \theta) = (z_t(y, \theta)) \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$, где $z_t(y, \theta) = d\mathbf{P}^t_y / d\mathbf{P}^t_\theta$ — плотность меры $\mathbf{P}^t_y$ относительно меры $\mathbf{P}^t_\theta$. Процесс $z(y, \theta)$ называется процессом локальной плотности меры $\mathbf{P}_y$ относительно меры $\mathbf{P}_\theta$, а иногда процессом отношения правдоподобия.

Очевидно, $\mathbf{P}_y \ll \mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_\theta \ll \mathbf{Q}$. Обозначим через $\mathfrak{z}(y) = (\mathfrak{z}_t(y))$ и $\mathfrak{z}(\theta) = (\mathfrak{z}_t(\theta))$ процессы локальной плотности мер $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$ соответственно относительно меры $\mathbf{Q}$. Если $\mathbf{P}_y \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$, то, очевидно, $\mathfrak{z}(y)/\mathfrak{z}(\theta) = z(y, \theta)$ ($\mathbf{Q}$-п. н.), где для определенности полагаем $0/0 = 0$.

Для всех $t \in R_+$ и $\varepsilon \in R^1$ введем интеграл Хеллингера $H_t(\varepsilon) = H_t(\varepsilon; y, \theta)$ порядка ε для мер $\mathbf{P}^t_y$ и $\mathbf{P}^t_\theta$, полагая

$$H_t(\varepsilon; y, \theta) = \mathbf{E}_Q Y_t(\varepsilon), \tag{2}$$

где $Y_t(\varepsilon) = Y_t(\varepsilon; y, \theta) = \mathfrak{z}^{\varepsilon}_t(y)\mathfrak{z}^{1-\varepsilon}_t(\theta)$. Если $\varepsilon < 0$ и $\mathfrak{z}_t(y) = 0$, то полагаем $Y_t(\varepsilon) = 0$ (соответственно $Y_t(\varepsilon) = \infty$) при $\mathfrak{z}_t(\theta) = 0$ (соответственно $\mathfrak{z}_t(\theta) > 0$).

Если $\varepsilon > 1$ и $\mathfrak{z}_t(\theta) = 0$, то полагаем $Y_t(\varepsilon) = 0$ (соответственно $Y_t(\varepsilon) = \infty$) при $\mathfrak{z}_t(y) = 0$ (соответственно $\mathfrak{z}_t(y) > 0$). Кроме того, полагаем $Y_t(0) = \mathfrak{z}_t(\theta) I(\mathfrak{z}_t(y) > 0)$ и $Y_t(1) = \mathfrak{z}_t(y) I(\mathfrak{z}_t(\theta) > 0)$. Здесь $\mathbf{E}_Q$ означает математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}$. Далее через $\mathbf{E}_\theta$ будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_\theta$.

Введем обозначения

$$\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) = \inf\{\varepsilon\colon H_t(\varepsilon; y, \theta) < \infty\},$$

$$\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) = \sup\{\varepsilon\colon H_t(\varepsilon; y, \theta) < \infty\}.$$

Очевидно, $\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) \le 0$ и $\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) \ge 1$ и $H_t(\varepsilon; y, \theta) \le 1$ для всех $\varepsilon \in [0, 1]$. Из определения (2) имеем $H_t(0; y, \theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathfrak{z}_t(y) > 0)$ и $H_t(1; y, \theta) = \mathbf{P}_y(\mathfrak{z}_t(\theta) > 0)$. Более того, справедливы следующие импликации:

$$\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) < 0 \Rightarrow H_t(0; y, \theta) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_\theta^t \ll \mathbf{P}_y^t,$$

$$\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) > 1 \Rightarrow H_t(1; y, \theta) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_y^t \ll \mathbf{P}_\theta^t.$$

Известно [18], что $\varepsilon_-^{(t)}(y, \theta) \nearrow \varepsilon_-(y, \theta) \le 0$ и $\varepsilon_+^{(t)}(y, \theta) \searrow \varepsilon_+(y, \theta) \ge 1$ при $t \to \infty$.

Введем случайные множества

$$\Gamma(\theta) = \{\mathfrak{z}(\theta) > 0\} \cup [0], \qquad \Gamma(y) = \{\mathfrak{z}(y) > 0\} \cup [0],$$

$$\Gamma_\varepsilon(y, \theta) = (\Gamma(\theta) \cap \Gamma(y) \cap \{0 < \varepsilon < 1\}) \cup (\Gamma(\theta) \cap \{\varepsilon \le 0\}) \cup$$
$$\cup (\Gamma(y) \cap \{\varepsilon \ge 1\}).$$

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon \in (\varepsilon_-(y, \theta), \varepsilon_+(y, \theta))$ *существует предсказуемый возрастающий процесс* $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ *с* $h_0(\varepsilon) = 0$, *единственный с точностью до* $\mathbf{Q}$*-неотличимости и имеющий свойства:*

1) $h(\varepsilon) = I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) \circ h(\varepsilon)$;

2) $m(\varepsilon) = Y(\varepsilon) + \operatorname{sign}(\varepsilon(1-\varepsilon)) Y_-(\varepsilon) \circ h(\varepsilon) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$.

Лемму 1 можно получить из леммы 2.2 [18].

Замечание 1. Если $\varepsilon \in (0, 1)$, то процесс $m(\varepsilon)$ из условия 2 леммы 1 является равномерно интегрируемым мартингалом из класса $\mathcal{M}(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$, причем $m_0(\varepsilon) = Y_0(\varepsilon) = \mathfrak{z}_0^\varepsilon(y) \mathfrak{z}_0^{1-\varepsilon}(\theta)$. В частности, если $\mathbf{P}_y^0 = \mathbf{P}_\theta^0$, то $Y_0(\varepsilon) = 1$ и, значит, имеет место равенство

$$Y(\varepsilon) = 1 + m(\varepsilon) - Y_-(\varepsilon) \circ h(\varepsilon),$$

где $m(\varepsilon) \in \mathcal{M}(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ с $m_0(\varepsilon) = 0$.

Если $\varepsilon_-(y, \theta) = 0$ и $\varepsilon_+(y, \theta) = 1$, то в лемме 1 процессы $h(0)$ и $h(1)$ не определены, хотя $H_t(0; y, \theta) < \infty$ и $H_t(1; y, \theta) < \infty$ для всех $t \in R_+$. В этом случае процессы $h(0)$ и $h(1)$ можно определить аналогично [21], раздел 4.1.

Определение 1. a) *Возрастающий предсказуемый процесс* $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$, *построенный в лемме* 1, *называется процессом Хеллингера в строгом смысле порядка* ε *для мер* $\mathbf{P}_y$ *и* $\mathbf{P}_\theta$.

b) *Процессом Хеллингера в слабом смысле* (*или просто процессом Хеллингера*) *порядка* ε *для мер* $\mathbf{P}_y$ *и* $\mathbf{P}_\theta$ *называется любой предсказуемый возрастающий процесс* $h'(\varepsilon) = h'(\varepsilon; y, \theta)$ *такой, что процессы* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) h'(\varepsilon)$ *и* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) h(\varepsilon)$ (*или, эквивалентно,* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) \circ h'(\varepsilon)$ *и* $I(\Gamma_\varepsilon(y, \theta)) \circ h(\varepsilon)$) $\mathbf{Q}$*-неразличимы*.

Поскольку по предположению семимартингалы $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_y)$ и $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ являются процессами с независимыми приращениями, то существует детерминированная версия процесса Хеллингера $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ порядка ε. Следующая лемма устанавливает связь между интегралом Хеллингера $H_t(\varepsilon; y, \theta)$ и детерминированной версией процесса Хеллингера $h(\varepsilon; y, \theta)$.

Лемма 2. *Пусть семимартингалы $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_y)$ и $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ являются процессами с независимыми приращениями, а $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ — детерминированная версия процесса Хеллингера порядка $\varepsilon \in (\varepsilon_-(y, \theta), \varepsilon_+(y, \theta))$ для мер $\mathbf{P}_y$ и $\mathbf{P}_\theta$. Тогда для всех $t \in R_+$ и $\varepsilon \in (\varepsilon_-(y, \theta), \varepsilon_+(y, \theta))$ имеет место равенство*

$$H_t(\varepsilon; y, \theta) = H_0(\varepsilon; y, \theta)\mathcal{E}_t(-\operatorname{sign}(\varepsilon(1-\varepsilon))h(\varepsilon; y, \theta)),$$

где $\mathcal{E}(\cdot)$ — экспонента Долеан.

Доказательство леммы 2 можно получить, следуя [18].

Рассмотрим вопрос о вычислении процесса Хеллингера $h(\varepsilon; y, \theta)$ при условии $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$. Следующая лемма дает необходимые и достаточные условия локальной абсолютной непрерывности $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$ и дает вид соответствующего процесса локальной плотности $z(y, \theta)$.

Лемма 3. *Пусть семимартингалы $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_y)$ и $\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$ имеют детерминированные триплеты предсказуемых характеристик $T(y) = (B(y), \langle M(y)\rangle, \nu(y))$ и $T(\theta) = (B(\theta), \langle M(\theta)\rangle, \nu(\theta))$ соответственно. Тогда $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$, если и только если существуют две борелевские функции $\lambda(y, \theta) = (\lambda_{t,x}(y, \theta))$: $R_+ \times R^1 \to R_+$ и $\gamma(y, \theta) = (\gamma_t(y, \theta)): R_+ \to R^1$ такие, что*

1) $\mathbf{P}_y^0 \ll \mathbf{P}_\theta^0$;
2) $\nu(y) = \lambda(y, \theta) * \nu(\theta)$;
3) $a_t(\theta) = 1 \Rightarrow a_t(y) = 1$ *для всех* $t \in R_+$ (*здесь* $a_t(\theta) = \nu(\theta; \{t\}, R_0^1)$);
4) $|x|I(|x| \le 1)|\lambda(y, \theta) - 1| * (\theta)_t < \infty$ *для всех* $t \in R_+$;
5) $B(y) = B(\theta) + xI(|x| \le 1)(\lambda(y, \theta) - 1) * (\theta) + \gamma(y, \theta) \circ \langle M(\theta)\rangle$;
6) $\langle M(y)\rangle = \langle M(\theta)\rangle$;
7) $\gamma^2(y, \theta) \circ \langle M(\theta)\rangle_t + \left(\sqrt{\lambda(y. \theta)} - 1\right)^2 * (\theta)_t + \sum\limits_{s \le t}\left(\sqrt{1 - a_s(\theta)} - \sqrt{1 - a_s(y)}\right)^2 < \infty$

для всех $t \in R_+$.

При выполнении условий 1 – 7 процесс локальной плотности $z(y, \theta)$ имеет вид

$$z(y, \theta) = z_0(y, \theta)\exp\left\{N(y, \theta) - \frac{1}{2}\gamma^2(y, \theta) \circ \langle M(\theta)\rangle\right\} \times$$
$$\times \prod_{0 < s \le \cdot}\left(1 + \Delta N_s(y, \theta)\right)\exp\{-\Delta N_s(y, \theta)\},$$

где $N(y, \theta)$ — локальный $\mathbf{P}_\theta$-мартингал вида

$$N(y, \theta) = \gamma(y, \theta) \cdot M(\theta) + \left(\lambda(y, \theta) - 1 + \frac{a(y) - a(\theta)}{1 - a(\theta)} I(a(\theta < 1))\right) * (\mu - \nu(\theta)).$$

Доказательство леммы 3 можно вывести из результатов в [21].

В работе [18] можно найти условия, при которых процесс $\Lambda(y, \theta) = \ln z(y, \theta)$ является специальным семимартингалом на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F},$

$\mathbf{P}_\theta$), а также получено каноническое представление типа (1) для семимартингала $\Lambda(y, \theta)$.

Следующая лемма дает версию процесса Хеллингера $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ при условии $\mathbf{P}_y \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}_\theta$.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Тогда детерминированая версия процесса Хеллингера* $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; y, \theta)$ *порядка* ε *для мер* $\mathbf{P}_y$ *и* $\mathbf{P}_\theta$ *имеет вид*

$$h(\varepsilon) = \operatorname{sign}(\varepsilon(1-\varepsilon))\left\{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\gamma^2(y, \theta) \circ \langle M(\theta)\rangle + \varphi_\varepsilon(\lambda(y, \theta), 1) * (\theta) + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<s\le\cdot} \varphi_\varepsilon(1 - a_s(y), 1 - a_s(\theta))\right\},$$

где

$$\varphi_\varepsilon(u, v) = \varepsilon u + (1-\varepsilon)v - u^\varepsilon v^{1-\varepsilon},$$

причем $\varphi_0(u, v) = vI(u = 0)$, $\varphi_1(u, v) = uI(v = 0)$.

Доказательство леммы 4 можно получить из леммы 2.7 [18], полагая $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\theta$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_y$.

***Замечание* 2.** Если $\varepsilon_-(y, \theta) < 0$ и $H_t(\varepsilon_-(y, \theta)) < \infty$ для всех $t \in R_+$, то процесс Хеллингера $h(\varepsilon_-(y, \theta))$ вполне определен, как в лемме 1, и все утверждения относительно $h(\varepsilon)$ справедливы для $\varepsilon = \varepsilon_-(y, \theta)$. Если $\varepsilon_+(y, \theta) > 1$ и $H_t(\varepsilon_+(y, \theta)) < \infty$ для всех $t \in R_+$, то процесс Хеллингера $h(\varepsilon_+(y, \theta))$ вполне определен, как в лемме 1, и все утверждения о $h(\varepsilon)$ верны и при $\varepsilon = \varepsilon_+(y, \theta)$. Ниже, если процесс Хеллингера $h(\varepsilon)$ не определен при некотором ε, то полагаем $h(\varepsilon) = \infty$. Таким образом, процесс Хеллингера $h(\varepsilon)$ становится определенным при всех $\varepsilon \in R^1$.

3. Асимптотическое разложение отношения правдоподобия. Для вещественной функции $f(\theta)$, $\theta \in \Theta$, будем писать $f \in C_1^0(\Theta)$, если функция f дифференцируема и для любых $\theta \in \Theta$ и $y \in R^k$ таких, что $\theta + sy \in \Theta$ для всех $s \in [0, 1]$, функция $f(\theta + sy)$ абсолютно непрерывна по $s \in [0, 1]$. Тогда справедливо равенство

$$f(\theta + y) - f(\theta) = \int_0^1 y' \nabla_\theta f(\theta + sy)\, ds, \tag{3}$$

где $\nabla_\theta f = (\partial f/\partial\theta_1, \ldots, \partial f/\partial\theta_k)'$. Здесь и всюду ниже векторы являются вектор-столбцами, а штрих означает транспонирование матриц.

Следующая теорема дает асимптотическое разложение для $\Lambda_t(\theta_t, \theta)$ при $t \to \infty$, где $\theta_t \to \theta$ при $t \to \infty$, а θ не зависит от t. Введем обозначения:

$$g(y, \theta) = \nabla_y \gamma(y, \theta), \quad l(y, \theta) = \nabla_y \lambda(y, \theta), \quad f(y, \theta) = l(y, \theta)/\lambda(y, \theta),$$

$$A(y) = \nabla_y a(y), \quad g^{t,v} = g(\theta + v\Delta_t, \theta), \quad l^{t,v} = l(\theta + v\Delta_t, \theta),$$

$$f^{t,v} = f(\theta + v\Delta_t, \theta), \quad a^{t,v} = a(\theta + v\Delta_t), \quad A^{t,v} = A(\theta + v\Delta_t),$$

$$g = g(\theta, \theta) = g^{t,0}, \quad l = l(\theta, \theta) = l^{t,0}, \quad f = f(\theta, \theta) = f^{t,0},$$

$$a = a(\theta) = a^{t,0}, \quad A = A(\theta) = A^{t,0}, \quad \Delta_t = \theta_t - \theta, \quad v \in [0, 1].$$

Теорема 1. *Пусть* $\theta_t \to \theta$ *при* $t \to \infty$ *и выполняются следующие условия:*

1) $\gamma(y, \theta) \in C_1^0(\Theta)$, $\ln\lambda(y, \theta) \in C_1^0(\Theta)$ *и* $a(y) \in C_1^0(\Theta)$ *как функция* $y \in \Theta$ *при фиксированных остальных переменных и для всех* $y \in \Theta$ *из некоторой окрестности точки* θ

$$g(y, \theta) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M(\theta); \mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta), \qquad f(y, \theta) \in \mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\nu(\theta); \mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta),$$

$$f(y, \theta) + \frac{A(y)}{1 - a(\theta)} I(a(\theta) < 1) \in \mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\nu(\theta); \mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta)$$

(*определение классов* $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ *и* $\mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}$ *см. в* [5]);

2) *существует положительно определенная симметричная матрица* $\varphi_t(\theta)$ *такая, что* $|\varphi_t(\theta)| \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *и*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(\theta)\left(gg' \circ \langle M(\theta) \rangle_t + ff' * (\theta)_t + \frac{AA'}{(1-a)^2} * q(\theta)_t \right)\varphi_t(\theta) = I_k,$$

где I_k — *единичная матрица порядка* k, $|B|^2 = \mathrm{Sp}BB'$, *а* $q(\theta)$ — *мера на* $(R_+, \mathcal{B}_+)$ *вида*

$$q(\theta, A) = \sum_{s \in A} I(0 < a_s(\theta) < 1)(1 - a_s(\theta)), \qquad A \in \mathcal{B}_+;$$

3) $$\lim_{t\to\infty} I\left(\left| \varphi_t(\theta)\left(f + \frac{A}{1-a} I(a < 1) \right) \right| > \varepsilon \right) \times$$

$$\times \left| \varphi_t(\theta)(f + \frac{A}{1-a} I(a < 1)) \right|^2 * (\theta)_t = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0;$$

4) $$\lim_{t\to\infty} \left\{ \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta)(g^{t,v} - g) \right|^2 dv \circ \langle M(\theta) \rangle_t + \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta)(f^{t,v} - f) \right|^2 dv * (\theta)_t + \right.$$

$$+ \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta)(l^{t,v} - l) \right|^2 dv * (\theta)_t + \sum_{0 < s \le t} \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta)(\hat{f}_s^{t,v} - \hat{f}_s) \right|^2 dv +$$

$$+ \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta)(A^{t,v} - A) \right|^2 dv \left(\frac{a}{(1-a)^2} \vee \frac{1}{1-a} \right) * q(\theta)_t +$$

$$\left. + \int_0^1 \left| \varphi_t(\theta)\left(\frac{A^{t,v}}{1 - a^{t,v}} - \frac{A}{1-a} \right) \right|^2 dv * q(\theta)_t + \int_0^1 \int_0^v \left| \varphi_t(\theta)\left(\frac{A^{t,v}}{1 - a^{t,u}} - \frac{A}{1-a} \right) \right|^2 du\, dv * q(\theta)_t \right\} = 0,$$

где $\hat{h}_s = \int h_{s,x} \nu(\{s\}, dx; \theta)$ *для функции* $h = (h_{s,x})$.

Тогда справедливо разложение

$$\Lambda(\theta_t, \theta) = u_t'(\eta^t + q^t) - \frac{1}{2} u_t'(I_k + p^t) u_t, \tag{4}$$

где $u_t = \varphi_t^{-1}(\theta)\Delta_t$, q^t — *векторный случайный процесс и* p^t — *детерминированная матричнозначная функция порядка* $k \times k$ *такие, что*

$$\mathbf{P}_\theta - \lim_{t\to\infty} \left| q_t^t \right| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \left| p_t^t \right| = 0, \tag{5}$$

$$\eta^t = \varphi_t(\theta)\left\{ g\cdot M(\theta) + \left(f + \frac{A}{1-a} I(a<1) \right) * (\mu - \nu(\theta)) \right\} \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\theta), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}(\eta^t_t | \mathbf{P}_\theta) \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, I_k), \quad t \to \infty. \quad (7)$$

Здесь $\mathcal{L}(\cdot|\mathbf{P}_\theta)$ *— закон распределения относительно* $\mathbf{P}_\theta$, $\xrightarrow{w}$ *означает слабую сходимость законов, а* $\mathcal{N}(a, B)$ *— гауссовский закон с вектором средних* a *и ковариационной матрицей* B.

Доказательство этой теоремы громоздко, но проводится стандартным методом [5], и поэтому опускается.

Пусть $\theta_t = \theta + \varphi_t(\theta)u$, где $\varphi_t(\theta)$ — матрица из условия 2 теоремы 1, $\theta \in \Theta$ — фиксированная точка, а $u \in \Theta_{t,\theta} = \varphi_t^{-1}(\theta)(\Theta - \theta)$. Случайная функция $Z_{t,\theta}(u) = z_t(\theta + \varphi_t(\theta)u, \theta)$ называется нормированным отношением правдоподобия. Заметим, что представление (4) – (7) в случае $\theta_t = \theta + \varphi_t(\theta)$ и известно как локальная асимптотическая нормальность (ЛАН) семейства вероятностных мер $(\mathbf{P}^t_\theta)$ в точке θ при $t \to \infty$ [2].

4. Свойства нормированного отношения правдоподобия. Ниже будем считать, что $\mathbf{P}^0_y = \mathbf{P}^0_\theta$ для всех $y, \theta \in \Theta$, а условия леммы 3 выполняются также при всех $y, \theta \in \Theta$.

Теорема 2. *Пусть множество* Θ *выпукло,* $K \subset \Theta$ *— некоторый компакт,* $h(y,\theta) = h\left(\frac{1}{2}; y, \theta\right) \in C^0_1(\Theta)$ *по переменной* $y \in \Theta$ *для всех* $\theta \in K$ *и существуют постоянные* $c = c(K) \geq 0$, $b = b(K) > 0$, *зависящие от компакта* K *и такие, что для всех* $N > 0$ *и* $t \in R_+$

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{u, v \in \Theta_{t,\theta} \\ |u|, |v| \leq N}} |\varphi_t(\theta) \tilde{h}_t(\theta + \varphi_t(\theta)v, \theta + \varphi_t(\theta)u)| \leq b(1 + N^c), \quad (8)$$

где $\tilde{h}_t(y,\theta) = \nabla_y h_t(y,\theta)$. *Тогда существуют постоянные* $\tilde{c} = \tilde{c}(K)$ *и* $\tilde{b} = \tilde{b}(K)$, *зависящие от* K *и такие, что*

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{u, v \in \Theta_{t,\theta} \\ |u|, |v| \leq N}} |u - v|^{-2} \mathbf{E}_\theta |Z^{1/2}_{t,\theta}(u) - Z^{1/2}_{t,\theta}(v)|^2 \leq \tilde{b}(1 + N^{\tilde{c}}). \quad (9)$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\mathbf{E}_Q |Z^{1/2}_{t,\theta}(u) - Z^{1/2}_{t,\theta}(v)|^2 = 2(1 - \mathbf{E}_Q Y_t), \quad (10)$$

где $Y_t = Y_t\left(\frac{1}{2}; x, y\right)$, $x = \theta + \varphi_t(\theta)u$, $y = \theta + \varphi_t(\theta)v$ и $\mathbf{Q} = 2^{-1}(\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y)$. Поскольку $\mathbf{P}^0_x = \mathbf{P}^0_y$, то в силу замечания 1,

$$\mathbf{E}_Q Y_t = 1 - \mathbf{E}_Q Y_- \circ h(x, y). \quad (11)$$

Из равенств (10) и (11), учитывая неравенство $\mathbf{E}_\theta Y_t \leq 1$, $t \in R_+$, получаем оценку

$$\mathbf{E}_Q |Z^{1/2}_{t,\theta}(u) - Z^{1/2}_{t,\theta}(v)|^2 \leq 2h_t(x, y). \quad (12)$$

Используя равенство (3), получаем оценку

$$h_t(x, y) = \int_0^1 \big(\varphi_t(\theta)(u - v)\big)' \tilde{h}_t(\theta + \varphi_t(\theta) u_{s,v}, y)\, ds \le$$

$$\le |u - v|^2 \int_0^1 \left|\varphi_t(\theta) \tilde{h}_t(\theta + \varphi_t(\theta) u_{s,v}, y)\right|^2 ds, \tag{13}$$

где $u_{s,v} = su + (1 - s)v$. Объединяя теперь (12) и (13) и учитывая выпуклость Θ, получаем неравенство (9). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть множество Θ ограничено и существуют положительные постоянные b, c_1 и c_2 и функция $\mathcal{X}_t$ такие, что $\mathcal{X}_t \to \infty$ при $t \to \infty$ и для всех $t > t_0$ при некотором $t_0 > 0$ и любого компакта $K \subset \Theta$*

$$\inf_{\theta \in K} \inf_{\substack{u \in \Theta_{t,\theta} \\ |u| \le \mathcal{X}_t}} |u|^{-2} \ln \mathscr{E}_t^{-1}(-h(\theta + \varphi_t(\theta)u, \theta)) \ge c_1, \tag{14}$$

$$\inf_{\theta \in K} \inf_{\substack{u \in \Theta_{t,\theta} \\ |u| > \mathcal{X}_t}} \left|\varphi_t^{-1}(\theta)\right|^{-b} \ln \mathscr{E}_t^{-1}(-h(\theta + \varphi_t(\theta)u, \theta)) \ge c_2, \tag{15}$$

где постоянные c_1 и c_2, вообще говоря, зависят от компакта K, а $\mathscr{E}_t(\cdot)$ — экспонента Долеан.

Тогда для любого компакта $K \subset \Theta$ и любого $N > 0$ существуют постоянные $t_0 = t_0(K, N)$ и $C = C(N, K)$, зависящие от K и N и такие, что

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{t > t_0} \sup_{u \in \Theta_{t,\theta}} |u|^N \mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}^{1/2}(u) \le C. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $y = \theta + \varphi_t(\theta)u$. Тогда в силу леммы 2

$$\mathbf{E}_\theta Z_{t,\theta}^{1/2}(u) = H_t\left(\frac{1}{2}; y, \theta\right) = \mathscr{E}_t(-h(y, \theta)). \tag{17}$$

Из условия (14) следует, что для всех $\theta \in \mathrm{K}$, $u \in \Theta_{t,\theta}, |u| \le \mathcal{X}_t$, $t \in R_+$, справедлива оценка

$$\mathscr{E}_t(-h(y, \theta)) \le e^{-c_1 |u|^2}. \tag{18}$$

Из ограниченности множества Θ следует, что $|u| = \left|\varphi_t^{-1}(\theta)(y - \theta)\right| \le \le c\left|\varphi_t^{-1}(\theta)\right|$, где c — некоторая положительная постоянная. Значит, в силу условия (15) при $\theta \in \mathrm{K}$, $u \in \Theta_{t,\theta}, |u| > \mathcal{X}_t$ для всех $t \in R_+$ имеем

$$\mathscr{E}_t(-h(y, \theta)) \le \exp\left(-c_2 \left|\varphi_t^{-1}(\theta)\right|^b\right) \le \exp\left(-\tilde{c}|u|^b\right), \tag{19}$$

где $\tilde{c} = c^{-b} c_2$. Из (18) и (19) получаем

$$\mathscr{E}_t(-h(y, \theta)) \le \exp\left(-c\left(|u|^2 \wedge |u|^b\right)\right), \tag{20}$$

где $c = \tilde{c} \wedge c_1$. Теперь из равенства (17) и неравенства (20) получаем соотношение (16). Теорема 3 доказана.

***Замечание* 3.** Используя лемму 4, можно получить достаточные условия справедливости теорем 2 и 3 в терминах функций $\gamma(y, \theta)$ и $\lambda(y, \theta)$.

1. *Le Cam L.* Locally asymptotically normal families of distributions // Univ. Calif. Publ. Statist. – 1960. – **3**, № 2. –P. 37 – 98.
2. *Ибрагимов И А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
3. *Джапаридзе К. О.* Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов. – Тбилиси.: Изд-во Тбилис. ун-та, 1981. – 264 с.
4. *Кутоянц Ю. А.* Оценивание параметров случайных процессов. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1980. – 254 с.
5. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с
6. *Тараскин А. Ф.* О поведении отношения правдоподобия семимаргиналов // Теория вероятностей и ее применения. – 1984. – **29**, № 3. – С. 440 – 451.
7. *Ogata Y.* The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimaters for stationary point processes // Ann. Inst. Statist. Math. – 1978. – **30**, № 2. – P. 243 – 261.
8. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое различение считающих процессов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 972 – 979.
9. *Линьков Ю. Н.* Большие уклонения в задаче различения считающих процессов // Там же. – № 11. – С. 1514 – 1521.
10. *Lin'kov Yu. N.* Asymptotical properties of the local density of measures for counting processes // Evolutionary Stochastic Systems in Physics and Biology (Frontiers in Pure and Applied Mathematics. – Vol. 2). – Moskow: TVP, 1993. – P. 311 – 335.
11. *Lin'kov Yu. N.* Limit theorems for the local density of measures in the hypotheses testing problems of counting processes // Probab. Theory and Math. Statist.: Proc. Sixth Vilnius Conf. (Vilnus, 28 June – 3 July, 1993). – Vilnius: TEV / Utrecht: VSP, 1994. – P. 497 – 515.
12. *Lin'kov Yu. N.* Limit theorems for the local density of measures of counting processes and some statistical applications // Proc. 2nd Ukr. – Hung. Conf. on New Trends in Probab. Theory and Math. Statist. – (Mukachevo. 28 Sept. - 2 Oct., 1992). – Kiev: TBIMC, 1995. – P. 143 – 161.
13. *Линьков Ю. Н., Мунир аль Шахф.* Асимптотическое различение процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №10. – С. 1382 – 1388.
14. *Akritas M. G.* Asymptotic theory for estimating the parameters of a Levy process // Ann. Inst. Statist. Math. – 1982. – **34**, № 2. – P. 259 – 280.
15. *Akritas M. G. , Johnson R. A.* Asymptotic inference in Levy process of the discontinuous type // Ann. Statist. – 1981. – **9**, №3. – P. 604 – 614.
16. *Komatsu T.* Statistics of stochastic processes with jumps//Lect. Notes Math. – 1976. – **550**. – P. 276 – 289.
17. *Lin'kov Yu. N., Diallo M. S.* Les propriétés asymptotiques de la densité locale des mesures pour les processus à accroissements indépendants. – Donetsk, 1993. – 32 p. (Prépublication / Inst. Math. Appl. et Mec., 93.06).
18. *Lin'kov Yu. N., Shevlyakov Yu. A.* Properties of the likelihood ratio for processes with independent increaments // Random Operators and Stochast. Equat. – 1997. – **5**, №3. – P. 237 – 252.
19. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
20. *Jacod J.* Calcul stochastique et problemes de martingales // Lect. Notes Math. – 1979. – **714**. – P. 1 – 539.
21. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. – Berlin: Springer, 1987. – 601 p.

Получено 25.12.97