УДК 519.21

І. К. Мацак (Держ. акад. лег. пром-сті України, Київ)

ЗБІЖНІСТЬ РОЗПОДІЛІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

We study the convergence of distributions of integral functionals of random processes of the form $U_n(t) = b_n(Z_n(t) - a_n\mathfrak{S}(t))$, $t \in T$, where $\{X = X(t), t \in T\}$ is a random process, X_n, $n \geq 1$, are independent copies of X, and $Z_n(t) = \max_{1 \leq k \leq n} X_k(t)$.

Вивчається збіжність розподілів інтегральних функціоналів від випадкових процесів виду $U_n(t) = b_n(Z_n(t) - a_n\mathfrak{S}(t))$, $t \in T$, де $\{X = X(t), t \in T\}$ — випадковий процес, X_n, $n \geq 1$, — незалежні копії X, $Z_n(t) = \max_{1 \leq k \leq n} X_k(t)$.

Вступ. Нехай $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (в. в.) з функцією розподілу $F(x) = \mathbb{P}(\eta < x)$. Припустимо, що для деяких констант $b_n > 0$, a_n при $n \to \infty$

$$b_n(z_n - a_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta, \tag{1}$$

де $z_n = \max_{1 \leq k \leq n} \eta_k$, знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означає збіжність за розподілом.

Із класичної теорії екстремальних значень [1 – 3] добре відомо, що коли функція розподілу $G(x) = \mathbb{P}(\zeta < x)$ невироджена, то вона буде належати до одного з трьох типів екстремальних значень:

$$G_1(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$G_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, & x > 0, \end{cases}$$

$$G_3(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x^{\alpha})\right), \quad \alpha > 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Хотілось би одержати асимптотичне співвідношення типу (1) в нескінченновимірному випадку. Деякі підходи до цієї задачі можна знайти у роботі [4], в якій досліджувалась слабка збіжність мір для екстремальних випадкових елементів у банахових просторах з безумовним базисом, та [5], де вивчався випадок функціоналів типу рівномірної норми від екстремальних випадкових функцій.

В загальній постановці задача про збіжність розподілів інтегральних функціоналів від випадкових функцій вивчалась досить докладно (див. [6] і літературу там). Але специфіка нашого випадку полягає в тому, що граничний процес буде мати незалежні в кожній точці значення і не буде вимірним. Це не дозволяє скористатися традиційною постановкою — дослідженням умов слабкої збіжності мір у відповідному функціональному просторі. Більше того, ця обставина приводить до результатів зовсім іншого характеру — граничними виявляються вироджені закони.

Інтегральні функціонали від екстремальних функцій. Загальна теорема. Нехай $\{X = X(t), t \in T\}$ — випадковий процес (в. п.), визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, який зображується у вигляді

$$X = \mathfrak{S}\hat{X} = \mathfrak{S}(t)\hat{X}(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

і $\forall t \in T$ $\mathbb{P}(\hat{X}(t) < x) = \mathbb{P}(\eta < x) = F(x)$.

Завжди будемо вважати, що X, $\hat{X}$, $\mathfrak{S}$ — вимірні функції, а T — вимірна множина $\mathbb{R}$. Для послідовності (X_n) незалежних копій X покладемо

$$\left\{Z_n = Z_n(t) = \max_{1 \le k \le n} X_k(t),\ t \in T\right\},$$
$$\{U_n = U_n(t) = b_n(Z_n(t) - a_n \mathfrak{S}(t)),\ t \in T\}.$$

Інтегральний функціонал від вимірної функції $\{x = x(t),\ t \in T\}$ визначимо формулою

$$f(x) = \int_T h(t, x(t))\mu(dt), \tag{3}$$

де $h(t, s)$ — неперервна функція на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, μ — міра Лебега. Позначимо через $\mathfrak{F}_p$, $0 < p \le \infty$, клас функціоналів вигляду (3), для яких при $|s| \to \infty$

$$\begin{gathered} H(s) = O\left(|s|^p\right), \quad 0 < p < \infty, \\ \ln(H(s)) = o(|s|), \quad p = \infty, \\ H(s) = \sup_{t \in T} |h(t, s)|. \end{gathered} \tag{4}$$

Наша мета — дослідження збіжності розподілів в. в. $f(U_n)$ для функціоналів $f \in \mathfrak{F}_p$.

Далі для довільних в.в. ξ_1, ξ_2 з функцією розподілу $F(x)$ буде розглядатись умова

$$\lim_{x \to x_F} \frac{\mathbb{P}(\xi_1 > x,\ \xi_2 > x)}{\mathbb{P}(\xi_1 > x)} = 0, \tag{5}$$

$x_F = \sup\{x\colon F(x) < 1\}$. При $x_F = \infty$ умова (5) близька до умови Жефруа [7, с. 87]. Вона забезпечує асимптотичну незалежність відповідних екстремальних значень.

Покладемо

$$\chi_h(t) = \mathbb{M} h(t, \zeta \mathfrak{S}(t)),$$
$$\|x\|_{L_p(T)} = \left(\int_T |x(t)|^p \mu(dt)\right)^{1/p}.$$

Теорема 1. *Нехай для вимірного в. п. X, який зображується у вигляді* (2), *виконуються умови*:

1) $F(x)$ *задовольняє асимптотичне співвідношення* (1) *і*

$$\forall k > 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) < \infty;$$

2) *майже для всіх* $(t, s) \in T \times T$ *в. в.* $\hat{X}(t)$, $\hat{X}(s)$ *задовольняють рівність* (5);

3) *для деякого* p, $0 < p < \infty$,

$$\|\mathfrak{S}\|_{L_p(T)} < \infty. \tag{6}$$

Тоді для довільного функціонала $f \in \mathfrak{F}_p$ *при* $n \to \infty$

$$f(U_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_T \chi_h(t)\mu(dt) < \infty. \tag{7}$$

Наведемо один наслідок теореми 1.

Твердження 1. *В умовах теореми* 1, $1 \le p < \infty$ *і* $n \to \infty$

$$\|U_n\|_{L_p(T)} \xrightarrow{\mathbb{D}} \left(\mathbb{M}|\zeta|^p\right)^{1/p} \|\mathfrak{S}\|_{L_p(T)} < \infty, \tag{8}$$

$\forall g(t) \in L_q(T)$

$$\int_T g(t) U_n(t) \mu(dt) \xrightarrow{\mathbb{D}} \mathbb{M}\zeta \int_T g(t) \mathfrak{S}(t) \mu(dt) < \infty, \tag{9}$$

де $1/p + 1/q = 1$ *для* $p > 1$, $q = \infty$ *для* $p = 1$.

Зауваження 1. При виконанні умови 1 теореми 1 граничними законами в (1) можуть виступати лише розподіли першого та третього типів. Для розподілу екстремальних значень першого типу $(G(x) = G_1(x))$ просто перевіряється, що характеристична функція в. в. ζ $\phi_\zeta(t) = \Gamma(1 - it)$, $\Gamma(t)$ — класична гамма-функція. Оскільки $\phi_\zeta^{(k)}(0) = (i)^k \mathbb{M}(\zeta)^k$, то в (8), (9) $\mathbb{M}(\zeta)^k = (-1)^k \Gamma^{(k)}(1)$, $k = 1, 2, \ldots$. Наприклад, $\mathbb{M}\zeta = C$, $\mathbb{M}(\zeta)^2 = \pi^2/6 + C^2$, $C = 0{,}577\ldots$ — постійна Ейлера.

У випадку розподілу третього типу $(G(x) = G_3(x))$ в.в. $(-\zeta)$ має добре відомий у теорії надійності розподіл Вейбулла і $\mathbb{M}|\zeta|^p = \Gamma(p/\alpha + 1)$ (див. [1]).

При доведенні наведених вище результатів важливу роль буде відігравати наступна лема.

Лема 1. *Нехай* $\{Y_n(t),\ t \in T\}$, $n \ge 1$, *— послідовність вимірних в.п.,* $\{Y(t),\ t \in T\}$ *— в. п. з незалежними в кожній точці значеннями, існують такі вимірні функції* $m(t)$, $m_k(t)$, *що для всіх* $k \ge 1$ *і майже для всіх* $t \in T$ $\mathbb{M}Y(t) = m(t)$, $\left(\mathbb{M}|Y_n(t)|^k\right)^{1/k} \le m_k(t)$,

$$\|m(t)\|_{L_1(T)} < \infty, \quad \|m_k(t)\|_{L_1(T)} < \infty.$$

Якщо для довільного $k \ge 1$ *і майже для всіх* $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ *при* $n \to \infty$

$$(Y_n(t_1), \ldots, Y_n(t_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y(t_1), \ldots, Y(t_k)), \tag{10}$$

то

$$\int_T Y_n(t) \mu(dt) \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_T m(t) \mu(dt).$$

Для доведення леми 1 скористаємось методом моментів. Оскільки за теоремою Карлемана вироджений розподіл однозначно визначається своїми моментами, то досить встановити, що $\forall k \ge 1$ при $n \to \infty$

$$\mathbb{M}\left(\int_T Y_n(t) \mu(dt)\right)^k \longrightarrow \left(\int_T m(t) \mu(dt)\right)^k \tag{11}$$

(див. [8, с. 264; 9, с. 81]). Маємо

$$\mathbb{M}\left(\int_T Y_n(t) \mu(dt)\right)^k =$$

$$= \int_T \ldots \int_T \mathbb{M}(Y_n(t_1) \ldots Y_n(t_k)) \mu(dt_1) \ldots \mu(dt_k). \tag{12}$$

Таким чином, усі умови леми 1 виконуються, що і завершує доведення теореми 1.

***Доведення твердження* 1**. Асимптотичне співвідношення (8) — простий наслідок теореми 1 при $h(t, s) = |s|^p$. Співвідношення (9) безпосередньо із теореми 1 не випливає, але його можна вивести безпосередньо із леми 1. Дійсно, позначимо

$$Y_n(t) = g(t)U_n(t), \qquad Y(t) = g(t)\mathfrak{S}(t)\zeta(t),$$
$$m(t) = \mathbb{M}\zeta g(t)\mathfrak{S}(t),$$
$$m_k(t) = A_k^{1/k}|g(t)|\mathfrak{S}(t).$$

Як і в теоремі 1, неважко перевірити справедливість умов леми 1. Так, скориставшись нерівністю Гельдера та оцінкою (24), одержуємо

$$\int_T |m(t)|\mu(dt) \le \mathbb{M}\zeta\|g(t)\|_{L_q(T)}\|\mathfrak{S}\|_{L_p(T)} < \infty,$$
$$\int_T |m_k(t)|\mu(dt) \le A_k^{1/k}\|g(t)\|_{L_q(T)}\|\mathfrak{S}\|_{L_p(T)} < \infty.$$

Інтегральні функціонали від екстремальних функцій. Нормальний розподіл. Нехай $\eta = \gamma$ — стандартна нормальна випадкова величина (в. в.) з функцією розподілу

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy, \qquad \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2),$$

$$b_n = \begin{cases} (2\ln(n))^{1/2}, & n > 1, \\ 1, & n = 1, \end{cases}$$
$$a_n = (2\ln(n))^{1/2} - (2\ln(n))^{-1/2}(\ln\ln(n) + \ln(4\pi))/2. \tag{25}$$

Тоді [1 – 3] виконується асимптотичне співвідношення (1) з $G(x) = G_1(x)$. Природно розглянути модифікацію теореми 1 для випадку нормального розподілу, коли її формулювання звичайно спроститься.

Далі $\{X = X(t),\ t \in T\}$ — це нормальний вимірний в. п., $\mathbb{M}X(t) = 0$, $\left\{\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(t) = \left(\mathbb{M}|X(t)|^2\right)^{1/2},\ t \in T\right\}$ — середнє квадратичне відхилення в. п. $X(t)$, ζ — в. в., яка має розподіл екстремальних значень першого типу: $\mathbb{P}(\zeta < x) = G_1(x)$, a_n та b_n будуть задаватися рівністю (25), інші позначення залишаються без змін. На в. п. X буде накладатися умова: майже для всіх $(t, s) \in T \times T$, $t \ne s$, $\mathfrak{S}(t) \ne 0$, $\mathfrak{S}(s) \ne 0$

$$\left|\frac{\mathbb{M}X(t)X(s)}{\mathfrak{S}(t)\mathfrak{S}(s)}\right| < 1. \tag{26}$$

Теорема 2. *Нехай нормально розподілений в. п. X задовольняє умову* (26), $\mathbb{M}X = 0$ *і для деякого* p $f \in \mathfrak{F}_p$. *Для того щоб виконувалось асимптотичне співвідношення* (7), *достатньо однієї із наступних умов:*

1′) $0 < p < \infty$ *і виконується умова* (6)

або

2′) $p = \infty$, $\mu(T) < \infty$, *і*

$$\sup_{t \in T} \mathfrak{S}(t) = \mathfrak{S}_0 < \infty. \tag{27}$$

Твердження 2. *Якщо нормально розподілений в. п. X задовольняє умову* (26), $\mathbb{M}X = 0$ *і для деякого p, $1 \le p < \infty$, виконується умова* (6), *то мають місце асимптотичні співвідношення* (8), (9).

Зауваження 2. Умови (6) та (26) для більшості відомих прикладів нормальних в. п. виконуються. Таким чином, твердження 2 показує суттєву різницю у поведінці норми екстремальних значень нормальних випадкових елементів для просторів C, l_p та L_p (див. [4, 5]).

Доведення теореми 2. Якщо γ_1, γ_2 — стандартні нормальні в. в. і $|\mathbb{M}\gamma_1\gamma_2| < 1$, то вони задовольняють умову Жефруа [7, с. 87]:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\mathbb{P}(\gamma_1 > x, \gamma_2 > y)}{\mathbb{P}(\gamma_1 > x) \cup (\gamma_2 > y)} = 0.$$

Оскільки $x_\Phi = \infty$, то звідси негайно випливає умова (5). Тому оцінка (26) забезпечує справедливість пункту 2 теореми 1.

Зрозуміло також, що для нормального розподілу пункт 1 теореми 1 виконується. Таким чином, при умові $1'$ співвідношення (7) — прямий наслідок теореми 1.

Розглянемо випадок $2'$. Основні моменти в доведенні тут аналогічні теоремі 1 і спираються на лему 1. Деяка відмінність пов'язана з перевіркою оцінок (20), (22). Розглянемо спочатку оцінку зверху для функції $m_k(t)$. Для цього скористаємось нерівностями: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$H(s) \le C_\varepsilon \exp(\varepsilon |s|) \tag{28}$$

та

$$\mathbb{P}(b_n |z_n - a_n| > x) \le C_1 \exp(-C_2 x), \tag{29}$$

де абсолютні константи $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $n \ge 1$, $x > 0$.

Оцінка (28) випливає із (4) при $p = \infty$, а (29) встановлена в [4].

Маємо

$$\begin{aligned} m_k(t) &\le C_\varepsilon \big(\mathbb{M} \exp(k\varepsilon |U_n(t)|)\big)^{1/k} \le \\ &\le C_\varepsilon \sup_{n \ge 1} \big(\mathbb{M} \exp(k\varepsilon \mathfrak{S}_0 b_n |z_n - a_n|)\big)^{1/k} \le \\ &\le C_\varepsilon \sup_{n \ge 1} \left(\int_0^\infty \mathbb{P}\left(\exp(k\varepsilon \mathfrak{S}_0 b_n |z_n - a_n|) > x\right) dx \right)^{1/k} \le \\ &\le C_\varepsilon \sup_{n \ge 1} \left(1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\left(b_n |z_n - a_n| > \ln(x) / k\varepsilon\mathfrak{S}_0\right) dx \right)^{1/k} \le \\ &\le C_\varepsilon \left(1 + C_1 \int_1^\infty \exp\left(-C_2 \ln(x) / k\varepsilon\mathfrak{S}_0\right) dx \right)^{1/k} \le \\ &\le C_\varepsilon \left(1 + C_1 \int_1^\infty x^{-(C_2/k\varepsilon\mathfrak{S}_0)} dx \right)^{1/k}. \end{aligned} \tag{30}$$