УДК 517.946

І. Д. Пукальський (Чернівец. ун-т)

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

In the spaces of classical functions with power weight, we prove the existence and uniqueness of solution of the nonlocal Neumann problem for nonuniformly parabolic equations without restrictions on a power order of coefficient degeneration. We find an estimate of the solution of this problem in the considered spaces.

У просторах класичних функцій із степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку нелокальної задачі Неймана для нерівномірно параболічних рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

В роботі [1] досліджено існування і єдиність розв'язку нелокальної крайової задачі для параболічного рівняння з гладкими коефіцієнтами, встановлено існування і єдиність розв'язку нелокальної задачі для нерівномірно параболічних рівнянь другого порядку без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів при похідних в рівнянні. Розв'язок знайдено в просторах класичних функцій із степеневою вагою.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D — обмежена опукла область в R^n з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = (0,T) \times D$ крайову задачу

$$(Lu)(t,x) = \left[D_t^1 - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\, D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\, D_{x_i}^1 - A_0(t,x) \right] u(x,t) = f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x)\, u(t_j,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\mathcal{B}u|_\Gamma = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\, D_{x_k}^1 + b_0(t,x) \right] u(x,t)|_\Gamma = g(t,x), \tag{3}$$

де $\Gamma = (0,T) \times \partial D$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le T$.

Порядок особливості коефіцієнтів операторів L і $\mathcal{B}$ буде характеризувати функція $\alpha(\gamma,x)$: $\alpha(\gamma,x) = |x - x^0|^\gamma$, якщо $|x - x^0| \le 1$; $\alpha(\gamma,x) \equiv 1$, якщо $|x - x^0| \ge 1$.

Нехай $\overline{Q} = [0,T] \times \overline{D}$, $\overline{D} = D \cup \partial D$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$ і $P_3(t^{(1)}, x^{(2)})$ — довільні точки із $\overline{Q}$. Означимо простори, в яких досліджується задача (1)–(3).

Позначимо через $C^m(\gamma, \beta, I; Q)$ множину функцій $u(t,x)$, які визначені в $\overline{Q}$, мають неперервні частинні похідні в області $Q^0 = Q \setminus (t, x^0)$ вигляду $D_t^k D_x^j u$ при $2k + |j| \le [m]$, для яких скінченна норма

$$|u;\gamma,\beta,l;Q|_m \equiv |u;\gamma,\beta,l;Q|_{[m]} + |u;\gamma,\beta,l;Q|_m \equiv$$

$$\equiv \sum_{2k+|j|\le[m]} \sup_{(t,x)\in\overline{Q}} a(|j|(\gamma+\beta) + (2k+l)\gamma, x)\,|D_t^k D_x^j u(t,x)| +$$

$$+ \sum_{2k+|j|=[m]} \sup_{P_1,P_3\in\overline{Q}} a((|j| + \{m\})(\gamma+\beta) +$$

$$+ (2k+l)\gamma, \tilde{x})\,|x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\{m\}}\,|D_t^k D_x^j u(P_1) - D_t^k D_x^j u(P_3)| +$$

$$+ \sum_{2k+|j|=[m]} \sup_{P_2,P_3\in\overline{Q}} a(|j|(\gamma+\beta) +$$

$$+ (2k+l+\{m\})\gamma, x^{(2)})\,|t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{m/2\}}\,|D_t^k D_x^j u(P_2) - D_t^k D_x^j u(P_3)|,$$

$$|u|_Q \equiv \sup_{\overline{Q}} |u|,$$

$$a(\gamma,\tilde{x}) = \min\left(a(\gamma,x^{(1)}), a(\gamma,x^{(2)})\right), \quad \gamma\ge 0, \quad l\ge 0, \quad \beta\in(-\infty,\infty),$$

$[m]$ — ціла частина числа m, $\{m\} = m - [m]$.

$C^m(r;Q)$ — множина функцій $u(t,x)$, визначених в $\overline{Q}$, для яких скінченна норма

$$\|u;r;Q\|_m \equiv \sup_{(t,x)\in\overline{Q}} \left(\sum_{|j|\le[m]} a(r+|j|,x)\,|D_x^j u(t,x)| \right) +$$

$$+ \sup_{P_1,P_3\in\overline{Q}} \left(\sum_{|j|\le[m]} a(r+|j|+\{m\},\tilde{x}) \right) |x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\{m\}}\,|D_x^j u(P_1) - D_x^j u(P_3)| +$$

$$+ \sup_{P_1,P_3\in\overline{Q}} a(r,x^{(2)})\,|t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{m/2\}}\,|u(P_2) - u(P_3)|.$$

Нехай для задачі (1) – (3) виконані такі умови:

а) коефіцієнти $A_{ij}(t,x)\in C^{\alpha}(-2\beta,Q)$, $A_i(t,x)\in C^{\alpha}(\alpha_1,Q)$, $A_0(t,x)\in$ $\in C^{\alpha}(\alpha_0,Q)$, $A_0(t,x)\le K<\infty$, K — const, $\beta\in(-\infty,\infty)$, $\alpha_1\ge 0$, $\alpha_0\ge 0$, і виконується умова рівномірної параболічності [2, с. 20] для рівняння

$$L_1 u \equiv \left[D_t^1 - a(-2\beta,x) \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\, D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 \right] u(t,x) = f_1(t,x); \tag{4}$$

б) коефіцієнти $q_i(x)\in C^{2+\alpha}(D)$, $q_j(x)\ge 0$, $j=\overline{1,N}$, і

$$\sup_{x\in\overline{D}} \left[\sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} \right] \le \lambda_0 < 1,$$

де λ — довільне додатне число, що задовольняє нерівність

$$\lambda < \min_{(t,x)\in\overline{Q}} (-A_0(t,x));$$

в) вектор $\bar{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ утворює з напрямком внутрішньої нормалі $\bar{n}$ до Γ в тій же точці $(t,x)\in\Gamma$ кут, що не перевищує $\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha(-\beta,x)\,b(t,x)\in$

$\in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0(t,x) \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0(t,x)|_\Gamma < 0$, поверхня ∂D належить $C^{2+\alpha}$, $a(1,y) \geq 0$, $y \in \partial D$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови* а), б), в), *функції* $f(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma,\beta,0;Q)$, $\varphi(t,x) \in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;Q)$, $g(t,x) \in C^{1+\alpha}(\gamma,\beta,0;\Gamma)$,

$$\gamma = \max\left(1+\beta,\ \alpha_1 + 2\beta,\ \frac{\alpha_0+\beta}{2}\right), \quad \textit{якщо} \quad \beta > 0,$$

і

$$\gamma = \max\left(1-\beta,\ \alpha_1 + \beta,\ \frac{\alpha_0}{2}\right), \quad \textit{якщо} \quad \beta \leq 0.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;Q)$ *і для нього справедлива оцінка*

$$|u;\gamma,\beta,0;Q|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c(|f;\gamma,\beta,0;Q|_{\alpha} + |\varphi;\gamma,\beta,0;D|_{2+\alpha} + |g;\gamma,\beta,0;\Gamma|_{1+\alpha}),$$

C залежить від n, α, $t_1,\ldots,t_N$, T *і норми коефіцієнтів операторів* L, $\mathcal{B}$.

Оцінки розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай

$$Q_m = \{(t,x) \in Q,\ t \in (0,T),\ a(1,x) \geq m^{-1},\ m > 1\}$$

— зростаюча послідовність областей, яка при $m \to \infty$ збігається до Q,

$$S_m = \{x,\ x \in Q,\ a(1,x) = m^{-1}\}, \qquad \Gamma = S_m \times (0,T).$$

Розглянемо нелокальну крайову задачу для параболічного рівняння

$$Lu_m \equiv \left[D_t^1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) D_{x_i}^1 - a_0(t,x)\right] u_m(t,x) = f(t,x), \tag{5}$$

$$u_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x)\, u_m(t_j,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$\mathcal{B}u_m|_\Gamma = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) D_{x_k}^1 - b_0(t,x)\right] u_m(t,x)|_\Gamma = g(t,x). \tag{7}$$

Тут $a_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$, $a_i(t,x) = A_i(t,x)$, $a_0(t,x) = A_0(t,x)$, якщо $(t,x) \in Q_m$. Для $(t,x) \in Q \setminus Q_m$ коефіцієнти $a_{ij}(t,x)$, $a_i(t,x)$, $a_0(t,x)$ є розв'язками внутрішньої задачі Діріхле

$$D_t u - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u|_{\Gamma_m} = \psi(t,x),$$

де $\psi(t,x)$ відповідно рівна $A_{ij}(t,x)|_{\Gamma_m}$, $A_i(t,x)|_{\Gamma_m}$, $A_0(t,x)|_{\Gamma_m}$.

В задачі (5)–(7) зробимо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t}$, де λ задовольняє умову б). Одержимо

$$L_2 v_m \equiv (L-\lambda) v_m = f e^{\lambda t}, \tag{8}$$

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j, x) = \varphi(x), \tag{9}$$

$$\mathcal{B} v_m|_{\Gamma} = g(t,x) e^{\lambda t}. \tag{10}$$

Знайдемо оцінку розв'язку задачі (8) – (10).

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $v_m(t,x)$ *— класичний розв'язок задачі* (8)–(10) *в циліндрі* Q *і виконані умови* а), б), в), *то для* $v_m(t,x)$ *справедлива оцінка*

$$|v_m| \le |b_0^{-1} g e^{\lambda t}|_{\Gamma} + \left| \varphi \left(1 - \left[\sum_{j=1}^{N} q_j e^{-\lambda t_j} \right] \right)^{-1} \right|_D +$$

$$+ |f e^{\lambda t} (-a_0 - \lambda)^{-1}|_Q. \tag{11}$$

Доведення. Можливі три випадки: $v_m(t,x)$ не додатний в $\overline{Q}$, або найбільше додатне значення $v_m(t,x)$ досягається на $\Gamma_T \equiv \Gamma \bigcup D$, або це найбільше значення досягається в точці $(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q$.

У першому випадку $\max\limits_{\overline{Q}} v_m(t,x) < 0$; у другому випадку $0 < \max\limits_{\overline{Q}} v_m(t,x) < \max\limits_{\Gamma_T} v_m(t,x)$. Якщо $\max\limits_{\Gamma_T} v_m(t,x) = \max\limits_{D} v_m(t,x) \equiv \equiv v_m(0, x^{(2)})$, то з умови (9) маємо

$$\varphi(x^{(2)}) = v_m(0, x^{(2)}) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x^{(2)}) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j, x^{(2)}) \ge$$

$$\ge v_m(0, x^{(2)}) \left[1 - \left(\sum_{j=1}^{N} q_j(x^{(2)}) \right) e^{-\lambda t_j} \right].$$

Тому

$$v_m(0, x^{(2)}) \le \max_D \left[\left(1 - \left(\sum_{j=1}^{N} q_j(x^{(2)}) e^{-\lambda t_j} \right) \right)^{-1} \varphi \right] \equiv R_1.$$

Якщо $\max\limits_{\Gamma_T} v_m(t,x) = \max\limits_{D} v_m(t,x) = v(t^{(3)}, x^{(3)})$, то в цій точці

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(t^{(3)}, x^{(3)}) D_{x_k} v_m \ge 0,$$

оскільки вектор $\bar{b}$ задовольняє умову в). Отже, з крайової умови (10) знаходимо

$$v_m(t^{(3)}, x^{(3)}) \le \max_{\Gamma} [b_0^{-1} g(t,x) e^{\lambda t}] \equiv R_2.$$

У третьому випадку $0 < \max\limits_{\overline{Q}} v_m(t,x) = v(t^{(1)}, x^{(1)})$, причому в цій точці $(t^{(1)}, x^{(1)})$ виконані співвідношення

$$D_t v_m \geq 0, \quad D_{x_i} v_m = 0, \quad -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$$

і рівняння (8). Тому в точці $(t^{(1)}, x^{(1)})$ має місце нерівність

$$v_m(t^{(1)}, x^{(1)}) \leq \max_Q [(-a_0(t,x) - \lambda)^{-1} f(t,x) e^{\lambda t}] \equiv R_3.$$

Отже,

$$v_m(t,x) \leq \max\{0, R_1, R_2, R_3\}. \tag{12}$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого недодатного значення функції $v_m(t,x)$, одержуємо оцінку

$$v_m(t,x) \geq \min\left\{0, \min_D \left(\left[1 - \sum_{j=1}^{N} q_j e^{\lambda t_j}\right]^{-1} \varphi(x)\right),\right.$$

$$\left.\min_\Gamma [b_0^{-1} g(t,x) e^{\lambda t}], \min_Q [(-a_0(t,x) - \lambda)^{-1} f(t,x) e^{\lambda t}]\right\}. \tag{13}$$

Таким чином, для розв'язку задачі (8) – (10) справедлива нерівність (11).
Розглянемо задачу з косою похідною

$$L_2 v_m = 0, \quad v_m(0,x) = \psi(x), \quad \mathcal{B} v_m|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Нехай $E_m(t, x, \tau, \xi)$ — функція Гріна задачі (14).

***Зауваження* 1.** Як випливає з оцінок (12), (13), розв'язок задачі (14) при $\psi(x) \equiv 1$ задовольняє нерівність

$$0 \leq \int_D E_m(t,x,0,\xi)\, d\xi \leq 1. \tag{15}$$

За $\psi(x)$ виберемо функцію $\psi(x,\delta)$:

$$\psi(x,\delta) = \begin{cases} C_0^{-1} \exp\left\{-\dfrac{\delta^2}{\delta^2 - |x-y|^2}\right\} & \text{при } |x-y| < \delta; \\ 0 & \text{при } |x-y| \geq \delta, \end{cases}$$

δ — довільне число, $(y_1, \ldots, y_n)$ — довільна точка, $y \in D$,

$$C_0 \equiv \int_D \exp\left\{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - |x-y|^2}\right\} dx.$$

Застосовуючи нерівності (12), (13) і теорему про „середнє“ значення для інтеграла

$$\int_D E_m(t,x,0,\xi)\, \psi(\xi,\delta)\, d\xi \geq 0,$$

одержуємо $E_m(t,x,0,\xi) \geq 0$ для $(t,x) \in Q$, $\xi \in D$.

Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $|v_m; \gamma, \beta, l; Q|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так, як $|u; \gamma, \beta,$

$l; Q|_{2+\alpha}$, тільки замість функції $a(\gamma, x)$ беремо $d(\gamma, x)$: $d(\gamma, x) = a(\gamma, x)$, якщо $(t, x) \in Q_m$ і $d(\gamma, x) = m^{-\gamma}$, якщо $(t, x) \in Q \setminus Q_m$.

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми* 2. *Тоді для розв'язку задачі* (8) – (10) *справедлива оцінка*

$$|v_m; \gamma, \beta, 0; Q|_{2+\alpha} \le c(|f; \gamma, \beta, 0; Q|_\alpha + |\varphi; \gamma, \beta, 0; D|_{2+\alpha} +$$
$$+ |g; \gamma, \beta, 0; \Gamma|_{1+\alpha} + |v_m|_Q).$$

Стала c *не залежить від* m.

Доведення. Використовуючи визначення норми і інтерполяційні нерівності [3, с. 176], маємо

$$|v_m; \gamma, \beta, 0; Q|_{2+\alpha} \le$$
$$\le (1+\varepsilon^\alpha)[v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|v_m|_Q.$$

Тому досить оцінити напівнорму $[v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha}$. Із визначення $[v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha}$ випливає існування в $\overline{Q}$ точок P_1, P_2 і P_3, для яких справедлива одна з нерівностей:

$$\mu[v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha} \le$$
$$\le E_1 \equiv d((|j| + \alpha)(\gamma + \beta) + 2r\gamma, \tilde{x})|x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\alpha} \times$$
$$\times |D_t^r D_x^j v_m(P_1) - D_t^r D_x^j v_m(P_3)|, \tag{16}$$
$$\mu[v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha} \le$$
$$\le E_2 \equiv d(|j|(\gamma + \beta) + (2r + \alpha)\gamma, x^{(2)})|t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\alpha/2} \times$$
$$\times |D_t^r D_x^j v_m(P_2) - D_t^r D_x^j v_m(P_3)| \tag{17}$$

для

$$\mu \in \left(\frac{1+\lambda_0}{2}, 1\right).$$

Якщо $|x^{(1)} - x^{(2)}| \ge d(\gamma + \beta, \tilde{x})\nu/4$, ν — довільна стала, $\nu \in (0, 1)$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_1 \ge \varepsilon^\alpha [v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|v_m|_Q.$$

Вибираючи $\varepsilon = (\lambda_0/2)^{1/\alpha}$ з нерівності (16), знаходимо

$$[v_m; \gamma, \beta, 0; Q]_{2+\alpha} \le c|v_m|_Q.$$

Аналогічно одержується оцінка у випадку $|t^{(1)} - t^{(2)}| \ge d(2\gamma, x^{(2)})\nu^2/16$. Розглянемо випадок, коли $|x^{(1)} - x^{(2)}| \le d(\gamma + \beta, \tilde{x})\nu/4$, або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \le d(2\gamma, x^{(2)})\nu^2/16$. Вважаємо, що $d(\gamma, \tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(2)})$.

Нехай $|x^{(i)} - y| \ge \nu d(\gamma + \beta, x^{(1)})$, $i = 1, 2$, $y \in \partial D$. Запишемо задачу (8), (9) у вигляді

$$L_2 v_m \equiv \left[D_t^1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P_1) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1\right] v_m \equiv$$

$$\equiv \left[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x) - a_{ij}(P_1)) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) D_{x_i}^1 + a_0(t,x) + \lambda \right] v_m + f e^{\lambda t} \equiv f_2(t,x), \tag{18}$$

$$v_m(0,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j, x) \equiv \varphi_1(x). \tag{19}$$

Нехай $V_1 \in Q$, V_1 — куб з центром P_1,

$$V_r = \{(t,x),\ 0 \le |t - t^{(1)}| \le r^2 \nu^2 d(2\gamma, x^{(1)}),\ t \ge 0,$$
$$|x_i - x_i^{(1)}| \le \nu r d(\gamma + \beta, x^{(1)}),\ i = \overline{1,n}\}.$$

Зробимо в задачі (18), (19) заміну $v_m(t,x) = u_m(t,z)$, $x_i = d(\beta, x^{(1)}) z_i$, $i = \overline{1,n}$. Одержимо

$$L_2 u_m \equiv \left[D_t^1 - d(-2\beta, x^{(1)}) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) + D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \right] u_m =$$
$$= f_2(t, d(\beta, x^{(1)}) z), \tag{20}$$

$$u_m(0,z) = \varphi_1(d(\beta, x^{(1)}) z). \tag{21}$$

Позначимо

$$z_i^{(1)} = d(-\beta, x^{(1)}) x_i^{(1)},$$

$$H_r = \{(t,x),\ 0 \le |t - t^{(1)}| \le r^2 \nu^2 d(2\gamma, x^{(1)}),\ t \ge 0,$$
$$|z_i - z_i^{(1)}| \le \nu r d(\gamma, x^{(1)}),\ i = \overline{1,n}\}$$

і візьмемо тричі диференційовну функцію $\omega(t,x)$, яка задовольняє такі умови:

$$\omega(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in H_{1/4},\ 0 \le \omega(t,z) \le 1; \\ 0, & (t,x) \notin H_{3/4},\ |D_t^k D_z^j \omega(t,z)| \le c_{kj} d(-(2k + |j|)\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(t,z) = \omega(t,z) u_m(t,z)$ задовольняє задачу Коші

$$L_2 V_m = d(-2\beta, x^{(1)}) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) [D_{z_i}^1 \omega D_{z_j}^1 u_m + D_{z_j}^1 \omega D_{z_i}^1 u_m] +$$
$$+ u_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} d(-2\beta, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \omega - D_t^1 \omega \right] + f_2 \omega \equiv f_3(t,z), \tag{22}$$

$$V_m(0,z) = \varphi_2 \omega(0,z) \equiv \varphi_3(z). \tag{23}$$

На підставі теореми 5.1 із [2, с. 364] для довільних точок $M_1(\tau^{(1)}, \xi^{(1)})$ і $M_2(\tau^{(2)}, \xi^{(2)}) \in H_{1/4}$ справедлива нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) |D_t^k D_z^j u_m(M_1) - D_t^k D_z^j u_m(M_2)| \le$$
$$\le c(|f_2|_{C^{\alpha}(H_{3/4})} + |\varphi_2|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4} \cap (t=0))}), \tag{24}$$

$$d(M_1, M_2) = \left[|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^3 + |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^2\right]^{1/2}, \quad 2k + |j| = 2.$$

Враховуючи властивості функції $\omega(t, z)$, маємо

$$|f_3|_{C^\alpha(H_{3/4})} \le c\, d(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(|f_2; \gamma, 0, 2; H_{3/4}|_\alpha +$$
$$+ |u_m; \gamma, 0, 0; H_{3/4}|_2 + |u_m|_{H_{3/4}}), \tag{25}$$

$$|\varphi_3|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4} \cap (t=0))} \le c\, d(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(|\varphi_2; \gamma, 0, 0; H_{3/4} \cap (t=0)|_{2+\alpha}.$$

Із визначення простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta, 0; Q)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1 |u_m; \gamma, 0, 0; H_{3/4}|_{k+\alpha} \le |v_m; \gamma, \beta, 0; V_{3/4}|_{k+\alpha} \le$$
$$\le c_2 |u_m; \gamma, 0, 0; H_{3/4}|_{k+\alpha}.$$

Підставляючи (25) в (24) і повертаючись до змінних (t, x), знаходимо

$$E_i \le c\,(|f_2; \gamma, \beta, 2; H_{3/4}|_\alpha + |v_m; \gamma, \beta, 0; V_{3/4}|_2 + |v_m|_{V_{3/4}} +$$
$$+ |\varphi_2; \gamma, \beta, 0; V_{3/4} \cap (t=0)|_{2+\alpha}), \quad i = 1, 2. \tag{26}$$

Нехай $R_1(\tau^{(1)}, y^{(1)})$, $R_2(\tau^{(2)}, y^{(2)})$ і $R_3(\tau^{(1)}, y^{(2)})$ — довільні точки із $V_{3/4}$. Оцінимо, наприклад,

$$|f_2; \gamma, \beta, 2; V_{3/4}|_\alpha = |f_2; \gamma, \beta, 2; V_{3/4}|_0 + |f_2; \gamma, \beta, 2; V_{3/4}|_\alpha.$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити напівнорму кожного доданка функції $f_2(x)$. Наприклад, для $[a_0 v_m; \gamma, \beta, 2; V_{3/4}]_\alpha \equiv F_1$, маємо

$$F_1 \le \sup_{R_1, R_3 \in V_{3/4}} \left\{\left[d(\alpha(\gamma+\beta), \tilde{y})\, |y^{(1)} - y^{(2)}|^{-\alpha} |v_m(R_1) - v_m(R_3)|\right] \times\right.$$
$$\times\, d(2\gamma, \tilde{y})\, |a_0(R_1)| +$$
$$\left. + |a_0(R_1) - a_0(R_3)|\, |y^{(1)} - y^{(2)}|^{-\alpha}\, d(2\gamma + \alpha(\gamma+\beta), \tilde{y})\, |v_m(R_3)|\right\} +$$
$$+ \sup_{R_2, R_3 \in V_{3/4}} \left\{\left[d(\alpha\gamma, y^{(2)})\, |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\alpha/2} |v_m(R_2) - v_m(R_3)|\right] \times\right.$$
$$\times\, d(2\gamma, y^{(2)})\, |a_0(R_2)| +$$
$$\left. + |a_0(R_2) - a_0(R_3)|\, |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\alpha/2}\, d((2+\alpha)\gamma, y^{(2)})\, |v_m(R_2)|\right\} \le$$
$$\le c\,(|v_m; \gamma, \beta, 0; V_{3/4}|_1 + |v_m|_{V_{3/4}}).$$

Аналогічно одержуємо оцінку інших доданків функції $f_2(t, z)$. Маємо

$$|f_2; \gamma, \beta, 2; V_{3/4}|_\alpha \le \varepsilon_1 |v_m; \gamma, \beta, 0; V_{3/4}|_{2+\alpha} +$$
$$+ c\,(|v_m|_{V_{3/4}} + |f_2; \gamma, \beta, 2; V_{3/4}|_\alpha), \tag{27}$$

де $\varepsilon_1 = n^2 \nu^2 + \varepsilon^\alpha$, ε — довільне число, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Повторюючи наведені вище міркування, знаходимо

$$|\varphi_2;\gamma,\beta,0;V_{3/4}\cap(t=0)|_{2+\alpha}\le c\,|\varphi;\gamma,\beta,0;V_{3/4}\cap(t=0)|_{2+\alpha}+$$
$$+\;(\lambda_0+\varepsilon)\,|v_m;\gamma,\beta,0;V_{3/4}|_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\,|v_m|_{V_{3/4}}.\tag{28}$$

Підставляючи (27), (28) в нерівність (26), одержуємо

$$E_i\le c\,(|f;\gamma,\beta,0;V_{3/4}|_\alpha+|\varphi;\gamma,\beta,0;V_{3/4}\cap(t=0)|_{2+\alpha}+|v_m|_{V_{3/4}})+$$
$$+\;(\lambda_0+\varepsilon)\,|v_m;\gamma,\beta,0;V_{3/4}|_{2+\alpha}.\tag{29}$$

Нехай $|x^{(i)}-y|\le\nu\,d(\gamma+\beta,x^{(1)}),\ i=1,3,\ y\in\partial D$.

Розглянемо кулю $K(\varepsilon_3,P)$ радіуса ε_3, $\varepsilon_3>4\nu d(\gamma+\beta,x^{(1)})$, з центром в деякій точці $P\in\Gamma$, яка містить точки P_1, P_2 і P_3. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(\varepsilon_3,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(y)$ [4, с. 126], в результаті якого область $\Pi\equiv Q\cap K(\varepsilon_3,P)$ переходить в область N_1, для точок якої $y_n\ge0$, $t\ge0$. Якщо покласти $v_m(t,x)\equiv\omega_m(t,y)$, $P_i\equiv B_i$, $i=1,2,3$, $d(\gamma,x^{(1)})\equiv d_1(\gamma,y^{(1)})$ і коефіцієнти операторів задачі (8)–(10), при цьому перетворенні, позначити через $k_{ij}(t,y)$, $k_i(t,y)$, $k_0(t,y)$, $l_i(t,y)$, $l_0(t,y)$, то $\omega_m(t,y)$ в N_1 буде розв'язком задачі

$$\left[D_t^1-\sum_{i,j=1}^n k_{ij}(B_1)\,D_{y_i}^1D_{y_j}^1\right]\omega_m(t,y)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^n[k_{ij}(t,y)-k_{ij}(B_1)]\,D_{y_i}^1D_{y_j}^1\omega_m+\sum_{i=1}^n k_i(t,y)\,D_{y_i}^1\omega_m+$$
$$+\;(k_0(t,y)+\lambda)\,\omega_m+f(t,\psi(y))\equiv F_m^1(t,y),\tag{30}$$

$$\omega_m(0,y)=\varphi(\psi(y))-\sum_{j=1}^N q_j(\psi(y))\,\omega_m(t_j,y)\,e^{-\lambda t_j}\equiv\varphi_4(y),\tag{31}$$

$$\left.\left(\sum_{i=1}^n l_i(B_1')\,D_{y_i}^1\omega_m\right)\right|_{y_n=0}=$$
$$=\left.\left(\sum_{i=1}^n[l_i(t,y)-l_i(B_1')]\,D_{y_i}^1\omega_m+l_0(t,y)\,\omega_m+g(t,\psi(y))\right)\right|_{y_n=0}=$$
$$=G_m^{(1)}(t,y'),\tag{32}$$

де $y'=(y_1,\ldots,y_{n-1},0)$, $l_n(B_1')\ne0$, $B_1=(t^{(1)},y_1^{(1)},\ldots,y_{n-1}^{(1)},0)\equiv B_1'$.

В задачі (30)–(32) зробимо заміну $\omega_m(t,y)\equiv u_m(t,z)$, $y_i\equiv d_1(\beta,y^{(1)})\,z_i$, $i=\overline{1,n}$. Одержимо

$$\left[D_t^1-d_1(-2\beta,y^{(1)})\sum_{i,j=1}^n k_{ij}(B_1)\,D_{z_i}^1D_{z_j}^1\right]u_m(t,z)\equiv$$
$$\equiv F_m^{(1)}(t,d_1(\beta,y^{(1)})\,z)\equiv F_m(t,z),$$

$$u_m(0,z) = \varphi_4(d_1(\beta, y^{(1)})z) \equiv \varphi_5(z), \tag{33}$$

$$\left(d_1(-\beta, y^{(1)}) \sum_{i=1}^{n} l_i(B_1')]\, D_{z_i}^1 u_m \right)\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_m^{(1)}(t, d_1(\beta, y^{(1)})z') \equiv G_m(t, z'),$$

Позначимо

$$z_i^{(1)} = d_1(-\beta, y^{(1)})\, y_i^{(1)},$$

$$N_r = \{(t,x),\ 0 \le |t - t^{(1)}| \le \nu^2 r^2 d_1(2\gamma, y^{(1)}),$$

$$|z_i - z_i^{(1)}| \le \nu r d_1(\gamma, y^{(1)}),\ i = \overline{1,n},\ z_n \ge 0\}$$

і візьмемо тричі диференційовну функцію $\omega_1(t,z)$,

$$\omega_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in H_{1/4},\ \ 0 \le \omega_1(t,z) \le 1; \\ 0, & (t,x) \notin H_{3/4},\ \ |D_t^k D_z^j \omega_1(t,z)| \le c_{kj} d_1(-(2k+|j|)\gamma, y^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z) = \omega_1(t,z)\, u_m(t,z)$ задовольняє крайову задачу

$$\left[D_t^1 - d_1(-2\beta, y^{(1)}) \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(B_1)\, D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \right] W_m(t,z) =$$

$$= d_1(-2\beta, y^{(1)}) \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(B_1)\, [D_{z_i}^1 \omega_1 D_{z_j}^1 u_m + D_{z_j}^1 \omega_1 D_{z_i}^1 u_m] +$$

$$+ u_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} d_1(-2\beta, y^{(1)})\, k_{ij}(B_1)\, D_{z_i}^1 D_{z_j}^1 \omega_1 - D_t^1 \omega_1 \right] + F_m \omega_1 \equiv f_4(t,z),$$

$$W_m(0,z) = \varphi_5\, \omega_1(0,z) \equiv \varphi_6(z), \tag{34}$$

$$\left(d_1(-\beta, y^{(1)}) \sum_{i=1}^{n} l_i(B_1')\, D_{z_i}^1 W_m \right)\Bigg|_{z_m=0} =$$

$$= \left(G_m \omega_1 + d_1(-\beta, y^{(1)}) \sum_{i=1}^{n} l_i(B_1')\, D_{z_i}^1 \omega_1 \right)\Bigg|_{z_m=0} = g_3(t, z').$$

Коефіцієнти рівняння і крайові умови обмежені при довільних значеннях $B_1(t^{(1)}, y^{(1)})$. Тому, використовуючи теорему 6.1 з [2, с. 368], для довільних точок M_1 і $M_2 \in N_{3/4}$ при $2k + j = 2$ одержуємо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\, |D_t^k D_z^j W_m(M_1) - D_t^k D_z^j W_m(M_2)| \le$$

$$\le c(|f_4|_{C^\alpha(N_{3/4})} + |\varphi_6|_{C^{2+\alpha}(N_{3/4} \cap (t=0))} + |g_3|_{C^{2+\alpha}(N_{3/4} \cap (z_n=0))}). \tag{35}$$

Враховуючи властивості функції $\omega_1(t,z)$, знаходимо

$$|f_4|_{C^\alpha(N_{3/4})} \le c\, d_1(-(2+\alpha)\gamma, y^{(1)})(|F_m; \gamma, 0, 2; H_1|_\alpha +$$

$$+ |u_m; \gamma, 0, 0; N_1|_2 + |u_m|_{N_1}), \tag{36}$$

$$|\varphi_6|_{C^{2+\alpha}(N_{3/4} \cap (t=0))} \le c\, d_1(-(2+\alpha)\gamma, y^{(1)})(|\varphi_5; \gamma, 0, 0; N_{3/4} \cap (t=0)|_{2+\alpha},$$

$$|g_3|_{C^{2+\alpha}(N_{3/4}\cap(t=0))} \le c d_1(-(2+\alpha)\gamma, y^{(1)}) (|G_m; \gamma, 0, 1; N_1' \cap (z_n=0)|_{2+\alpha} + $$
$$+ |u_m; \gamma, 0, 0; N_1|_2 + |u_m|_{N_1}).$$

Проводячи міркування, аналогічні доведенню нерівності (29), одержуємо

$$E_i \le c(|f; \gamma, \beta, 2; \Pi|_\alpha + \varepsilon^\alpha[v_m; \gamma, \beta, 0; \Pi|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|v_m|_\Pi) +$$
$$+ c(|\varphi; \gamma, \beta, 0; \Pi \cap (t=0)|_{2+\alpha} + |g; \gamma, \beta, 0; \Pi \cap \Gamma|_{1+\alpha}) +$$
$$+ (\lambda_0 + \varepsilon_2)|v_m; \gamma, \beta, 0; \Pi|_{2+\alpha}. \tag{37}$$

Використовуючи нерівності (16), (17), (29), (37), знаходимо

$$|v_m; \gamma, \beta, 0; Q|_{2+\alpha} \le c(|f; \gamma, \beta, 0; Q|_\alpha +$$
$$+ |g; \gamma, \beta, 0; \Gamma|_{1+\alpha} + |\varphi; \gamma, \beta, 0; D|_{2+\alpha} + |v_m|_Q).$$

Встановимо існування розв'язку задачі (8)–(10). Справедлива така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконані умови теореми* 1. *Тоді існує единий розв'язок задачі* (8)–(10), *для якого справедлива оцінка*

$$|v_m; \gamma, \beta, 0; Q|_{2+\alpha} \le c(|f; \gamma, \beta, 0; Q|_\alpha +$$
$$+ |g; \gamma, \beta, 0; \Gamma|_{1+\alpha} + |\varphi; \gamma, \beta, 0; D|_{2+\alpha}). \tag{38}$$

Стала c *не залежить від* m.

Доведення. Розв'язок задачі (8)–(10) шукаємо у вигляді

$$v_m(t,x) = \int_D E_m(t,x,0,\xi)\, v_m(0,\xi)\, d\xi + v_m^{(1)}(t,x), \tag{39}$$

де $v_m^{(1)}(t,x)$ — розв'язок задачі з косою похідною

$$L_2 v_m^{(1)} = f(t,x)e^{\lambda t},$$
$$v_m^{(1)}(0,x) = \varphi(x), \qquad \mathcal{B}v_m^{(1)}|_\Gamma = g(t,x)e^{\lambda t}. \tag{40}$$

Задовольняючи умову (9), знаходимо

$$v_0(0,x) + \sum_{j=1}^N q_j(x)\, e^{-\lambda t_j} \int_D E_m(t_j,x,0,\xi)\, v_m(0,\xi)\, d\xi \equiv F(x), \tag{41}$$
$$F(x) \equiv -\sum_{j=1}^N q_j(x)\, e^{-\lambda t_j}\, v_m^{(1)}(t_j,x).$$

Враховуючи обмеження на функції $g_j(x)$, оцінку (15), знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (41)

$$v_m(0,x) = F(x) + \int_D R(x,y)\, F(y)\, dy. \tag{42}$$

Резольвента $R(x,y)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi) = \sum_{j=1}^n q_j(x)\, e^{-\lambda t_j} E_m(t_j,x,0,\xi) +$$
$$+ \int_D \sum_{j=1}^n q_j(x)\, e^{-\lambda t_j}\, E_m(t_j,x,0,\xi)\, R(y,\xi)\, dy,$$

за допомогою якого знаходимо

$$\left|\int_D R(y, \xi)\, d\xi\right| \le \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Підставляючи (42) в (39), знаходимо розв'язок (8)–(10).

Враховуючи оцінки функції Гріна $E_m(t, x, 0, \xi)$ [5] і рівності (39) і (42), при кожному значенні m розв'язок задачі (8)–(10) єдиний, належить простору $C^{2+\alpha}(Q)$ і має скінченну норму $|v_m; \gamma, \beta, 0; Q|_{2+\alpha}$.

Використовуючи оцінки (11) і (15), встановлюємо нерівність (38).

Доведення теореми **1.** Оскільки права частина нерівності (38) не залежить від m, а послідовності

$$\{v_{jk}^{(m)}(t, x) \equiv d(k(\gamma+\beta) + 2j\gamma, x)\, D_t^j D_x^k v_m(t, x),$$

$$(t, x) \in Q,\ \ 2j + k = 2,\ \ m > 1\}$$

рівномірно обмежені і одностайно неперервні, за теоремою Арцела існують підпослідовності $\{V_{jk}^{(m_i)}(t, x)\}$, рівномірно збіжні в Q до v_{jk}. Переходячи до границі при $m(i) \to \infty$ в задачі (8)–(10), одержуємо, що $u \equiv v_{0,0} e^{-\lambda t}$ — єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta, 0; Q)$, і справедлива оцінка (4).

1. *Chabrowski I.* On non-local problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. – 1984. – **93**. – P. 109–131.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
4. *Камышин Л. И., Масленникова В. Н.* Граничные оценки шаудеровского типа решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 1. – С. 83–128.
5. *Матийчук М. И.* Задача с косой производной для параболических уравнений с минимальной гладкостью и вырождением // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 4. – С. 893–907.

Одержано 08.07.97