УДК 517.9

В. И. Урманчев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ РАЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We establish conditions of the stability for periodic solutions of two-dimensional systems of ordinary differential equations with pulse effect. We study the properties of jump operator for these systems.

Встановлені умови стійкості періодичних розв'язків двовимірних систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Досліджено властивості оператора стрибка для цих систем.

В статье исследуются свойства оператора скачка и дается критерий устойчивости n-импульсных циклов двумерных разрывных динамических систем, которые порождаются непрерывными динамическими системами более высокой размерности.

Пусть $D \in R^2$, $G_1 \in C^\infty(D)$, $G_2 \in C^\infty(D)$, $G_3 \in C^\infty(D)$ и в области D выполнено условие $|\operatorname{grad} G_i| \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Положим

$$K = \{(x, y)\colon G_1(x, y) = 0\} = \varnothing,$$

$$P = \{(x, y)\colon G_2(x, y) = 0\} = \varnothing.$$

На K определим многозначное отображение B по правилу $B(x, y) = \{(u_k, v_k) \in P,\ k \in J(x, y)\}$, где (u_k, v_k) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} G_3(x, y) &= G_3(u_k, v_k), \\ G_2(u_k, v_k) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Выберем однозначные ветви отображения B, которые обозначим через B_i, $i \in I$, и предположим, что их можно поднять до отображения прямой в прямую. Пусть

$$V(G) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad V^*(G) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \end{pmatrix},$$

$$D_0^1 = \{(x, y) \in K\colon \langle \operatorname{grad} G_3(x, y),\ \operatorname{sgrad} G_1(x, y)\rangle = 0\},$$

$$D_0^2 = \{(x, y) \in K\colon \langle V(G_3(x, y)) * \operatorname{sgrad} G_1(x, y),\ \operatorname{sgrad} G_1(x, y)\rangle + $$
$$+ \langle V^*(G_1(x, y)) * \operatorname{sgrad} G_1(x, y),\ \operatorname{grad} G_3(x, y)\rangle\},$$

$$D_\infty^1 = B^{-1}(\{(x, y)\colon \langle \operatorname{grad} G_3(x, y),\ \operatorname{sgrad} G_2(x, y)\rangle = 0\}),$$

$$D_\infty^2 = B^{-1}(\{(x, y)\colon \langle V(G_3(x, y)) * \operatorname{sgrad} G_2(x, y),\ \operatorname{sgrad} G_2(x, y)\rangle + $$
$$+ \langle V^*(G_2(x, y)) * \operatorname{sgrad} G_2(x, y),\ \operatorname{grad} G_3(x, y)\rangle\}).$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1. *Необходимым условием нарушения локальной взаимной однозначности отображения B_i, $i \in I$, в точке (x_0, y_0) является ее принадлеж-*

ность к множеству D_0^1; *достаточным условием — четность порядка касания, которое, в случае если порядок равен* 2, *имеет вид* $(x_0, y_0) \notin D_0^2$.

2. *Необходимым условием разрывности отображения* B_i, $i \in I$, *в точке* $(x_0, y_0) \in K$ *является ее принадлежность к множеству* D_∞^1; *достаточным условием — четность порядка касания, которое в случае, если порядок равен* 2, *имеет вид* $(x_0, y_0) \notin D_\infty^2$.

3. *Если* $(x, y) \in \mathring{K}$, $(u, v) = B_i(x, y)$,

$$\delta(x, y, u, v) = \frac{\langle \operatorname{grad} G_3(x, y),\ \operatorname{sgrad} G_1(x, y)\rangle}{\langle \operatorname{grad} G_3(u, v),\ \operatorname{sgrad} G_2(u, v)\rangle}$$

и если $\delta > 0$ *в некоторой окрестности точки* (x, y), *то ограничение отображения* B_i *на этой окрестности является диффеоморфизмом, не меняющим ориентацию; если* $\delta < 0$ *— меняющим ориентацию.*

Доказательство. Выберем параметризацию K, $\sigma \in R^1$:

$$x = g_1^1(\sigma),$$

$$y = g_2^1(\sigma)$$

и параметризацию P, $\tau \in R^1$:

$$x = g_1^2(\tau),$$

$$y = g_2^1(\tau).$$

Отображение B индуцирует отображение $f\colon \sigma \Rightarrow \tau$. Вычислим производную этого отображения. Из определения следует

$$G_1(g_1(\sigma)) = 0,$$

$$G_2(g_2(\tau)) = 0,$$

$$G_3(g_1(\sigma)) = G_3(g_2(\tau)).$$

Учитывая, что $\tau = f(\sigma)$, получаем систему

$$G_1(g_1(\sigma)) = 0,$$

$$G_2(g_2(f(\sigma))) = 0,$$

$$G_3(g_1(\sigma)) = G_3(g_2(f(\sigma))).$$

Дифференцируя полученные тождества по σ, получаем систему

$$\langle \operatorname{grad} G_1(g_1(\sigma)),\ g_1'(\sigma)\rangle = 0,$$

$$f'(\sigma) * \langle \operatorname{grad} G_2(g_2(\sigma)),\ g_2'(\sigma)\rangle = 0,$$

$$\langle \operatorname{grad} G_3(g_1(\sigma)),\ g_1'(\sigma)\rangle = f'(\sigma) * \langle \operatorname{grad} G_3(g_2(\sigma)),\ g_2'(\sigma)\rangle.$$

В этой системе мы должны исключить векторы $g_1'(\sigma)$, $g_2'(\sigma)$, однако число неизвестных больше числа уравнений, поэтому для наших целей найдем лишь только частное решение для этих векторов , а именно положим

$$g_1'(\sigma) = \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)) \quad \text{и} \quad g_2'(f(\sigma)) = \operatorname{sgrad} G_2(g_2(f(\sigma))).$$

Выбор лишь только частного решения системы обоснован тем, что нас интересуют лишь те характеристики отображения B, которые не зависят от выбора параметризации. Получим

$$f'(\sigma) = \frac{\langle \operatorname{grad} G_3(g_1(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma))\rangle}{\langle \operatorname{grad} G_3(g_2(f(\sigma))),\ \operatorname{sgrad} G_2(g_2(f(\sigma)))\rangle}. \tag{2}$$

Как известно, равенство нулю производной еще не гарантирует нарушение взаимной однозначности отображения f в соответствующей точке, аналогично наличие разрыва в точке еще не гарантирует разрывность функции в этой точке.

Ограничимся рассмотрением достаточного условия экстремальности в точке $\sigma^*: f'(\sigma^*) = 0,\ f''(\sigma^*) = 0$. Для этого нам понадобится вычислить $f''(\sigma^*)$ при условии $f'(\sigma^*) = 0$.

Дифференцируя (2) по σ и полагая в полученном выражении $f'(\sigma) = 0$, $g_1'(\sigma) = \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma))$, $g_2'(\sigma) = \operatorname{sgrad} G_2(g_2(\sigma))$, имеем

$$f''(\sigma) = \frac{\langle V(G_3(g_1(\sigma))) * \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma))\rangle}{\langle \operatorname{grad} G_3(g_2(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_2(g_2(\sigma))\rangle} +$$

$$+ \frac{\langle V^*(G_1(g_1(\sigma))) * \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_3(g_1(\sigma))\rangle}{\langle \operatorname{grad} G_3(g_2(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_2(g_2(\sigma))\rangle}.$$

Таким образом, условие $f''(\sigma) = 0$ в рассматриваемом случае примет вид

$$\langle V(G_3(g_1(\sigma))) * \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma))\rangle +$$

$$+ \langle V^*(G_1(g_1(\sigma))) * \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)),\ \operatorname{grad} G_3(g_1(\sigma))\rangle = 0. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает утверждение 1.

Условия (2) и отрицание (3) есть условие касания второго порядка для кривых, заданных уравнениями

$$G_3(x, y) = G_3(g_1(\sigma)) \text{ и } G_1(x, y) = G_1(g_1(\sigma)) \text{ в точке } (x, y) = g_1(\sigma).$$

При рассмотрении точек разрыва ситуация аналогична, и достаточным условием наличия разрыва есть условие касания второго порядка для кривых, заданных уравнениями

$$G_3(x, y) = G_3(g_2(f(\sigma))) \quad \text{и} \quad G_2(x, y) = G_2(g_2(f(\sigma)))$$

в точке $(x, y) = g_2(\sigma)$.

По аналогии с (3) получим, что аналитически это условие имеет вид

$$\langle \operatorname{grad} G_3(g_2(f(\sigma))),\ \operatorname{sgrad} G_2(g_2(f(\sigma)))\rangle = 0,$$

$$\langle V(G_3(g_1(\sigma))) * \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)),\ \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma))\rangle +$$

$$+ \langle V^*(G_1(g_1(\sigma))) * \operatorname{sgrad} G_1(g_1(\sigma)),\ \operatorname{grad} G_3(g_1(\sigma))\rangle = 0.$$

Из этих условий вытекает утверждение 2.

Утверждение 3 вытекает из рассмотрения формулы (1) для $f'(\sigma)$ и известных теорем анализа, связывающих знак производной дифференцируемой функции и тип ее монотонности.

Полученные результаты применим к исследованию свойств оператора скачка и функций соответствия для двумерных разрывных динамических систем, которые порождаются непрерывными динамическими системами более высокой размерности. Основные определения даны в работе [1].

Теорема 2. *Пусть* (R^2, M, A, R^1, H) — *некоторая двумерная динамическая система с импульсным воздействием, порождаемая специальной сингулярно возмущенной системой с импульсным воздействием, и пусть*

$$M = \{ (x, y) \in D : S(x, y) = 0 \}, \quad A(M) = \{ (x, y) \in D : Q(x, y) = 0 \},$$

отображение A *порождается системой* $\varphi(x) = \varphi(A(x))$ *и* $\varphi \in C^{\infty}(D)$, *отображение* A *можно поднять до отображения прямой в прямую, отображение* H *порождается системой* $\dot{u} = G(u)$ *и* $G \in C^{\infty}(D)$, $u = (x, y)$; L — *функция соответствия для рассматриваемой динамической системы с импульсным воздействием, причем* L *можно поднять до отображения прямой в прямую. Тогда:*

1. *Множество* V_A, *где нарушается локальная взаимная однозначность оператора скачка* A, *определяется как множество решений системы* $\operatorname{grad} \varphi_i(x, y) = \operatorname{grad} S(x, y)$, $i = 1, 2$, *при дополнительном условии*

$$\langle V(\varphi_i(x, y)) * \operatorname{sgrad} S(x, y),\ \operatorname{sgrad} S(x, y) \rangle +$$
$$+ \langle V^*(S(x, y)) * \operatorname{sgrad} S(x, y),\ \operatorname{grad} \varphi_i(x, y) \rangle = 0,$$

где V *и* V^* *определены в условии теоремы* 1.

2. *Множество точек разрыва оператора скачка* $A - R_A$ *определяется как* $A^{-1}(B_1)$, *где* B_1 — *множество решений системы* $\operatorname{grad} \varphi_i(x, y) = \operatorname{grad} Q(x, y)$, $i = 1, 2$, *при дополнительном условии*

$$\langle V(\varphi_i(x, y)) * \operatorname{sgrad} Q(x, y),\ \operatorname{sgrad} Q(x, y) \rangle +$$
$$+ \langle V^*(Q(x, y)) * \operatorname{sgrad} Q(x, y),\ \operatorname{grad} \varphi_i(x, y) \rangle = 0.$$

3. *Множество* V_A, *где нарушается локальная взаимная однозначность функции соответствия, определяется как множество решений системы* $G(x, y) = \operatorname{grad} Q(x, y)$ *при дополнительном условии*

$$\langle V(G(x, y)) * \operatorname{sgrad} Q(x, y),\ \operatorname{sgrad} Q(x, y) \rangle +$$
$$+ \langle V^*(Q(x, y)) * \operatorname{sgrad} Q(x, y),\ G(x, y) \rangle = 0.$$

4. *Множество точек разрыва функции соответствия* $L - R_L$ *определяется как* $L^{-1}(B_2)$, *где* B_2 — *множество решений системы* $G(x, y) = \operatorname{grad} S(x, y)$, *при дополнительном условии*

$$\langle V(G(x, y)) * \operatorname{sgrad} S(x, y),\ \operatorname{sgrad} S(x, y) \rangle +$$
$$+ \langle V^*(Q(x, y)) * \operatorname{sgrad} S(x, y),\ G(x, y) \rangle = 0.$$

5. *Множество точек разрыва функции последования есть множество* $L^{-1}(R_A) \cup R_L$.

6. *Если* $(x, y) \in M$, $(u, v) = A(x, y)$,

$$\delta_A(x, y, u, v) = \frac{\langle \operatorname{grad} \varphi_i(x, y),\ \operatorname{sgrad} S(x, y) \rangle}{\langle \operatorname{grad} \varphi_i(u, v),\ \operatorname{sgrad} Q(u, v) \rangle},$$

где i *равно* 1 *или* 2, *а* $\delta_A > 0$ *в некоторой окрестности точки* (x, y), *то ограничение отображения* A *на этой окрестности является диффеоморфизмом, не меняющим ориентацию; если* $\delta_A < 0$ — *меняющим ориентацию.*

7. *Если* $(x, y) \in A(M)$, $(u, v) = L(x, y)$,

$$\delta_L(x, y, u, v) = \frac{\langle G(x, y),\ \operatorname{sgrad} S(x, y) \rangle}{\langle G(u, v),\ \operatorname{sgrad} Q(u, v) \rangle}$$

и $\delta_L > 0$ в некоторой окрестности точки (x, y), то ограничение отображения L на этой окрестности является диффеоморфизмом, не меняющим ориентацию; если $\delta_L < 0$ — меняющим ориентацию.

Доказательство. Доказательства утверждений 1, 2, 6 следуют из теоремы 1, где следует положить $G_1 = S$, $G_2 = Q$, $G_3 = \varphi_i$, $i = 1, 2$.

Доказательства утверждений 3, 4, 7 также следуют из теоремы 1, где следует положить $G_1 = Q$, $G_2 = S$, $G_3 = G$.

Определение 1. *Пусть M — некоторое множество и $F: M \Rightarrow M$ — отображение, определенное на этом множестве, такое, что множество*

$$Q = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(M) \neq \varnothing.$$

Пусть $x \in Q$. Множество $\{x, F(x), F^2(x), \ldots, F^m(x)\}$ будем называть m-импульсным циклом отображения F, если все его элементы различны и $F^{m+1}(x) = x$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и пусть C — m-импульсный цикл этой системы, (x_i, y_i)— конечные точки скачка для этого цикла, $(u_i, v_i) = L((x_i, y_i))$, $(a_i, b_i) = A((u_i, v_i))$, $\delta_F(x, y, u, v, a, b) \equiv \delta_L(x, y, u, v) * \delta_A(u, v, a, b)$ и*

$$\mu(C) = \prod_{i=1}^{m} \delta_F(x_i, y_i, u_i, v_i, a_i, b_i).$$

Тогда:

1) *если $\mu(C) < 1$, то цикл C устойчив;*
2) *если $\mu(C) = 1$, то цикл C полуустойчив;*
3) *если $\mu(C) > 1$, то цикл C неустойчив.*

Доказательство. Из определений $\mu(C)$ и δ_F, а также из формулы для производной от m-й итерации дифференцируемой функции следует, что число $\mu(C)$ представляет собой значение производной от m-й итерации некоторого отображения прямой в прямую, вычисленную в точке ее m-кратного цикла. Известно, что устойчивость, полуустойчивость, неустойчивость m-кратного цикла гладкого отображения прямой в прямую соответственно эквивалентны условиям $1-3$. Таким образом, из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начального условия и этого утверждения следует утверждение теоремы 3.

1. *Урманчев В. И.* Динамические системы с импульсным воздействием на сфере. – Киев, 1990. – 32 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т математики, № 90.15).

Получено 26.05.99