УДК 517.925

А. О. Игнатьев, Б. И. Коносевич
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ СИСТЕМЫ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

We consider a system of ordinary autonomous differential equations which possesses an invariant set. We obtain sufficient conditions of the stability of this system under continuous perturbations.

Розглядається система звичайних автономних диференціальних рівнянь, яка має інваріантну множину. Одержано достатні умови її стійкості при постійно діючих збуреннях.

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{1}$$

где $x, X \in R^n$. Предположим, что система (1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений в области

$$x \in B_{H_1} = \left\{ x \in R^n : \|x\| < H_1 \right\}. \tag{2}$$

В работах [1 – 7] определено понятие интегрального множества системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае, когда система уравнений автономна, т. е. имеет вид (1), можно определить понятия инвариантного множества $M \subset B_{H_1}$, притяжения, устойчивости и асимптотической устойчивости M согласно [2, 6].

Отметим, что в приложениях часто встречаются системы, все особенности которых сосредоточены на асимптотически устойчивых инвариантных множествах (примером таких систем служат диссипативные системы). Этим объясняется интерес к их исследованию [1].

Пусть $M \subset R^n$ — инвариантное множество уравнений (1). Обозначим через $\rho(x, M)$ расстояние от точки x до множества M; $S(M, r) = \left\{ x \in R^n : \rho(x, M) < r \right\}$ — r-окрестность M.

Будем рассматривать, следуя А. М. Ляпунову, вещественные функции $v(x)$ переменных x, определенные и непрерывно дифференцируемые в области

$$U_H(M) = \left\{ x \in R^n : x \in S(M, H) \right\},$$

причем $U_H(M) \subset B_{H_1}$, где B_{H_1} — множество, определенное условием (2). Будем предполагать, если не оговорено противное, выполнение равенства

$$v(x) = 0 \text{ при } x \in \overline{M}. \tag{3}$$

В работах [2, 6] даны определения функций знакопостоянных и знакоопределенных относительно M.

Наряду с дифференциальными уравнениями (1) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + R(t, x), \tag{4}$$

в которой $R = (R_1, \ldots, R_n)$. Предположим, что правые части системы (4) в области (2) непрерывны и удовлетворяют условиям существования единственного решения с заданными начальными условиями; решения систем (1) и (4) определены для всех значений $x \in U_H(M)$.

Определение 1. *Инвариантное множество M назовем устойчивым при постоянно действующих возмущениях (п. д. в.), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\eta_1(\varepsilon) > 0$ и $\eta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что всякое решение уравнений* (4) *с начальными значениями, удовлетворяющими условию $x_0 \in S(M, \eta_1)$ при произвольных R_s, которые в области $t \geq 0$, $x \in S(M, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенству $\|R(t, x)\| < \eta_2$, удовлетворяет при всех $t > 0$ условию $x(t) \in S(M, \varepsilon)$.*

В этом определении предполагается, что п. д. в. и соответствующие функции R_s малы при всех $t \geq 0$ в окрестности M. Однако, как указано в работах [7 – 9], интересны случаи, когда функции, характеризующие п. д. в., не будут малыми при всех $t \geq 0$ а интервалы времени, когда они не малы, будут достаточно малыми. Введем следующее определение.

Определение 2. *Инвариантное множество M уравнений* (1) *называется устойчивым при п. д. в., ограниченных в среднем, если для любой пары положительных чисел ε, T можно указать два таких числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что при выполнении неравенства*

$$\int_t^{t+T} \varphi(s)\,ds < \eta,$$

где $\varphi(t)$ — какая-либо непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\|R(t, x)\| \leq \varphi(t) \quad при \quad x \in S(M, \varepsilon),$$

каждое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (4) *с начальными данными $x_0 \in S(M, \delta)$ удовлетворяет условию $x(t) \in S(M, \varepsilon)$ при всех $t \geq 0$.*

В работе [7] доказана теорема, которая применительно к инвариантным множествам систем автономных дифференциальных уравнений может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть на множестве $U_H(M)$ существует функция $v(x)$, имеющая ограниченные частные производные и удовлетворяющая условиям*

$$a(\rho(x, M)) \leq v(x) \leq b(\rho(x, M)),$$

$$\frac{dv}{dt} \leq -c(\rho(x, M)),$$

где a, b, c — функции Хана [4]. *Тогда инвариантное множество M устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем.*

Целью настоящей работы является получение условий, при которых инвариантное множество остается устойчивым при п. д. в., ограни[illegible]нных в среднем, функция v положительно определена относительно M, но ее производная в силу системы (1) не есть отрицательно-определенная, а лишь отрицательно-постоянная функция.

Пусть $v(x)$ — определенно-положительная относительно M функция, имеющая в области $U_H(M)$ знакопостоянную отрицательную производную

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i$$

относительно M в силу системы (1). Обозначим

$$Q = \left\{ x \in U_H(M) \setminus \overline{M} : \frac{dv}{dt} = 0 \right\}.$$

Тогда можно сформулировать следующий критерий асимптотической устойчивости инвариантного множества M.

Теорема 2. *Если в области $U_H(M)$ для дифференциальных уравнений* (1) *существует определенно-положительная относительно M функция v такая, что ее производная dv / dt удовлетворяет в этой области условиям:*

1) $dv / dt < 0$ *вне* Q;
2) $dv / dt < 0$ *на* Q,

причем множество Q не содержит целых полутраекторий $x(t)$ системы при $t \in (0; \infty)$, то инвариантное множество M устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем.

Доказательство. Факт устойчивости M следует из работы [7]. Это означает, что выбирая произвольно малое $\varepsilon > 0$, можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x_0 \in S(M, \delta)$ выполняется неравенство $\rho(x(t), M)) < \varepsilon$ при $t > 0$. Покажем, что любая траектория $x(t) = x(x_0, t)$ будет неограниченно приближаться к M, если $x(0) = x_0$ удовлетворяет указанному условию. Это будет означать, что исследуемое инвариантное множество является притягивающим. Для притяжения инвариантного множества M достаточно показать, что для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ не существует траектории с начальными значениями $x_0 \in S(M, \delta)$ такой, что $\rho(x(t), M)) > \eta$ при всех $t \geq$ ≥ 0. Чтобы это доказать, применим метод, предложенный в работах [8, 10]. Предположим от противного, что такая траектория существует. По условию теоремы функция $v(x(t))$ не возрастает, так как ее производная неположительна. Учитывая, что она ограничена снизу $(v(x(t)) \geq 0)$, заключаем, что существует предел

$$\lim_{t \to \infty} v(x(t)) = v_0,$$

причем для любого $t \in (0; \infty)$ справедливо неравенство

$$v(x(t)) \geq v_0.$$

Покажем, что $v_0 = 0$. Предположим противное, т. е. $v_0 > 0$. Пусть T обозначает произвольное положительное число. Рассмотрим последовательность точек $x^{(k)} = x(kT)$, $k = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность ограничена, следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\left\{x^{(k_l)}\right\}$, сходящуюся к точке x^*. Вследствие непрерывности функции v имеем $v_0 = v(x^*)$. Рассмотрим теперь полутраекторию $x(x^*, t)$ системы (1) $\left(x(x^*, 0) = x^*\right)$ при $t \in (0; \infty)$. По условию теоремы эта траектория не может при всех $t \in (0; \infty)$ принадлежать множеству Q, где производная dv / dt обращается в нуль. Следовательно, на полутраектории $x(x^*, t)$ существуют точки, где $dv(x^*, t) / dt < 0$, т. е. можно указать такой момент $\tau > 0$, когда $v\left(x(x^*, \tau)\right) = v_1 < v_0$.

Поскольку подпоследовательность $\left\{x^{(k_l)}\right\}$ сходится к точке x^*, вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных можно записать неравенство

$$\left\| x(x^*, \tau) - x\left(x^{(k_l)}, \tau\right) \right\| < \gamma$$

при всех $k_l > N(\gamma)$, каково бы ни было наперед заданное число $\gamma > 0$. Следовательно,

$$\lim_{k_l \to \infty} v\left(x\left(x^{(k_l)}, \tau\right)\right) = v_1. \tag{5}$$

Правые части системы (1) не зависят от времени t, поэтому $x^{(k_l)}(\tau) = x(\tau + k_l T)$ и предельное соотношение (5) можно записать таким образом:

$$\lim_{k_l \to \infty} v\left(x(\tau + k_l T)\right) = v_1. \tag{6}$$

Равенство (6) противоречит соотношению $v(x(t)) \geq v_1$, следовательно, допущение $v_0 > 0$ неверно. Это означает, что $v_0 = 0$, т. е.

$$\lim_{t \to \infty} v(x(t)) = 0$$

и

$$\lim_{t \to \infty} \rho(x(t), M) = 0.$$

Следовательно, инвариантное множество M является притягивающим, что и требовалось доказать. Таким образом, показано, что M — это асимптотически устойчивое инвариантное множество системы (1). Согласно следствию работы [11] в области $U_H(M)$, $h < H$, существует определенно-положительная относительно M функция $V(x)$, имеющая определенно-отрицательную относительно M производную dV/dt в силу уравнений (1). Тогда согласно теореме 4 работы [7] заключаем, что инвариантное множество M системы (1) устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем. Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий теоремы 2 инвариантное множество M также устойчиво при п. д. в. (малых) [7].

Сформулируем теперь теорему о неустойчивости инвариантного множества.

Теорема 3. *Если дифференциальные уравнения* (1) *таковы, что в области* $U_H(M)$ *существует непрерывно дифференцируемая функция* $v(x)$, *удовлетворяющая условию* (3), *такая, что ее производная* dv/dt *удовлетворяет условиям:*

1) $\dfrac{dv}{dt} > 0$ *вне* Q;

2) $\dfrac{dv}{dt} = 0$ *на* Q,

где Q — *множество, не содержащее целиком полутраектрий системы* (1), *и если при этом существуют точки, лежащие в сколь угодно малой окрестности множества* M, *такие, что в них* $v > 0$, *то инвариантное множество* M *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0; \infty)$. Возьмем сколь угодно малое $\delta > 0$ и выберем x_0, удовлетворяющее условиям $x_0 \in S(M, \delta)$, $v(x_0) > 0$. Существование такого x_0 следует из условий теоремы. Из непрерывности функции $v(x)$ следует существование положительного числа η такого, что $v(x) < v(x_0)$ для любого $x \in S(M, \eta)$. Функция $v\left(x(x_0, t)\right)$ при возрастании времени не убывает, т. е. $v\left(x(x_0, t)\right) \geq v(x_0)$ при $t > 0$. Это означает, что $\rho(x(t), M) \geq \eta$ при $t > 0$. Покажем, что существует такой момент времени t_1, что $\rho(x(t_1), M) > \varepsilon$. Предположим противное, что при любом $t > 0$ выполняются соотношения

$$\eta \leq \rho(x(t), M) \leq \varepsilon. \tag{7}$$

Теперь, используя неравенства (7) при $t > 0$ и условия, что никакая полутраектория системы (1) не принадлежит множеству Q, приходим к противоречию точно так же, как при доказательстве предыдущей теоремы. Дословное повторение этих рассуждений здесь опустим. Противоречие и доказывает, что траектория $x(t)$ покидает область $S(M, \varepsilon)$. Теорема доказана.

В качестве иллюстрации к теоремам 2, 3 рассмотрим следующие примеры.

***Пример* 1.** Пусть система (1) имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -y + \frac{1}{2}x(1 - x^2 - y^2), \qquad \frac{dy}{dt} = x. \tag{8}$$

Уравнения (8) имеют инвариантное множество

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{9}$$

Покажем, что оно устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем. Для этого рассмотрим функцию $v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1)^2$, которая определенно положительна относительно инвариантного множества (9). Ее производная

$$\frac{dv}{dt} = -x^2(x^2 + y^2 - 1)^2$$

в окрестности инвариантного множества (9) неположительна и множество $Q = \{ y \in R;\ x = 0 \}$ в достаточно малой окрестности (9) не содержит целых полутраекторий уравнений (8). Следовательно, на основании теоремы 2 можно утверждать, что инвариантное множество (9) системы (8) устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем.

***Пример* 2.** Аналогично, рассматривая систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \frac{1}{2}x(x^2 + y^2 - 1), \qquad \frac{dy}{dt} = x,$$

убеждаемся, что на основании теоремы 4 ее инвариантное множество (9) неустойчиво.

1. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304с.
2. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М., 1973. – 512 с.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
5. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
6. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.
7. *Игнатьев А. О.* Применение прямого метода Ляпунова к исследованию интегральных множеств // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1342 – 1348.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.:Физматгиз, 1959. – 211 с.
9. *Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. – 1957. – **21**, вып. 6. – С. 769 – 774.
10. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, вып. 3. – С. 453 – 456.
11. *Игнатьев А. О.* О существовании функций Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 932 – 941.

Получено 21.07.97,
после доработки — 16.01.98