УДК 517.5

В. А. Андриенко (Южно-укр. пед. ун-т, Одесса)

О ПОРЯДКЕ РОСТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ СУММ ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ*

Estimates of a growth order of rectangular partial sums of double orthogonal series are obtained. The fact that these estimates cannot be improved on the set of all double orthogonal systems is established.

Отримано оцінки порядку зростання прямокутних часткових сум подвійних ортогональних рядів. Встановлено їх остаточність на множині всіх подвійних ортогональних систем.

1. Введение. В настоящей статье результаты В. И. Коляды [1, с. 38 – 44] переносятся на двойные ортогональные ряды.

Пусть $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство с положительной мерой, $Z_+^2 = \{ n = (n_1, n_2)\}$ — множество точек плоскости с целыми неотрицательными координатами, $\varphi = \{ \varphi_n(x),\ n \in Z_+^2\}$ — двойная ортонормированная система (ОНС) на X, а Φ — множество всех таких систем, $\{ a_n,\ n \in Z_+^2\}$ — двойная последовательность действительных чисел. Положим для точек $m, n, N \in Z_+^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$, по определению, $m \pm n = (m_1 \pm n_1, m_2 \pm n_2)$, $\|x\| = x_1 x_2$, $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2})$, если $x_i^2 + \alpha_i^2 > 0$ $(i = 1, 2)$, $N = (N, N)$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$, и условимся, что $m \le n$ тогда и только тогда, когда $m_i \le n_i$ $(i = 1, 2)$, и, следовательно, $n \ge 0 \Leftrightarrow n \in Z_+^2$. Кроме того, обозначим $\rho(n) = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.

Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{n \ge 0} a_n \varphi_n(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

который может расходиться на множестве положительной меры. Изучим задачу о порядке роста его прямоугольных частных сумм

$$s_n(x) = \sum_{m \le n} a_m \varphi_m(x), \quad m, n \in Z_+^2,$$

в зависимости от порядка убывания или возрастания коэффициентов ряда (1). В настоящее время известны лишь частные случаи решения этой задачи (см. [2, 3]). Здесь мы приведем, на наш взгляд, исчерпывающие и окончательные результаты.

Условимся в дальнейшем для заданной двойной последовательности функций $\{ f_n(x),\ n \in Z_+^2\}$ из L^2 и заданной двойной последовательности $\{\gamma_n,\ n \in Z_+^2\}$ положительных чисел писать $f_n(x) = o_x(\gamma_n^{-1})$, если $\gamma_n f_n(x) \to 0$ п. в.,

* Частично поддержана грантом № APU 061002 Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук в Украине.

когда $\max(n_1, n_2) \to \infty$ (или когда $\min(n_1, n_2) \to \infty$) и существует функция $F(x) \in L^2(X)$ такая, что

$$\sup_n \gamma_n |f_n(x)| \le F(x) \quad \text{п.в. на } X.$$

Для двойной последовательности $\{\lambda(n),\, n \in Z_+^2\}$ будем писать

$$\Delta_{10}\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) - \lambda(n_1+1, n_2), \qquad \Delta_{01}\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) - \lambda(n_1, n_2+1),$$

$$\Delta_{11}\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) - \lambda(n_1+1, n_2) - \lambda(n_1, n_2+1) + \lambda(n_1+1, n_2+1)$$

и будем говорить, что $\{\lambda(n)\}$ не возрастает, если $\Delta_{10}\lambda(n) \ge 0$ и $\Delta_{01}\lambda(n) \ge 0$ для всех $n \ge 0$; $\{\lambda(n)\}$ строго убывает, если $\Delta_{10}\lambda(n) > 0$ и $\Delta_{01}\lambda(n) > 0$ для всех $n \ge 0$; $\{\lambda(n)\}$ не убывает, если $\Delta_{10}\lambda(n) \le 0$ и $\Delta_{01}\lambda(n) \le 0$ для всех $n \ge 0$; $\{\lambda(n)\}$ строго возрастает, если $\Delta_{10}\lambda(n) < 0$ и $\Delta_{01}\lambda(n) < 0$ для всех $n \ge 0$. Последовательность $\{\lambda(n)\}$ называют выпуклой, если $\Delta_{11}\lambda(n) \ge 0$ для всех $n \ge$ ≥ 0.

Пусть $\{\nu_{n_i}\}$, $i = 1, 2$; $n_i = 0, 1, \ldots$; $\nu_0 = 0$, — строго возрастающие последовательности целых чисел. Тогда двойную последовательность $\{\nu_n =$ $= (\nu_{n_1}, \nu_{n_2}),\, n \in Z_+^2\}$ будем называть решеткой в Z_+^2. Рассмотрим строго возрастающую и непрерывную по каждой координате вектор-функцию $\nu(t) =$ $= (\nu_1(t_1), \nu_2(t_2))$ такую, что $\nu(n) = \nu_n$, и однозначно определенную обратную вектор-функцию $\nu^{-1}(t) = (\nu_1^{-1}(t_1), \nu_2^{-1}(t_2))$. Обозначив через $[x]$ целую часть числа x, положим

$$q_n = \left([\nu_1^{-1}(n_1)], [\nu_2^{-1}(n_2)]\right) \equiv (q_{n_1}, q_{n_2}) \tag{2}$$

$$\mu(n) = \nu_{n+1} - \nu_n \equiv (\mu_1(n_1), \mu_2(n_2)) = (\nu_{n_1+1} - \nu_{n_1}, \nu_{n_2+1} - \nu_{n_2}). \tag{3}$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть сходится двойной числовой ряд с неотрицательными членами*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}. \tag{4}$$

Тогда существуют такие последовательности

$$0 < l_1(i) \uparrow \infty, \qquad 0 < l_2(k) \uparrow \infty, \tag{5}$$

что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\, l_1(i) l_2(k) \tag{6}$$

сходится.

Доказательство. Если ряд (4) не содержит отличных от нуля членов, либо таковых конечное число, то в качестве $l_1(i)$ и $l_2(k)$ можно взять любые последовательности (5).

Пусть теперь ряд (4) содержит бесконечное число членов $a_{ik} > 0$. Рассмотрим три взаимоисключающих случая: 1) $a_{ik} = 0$ для всех $i \ge i_0 \ge 1$, $k \ge 0$, а элементы $a_{ik} > 0$ для бесконечного множества индексов (i, k), попадающих в „полосу" $i < i_0$, $k \ge 0$; 2) $a_{ik} = 0$ для всех $i \ge 0$, $k \ge k_0 \ge 1$, а элементы $a_{ik} > 0$ для бесконечного множества индексов (i, k), попадающих в полосу $i \ge 0$, $k <$ $< k_0$; 3) для любого $i \ge 1$ найдется $k = k(i) \ge 0$ такое, что $a_{ik} > 0$, и для любого $k \ge 1$ найдется $i = i(k) \ge 0$ такое, что $a_{ik} > 0$.

Рассмотрим сначала последний случай. Поскольку сходится ряд (4), сходятся повторные ряды

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\Big), \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ik}\Big).$$

Далее, в случае 3 имеем

$$\sum_{m=i+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} > 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{mn} > 0 \quad \forall\, i \ge 0, \quad k \ge 0.$$

Тогда, согласно теореме Дини, для любого $\alpha \in (0, 1)$ сходятся ряды

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\Big(\sum_{m=i+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\Big)^{-\alpha}\Big\},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\sum_{i=0}^{\infty} a_{ik}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{mn}\Big)^{-\alpha}\Big\}.$$

Полагая

$$m_1(i) = \Big(\sum_{m=i+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\Big)^{-\alpha}, \quad m_2(k) = \Big(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{mn}\Big)^{-\alpha},$$

видим, что $0 < m_1(i) \uparrow \infty$, $0 < m_2(k) \uparrow \infty$ и сходятся повторные ряды

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} m_1(i) a_{ik}\Big), \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} m_2(k) a_{ik}\Big),$$

а следовательно, сходится двойной ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}[m_1(i) + m_2(k)]a_{ik}.$$

Поскольку

$$m_1(i) + m_2(k) \ge 2\sqrt{m_1(i)m_2(k)},$$

то, полагая

$$l_1(i) = \sqrt{2m_1(i)}, \quad l_2(k) = \sqrt{2m_2(k)},$$

получаем, что выполняются условия (5) и сходится ряд (6), что и требовалось доказать.

В случае 1 очевидно, что в качестве $l_1(i)$ можно взять любую последовательность $l_1(i)$ из (5), а в качестве $l_2(k)$ — последовательность $m_2(k)$. Аналогично, в случае 2 в качестве $l_2(k)$ можно взять любую последовательность $l_2(k)$ из (5), а в качестве $l_1(i)$ — последовательность $m_1(i)$.

Лемма 2. *Пусть положительная последовательность* $\{\lambda(n), n \in Z_+^2\}$ *такова, что*

$$L(n) \equiv \|\ln(n+2)\| / \lambda(n) \uparrow \infty$$

и для данной последовательности $\{a_n, n \in Z_+^2\}$

$$\sum_{n \ge 0} a_n^2 \lambda^2(n) < \infty.$$

Тогда существует положительная последовательность $\{\Lambda(n), n \in Z_+^2\}$ *такая, что*

$$\Lambda(n)/\lambda(n)\uparrow\infty, \tag{7}$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2\Lambda^2(n) < \infty, \tag{8}$$

$$\|\ln(n+2)\|/\Lambda(n)\uparrow\infty \quad \text{и выпукла.} \tag{9}$$

Доказательство. Согласно лемме 1, найдутся две последовательности $0 < l_i(n_i)\uparrow\infty$, $i=1,2$; $n_i=0,1,\ldots$, такие, что

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2\lambda^2(n)l_1^2(n_1)l_2^2(n_2) < \infty. \tag{10}$$

Рассмотрим класс функций Ψ, определенных на полуоси $[0,+\infty)$:

$$\Psi = \{\psi(x):\ \psi(x)>0,\ \psi(x)\uparrow+\infty,\ \psi(x)x^{-1}\downarrow 0 \text{ при } x\to\infty\}, \tag{11}$$

и его подкласс

$$\Psi_0 = \{\psi\in\Psi:\ \psi(L(n)) = L(n)\varepsilon_1(n_1)\varepsilon_2(n_2),\ 0<\varepsilon_i(n_i)\downarrow 0$$

$$\text{при } n_i\to\infty,\ \varepsilon_i(n_i)\leq\sqrt{\lambda(n)}\,l_i(n_i)/\ln(n_i+2),\ i=1,2\}. \tag{12}$$

Тогда (см. (10)–(12)) для последовательности

$$\Lambda(n) = \lambda(n)\psi(L(n))$$

выполняются условия (7)–(9). Действительно,

$$\Lambda(n)/\lambda(n) = \psi(L(n))\uparrow\infty.$$

Далее,

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2\Lambda^2(n) = \sum_{n\geq 0} a_n^2\lambda^2(n)L^2(n)\varepsilon_1^2(n_1)\varepsilon_2^2(n_2) \leq \sum_{n\geq 0} a_n^2\lambda^2(n)l_1^2(n_1)l_2^2(n_2) < \infty.$$

Наконец, последовательность

$$\|\ln(n+2)\|/\Lambda(n) = \|\ln(n+2)\|/\lambda(n)L(n)\varepsilon_1(n_1)\varepsilon_2(n_2) =$$

$$= 1/\varepsilon_1(n_1)\varepsilon_2(n_2)\uparrow\infty$$

и выпукла как произведение возрастающих последовательностей $1/\varepsilon_i(n_i)$, $i = 1,2$.

Лемма 3. *Пусть положительная последовательность* $\{\lambda(n),\ n\in Z_+^2\}$ *строго возрастает к* ∞. *Тогда условие*

$$\lambda(n+1) = O\{\lambda(n)\},\quad n\in Z_+^2, \tag{13}$$

необходимо и достаточно для существования решетки $\{\nu_n = (\nu_{n_1}, \nu_{n_2}),\ n\in Z_+^2\}$, *удовлетворяющей условиям*

$$\nu_{n+1}-\nu_n\geq 4,\quad n\geq 0,$$

$$1 < p \leq \frac{\lambda(\nu_{n_1+1}, m_2)}{\lambda(\nu_{n_1}, m_2)} \leq r,\qquad 1 < p \leq \frac{\lambda(m_1, \nu_{n_2+1})}{\lambda(m_1, \nu_{n_2})} \leq r \tag{14}$$

для любых $(m_1, m_2)\in Z_+^2$.

Доказательство. *Необходимость* условия (13) очевидна, докажем его *достаточность*. Пусть $\lambda(t_1,t_2)$ — строго возрастающая по каждой переменной, непрерывная функция, являющаяся продолжением последовательности $\lambda(n_1,n_2)$ на квадрант $t_1\geq 0$, $t_2\geq 0$. Согласно условию, существует постоянная $C>1$ такая, что для всех $n\in Z_+^2$

$$\lambda(n_1+1, n_2+1) \le C\lambda(n_1, n_2).$$

Положим

$$\beta(t_1, t_2) = \frac{1}{5}\log_C \lambda(t_1, t_2).$$

Тогда

$$\beta(n_1+1, n_2) - \beta(n_1, n_2) = \frac{1}{5}\log_C \frac{\lambda(n_1+1, n_2)}{\lambda(n_1, n_2)} \le \frac{1}{5},$$

$$\beta(n_1, n_2+1) - \beta(n_1, n_2) = \frac{1}{5}\log_C \frac{\lambda(n_1, n_2+1)}{\lambda(n_1, n_2)} \le \frac{1}{5}.$$

Рассмотрим функцию $\beta(t_1, t_2)$, зафиксировав одну из переменных, например $t_2 = n_2^0$. Функция

$$B(t_1) = \beta(t_1, n_2^0) = \frac{1}{5}\log_C \lambda(t_1, n_2^0)$$

строго возрастает и, следовательно, имеет однозначно определенную обратную функцию $\nu(t_1)$. Положим $\nu_{n_1} = [\nu(n_1)]$, где $[x]$ означает целую часть числа x. Тогда

$$B(\nu_{n_1}) = B(\nu(n_1) - \delta_{n_1}) \le B(\nu(n_1)) = n_1, \quad 0 \le \delta_{n_1} < 1,$$

$$B(\nu_{n_1}) \ge B(\nu(n_1) - \delta_{n_1} + 1) - \frac{1}{5} \ge B(\nu(n_1)) - \frac{1}{5} = n_1 - \frac{1}{5}.$$

Из этих неравенств вытекает

$$\frac{4}{5} \le B(\nu_{n_1+1}) - B(\nu_{n_1}) \le \frac{6}{5}$$

и

$$C^4 \le \lambda(\nu_{n_1+1}, n_2^0) / \lambda(\nu_{n_1}, n_2^0) \le C^6.$$

Кроме того, поскольку

$$B(\nu_{n_1+1}) - B(\nu_{n_1}) = \sum_{k=\nu_{n_1}}^{\nu_{n_1+1}-1} \left[\beta(k+1, n_2^0) - \beta(k, n_2^0)\right] \le \frac{1}{5}(\nu_{n_1+1} - \nu_{n_1}),$$

то для каждого $n_1 = 0, 1, \ldots$ выполняется неравенство

$$\nu_{n_1+1} - \nu_{n_1} \ge 5\left[B(\nu_{n_1+1}) - B(\nu_{n_1})\right] \ge 4.$$

Аналогично определяется последовательность $\{\nu_{n_2}\}$ и устанавливаются неравенства

$$C^4 \le \lambda(n_1^0, \nu_{n_2+1}) / \lambda(n_1^0, \nu_{n_2}) \le C^6 \quad \text{и} \quad \nu_{n_2+1} - \nu_{n_2} \ge 4.$$

В итоге решетка $\{\nu_{n_1} = (\nu_{n_1}, \nu_{n_2})\}$ является искомой.

3. Основные результаты. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\{m_n,\ n \in Z_+^2\}$ *— решетка в* Z_+^2, *а последовательность* $\{\lambda(n) > 0,\ n \in Z_+^2\}$ *такова, что*

$$\lambda(m_n) / \|\ln(n+2)\| \downarrow 0. \tag{15}$$

1. *Если*

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2 \lambda^2(n) < \infty, \tag{16}$$

то для любой ОНС $\varphi \in \Phi$

$$s_{m_n}(x) = o_x\{\|\ln(n+2)\| / \lambda(m_n)\}, \tag{17}$$

когда $\max(n_1, n_2) \to \infty$ (*и, значит, когда* $\min(n_1, n_2) \to \infty$).

2. *Если* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — *пространство с конечной, положительной неатомической мерой и* $\lambda(n) \geq q > 0$ *для всех* $n \geq 0$, *то для любой положительной последовательности* $\{v(n),\ n \in Z_+^2\}$, $v(n) = o(\|\ln(n+2)\|)$, *когда* $\max(n_1, n_2) \to \infty$, *существует ортогональный ряд* (1), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (16) *и для всех* $x \in X$

$$\limsup_{\max(n_1,n_2)\to\infty} \lambda(m_n)[v(n)]^{-1} s_{m_n}(x) = \infty.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай $m_n = n$. Согласно лемме 2, существует положительная последовательность $\{\Lambda(n),\ n \in Z_+^2\}$, удовлетворяющая условиям (7)–(9). На основании обобщенной теоремы Меньшова–Радемахера (см., например, [4], следствие 2), в силу (8), для любой ОНС $\varphi \in \Phi$ п. в. регулярно сходится ряд

$$\sum_{n\geq 0} a_n \Lambda(n) \|\ln(n+2)\|^{-1} \varphi_n(x).$$

Отсюда и из (9), согласно лемме Кронекера–Морица (см. [3], теорема 1), следует (см. также (7)) оценка (17):

$$s_n(x) = o_x\{\|\ln(n+2)\| / \Lambda(n)\} = o_x\{\|\ln(n+2)\| / \lambda(n)\}, \quad \max(n_1, n_2) \to \infty.$$

В случае произвольной решетки $\{m_n\}$ доказательство аналогично доказательству ч. 1 теоремы 3 из [5, с. 1313–1314].

2. В случае, когда последовательность $\{\lambda(n)\}$ отделена от нуля, докажем окончательность оценки (17), т. е. утверждение 2 теоремы. Заметим, что соответствующее утверждение для однократных рядов верно (см. [1], теорема 8) не только на отрезке $[a, b]$, но и в случае произвольного пространства $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ с конечной положительной, неатомической мерой (см. [6], замечание 1). Поэтому полагая

$$\omega(n_1) = v(n_1, 2), \quad \lambda_1(n_1) = \lambda(n_1, 2),$$

видим, что $\lambda_1(n_1) \geq q > 0$ и $\omega(n_1) = o(\ln(n+2))$ и, следовательно, найдется ортогональный ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1} \Phi_{n_1}(x) \tag{18}$$

такой, что

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1}^2 \lambda_1^2(n_1) < \infty$$

и для всех $x \in X$

$$\limsup_{n_1\to\infty} \frac{\lambda_1(n_1)}{\omega(n_1)} |s_{n_1}(x)| = \limsup_{n_1\to\infty} \left|\sum_{k_1=0}^{n_1} c_{k_1} \Phi_{k_1}(x)\right| = \infty.$$

Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{n\geq 0} a_n \varphi_n(x), \tag{19}$$

полагая

$$a_n = a_{n_1 n_2} = \begin{cases} c_{n_1}, & \text{если} \quad n_2 = 2; \\ & \qquad\qquad n_1 = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{если} \quad n_2 \neq 2, \end{cases}$$

и определим двойную ОНС $\{\varphi_n(x) = \varphi_{n_1 n_2}(x)\}$ на X так же, как в теореме 3 из [6], расположив ее в виде матрицы $(\varphi_{n_1 n_2}(x))$, $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, произвольным образом так, чтобы для элементов строки $n_2 = 2$ выполнялось условие

$$\varphi_{n_1, 2}(x) = \Phi_{n_1}(x), \quad n_1 = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда двойной ряд (19) по этой системе совпадает на X с однократным рядом (18) и поэтому его частная сумма $s_n(x) = s_{n_1}(x)$, если $n \geq 2$, а коэффициенты удовлетворяют условию (16). Далее, для любого $x \in X$ имеем

$$\limsup_{\max(n_1, n_2)\to\infty} \frac{\lambda(n)}{\upsilon(n)} |s_n(x)| \geq \limsup_{n_1\to\infty} \frac{\lambda_1(n_1)}{\omega(n_1)} |s_{n_1}(x)| = \infty.$$

В случае произвольной решетки $\{m_n\}$, используя рассмотренный случай $m_n = n$, применяем схему доказательства ч. 3 теоремы 3 из [5].

Замечания. 1. Если $m_n = n$, то в случае $\{a_n\} \in l^2$ и $\lambda(n) \equiv 1$ получим частный результат Морица [2], а в случае, когда $a_n = 1$ для всех $n \geq 0$, а вместо $\lambda(n)$ взято $\lambda^{-1}(n) \| \ln(n+2) \|$, где $\lambda(n) \uparrow \infty$ и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям регулярности, — частный результат Морица [3].

2. В условиях теоремы 1 последовательность $\ln n$ можно заменить любой последовательностью $\alpha(n) \uparrow \infty$, имеющей тот же порядок роста.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда $\lambda(n) \to 0$, $\max(n_1, n_2) \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть строго возрастающая к* ∞ *последовательность* $\{0 < \lambda(n),\ n \in Z_+^2\}$ *и решетка* $\{m_n,\ n \in Z_+^2\}$ *таковы, что* $\Lambda(n) = \lambda(m_n)$ *удовлетворяет условию* (13), *решетка* $\{\nu_n,\ n \in Z_+^2\}$ *определена по* $\Lambda(n)$ *неравенствами* (14), *а последовательности* $\{q_n,\ n \in Z_+^2\}$ *и* $\{\mu(n),\ n \in Z_+^2\}$ *определены соответственно в* (2) *и* (3).

1. *Если*

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2 \lambda^{-2}(n) < \infty, \tag{20}$$

то для прямоугольных частных сумм $s_n(x)$ *ряда* (1) *по любой ОНС* $\varphi \in \Phi$ *п. в. на* X *верна оценка*

$$s_{m_n}(x) = o_x\{\lambda(m_n) \| \ln \mu(q_n) \|\}, \quad \max(n_1, n_2) \to \infty. \tag{21}$$

2. *Если* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — *пространство с конечной, положительной, неатомической мерой, то для любой последовательности* $\omega(n_1, n_2) \to \infty$, *когда* $\max(n_1, n_2) \to \infty$, *найдется ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (20), *такой, что всюду на* X

$$\limsup_{\max(n_1, n_2)\to\infty} \frac{\omega(n)}{\lambda(m_n) \| \ln \mu(q_n) \|} |s_{m_n}(x)| = \infty. \tag{22}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай $m_n = n$. Поскольку из определения (2) последовательности $\{q_n\}$ вытекают неравенства

$$\nu_{q_n} \le n < \nu_{q_n+1}, \quad n \in Z_+^2,$$

то

$$s_n(x) = s_{\nu_{q_n}}(x) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{m \in Q_i(n)} a_m \varphi_m(x), \tag{23}$$

где

$$Q_1(n) = \{m \in Z_+^2, \ \nu_{q_{n_1}} \le m_1 \le n_1, \ 0 \le m_2 \le \nu_{q_{n_2}}\},$$

$$Q_2(n) = \{m \in Z_+^2, \ 0 \le m_1 \le \nu_{q_{n_1}}, \ \nu_{q_{n_2}} + 1 \le m_2 \le n_2\},$$

$$Q_3(n) = \{m \in Z_+^2, \ \nu_{q_{n_1}} + 1 \le m_1 \le n_1, \ \nu_{q_{n_2}} + 1 \le m_2 \le n_2\}.$$

В силу (14) и (20) имеем (здесь и далее интегралы берутся по X)

$$\sum_{n \ge 0} \lambda^{-2}(\nu_{q_n}) \int s_{\nu_{q_n}}^2(x)\, d\mu(x) = \sum_{n \ge 0} \lambda^{-2}(\nu_{q_n}) \sum_{m \le \nu_{q_n}} a_m^2 =$$

$$= \sum_{m \ge 0} a_m^2 \sum_{\nu_{q_n} \ge m} \lambda^{-2}(\nu_{q_n}) = O(1) \sum_{m \ge 0} a_m^2 \lambda^{-2}(m) < \infty.$$

Отсюда согласно теореме Леви выводим, что при $\max(n_1, n_2) \to \infty$

$$s_{\nu_{q_n}}(x) = o_x\{\lambda(\nu_{q_n})\} = o_x\{\lambda(n)\}. \tag{24}$$

В силу обобщенной леммы Меньшова – Радемахера [7], для любого $n \in Z_+^2$ существует функция $\delta_n(x) \ge 0$ такая, что (см. (3))

$$\max\left\{\left|\sum_{m \in Q_3(n)} a_m \varphi_m(x)\right|, \ \nu_{q_n} \le n < \nu_{q_n+1}\right\} \le \delta_n(x)$$

и

$$\int \delta_n^2(x)\, d\mu(x) = O\{\|\ln \mu(q_n)\|\} \sum_{\nu_{q_n} \le m < \nu_{q_n+1}} a_m^2 .$$

Тогда в силу (14) имеем

$$\sum_{n \ge 0} \lambda^{-2}(\nu_{q_n}) \|\ln \mu(q_n)\|^{-2} \int \delta^2(x)\, d\mu(x) = O(1) \sum_{n \ge 0} \lambda^{-2}(\nu_{q_n}) \sum_{\nu_{q_n} \le m < \nu_{q_n+1}} a_m^2 =$$

$$= O(1) \sum_{n \ge 0} \sum_{\nu_{q_n} \le m < \nu_{q_n+1}} a_m^2 \lambda^{-2}(m) = O(1) \sum_{m \ge 0} a_m^2 \lambda^{-2}(m) < \infty.$$

Отсюда согласно теореме Леви при $\max(n_1, n_2) \to \infty$ следует оценка

$$\sum_{m \in Q_3(n)} a_m \varphi_m(x) = o_x\{\lambda(\nu_{q_n}) \|\ln \mu(q_n)\|\} = o_x\{\lambda(n) \|\ln \mu(q_n)\|\}. \tag{25}$$

Далее применяя лемму Меньшова – Радемахера к сумме

$$\sum_{m \in Q_1(n)} a_m \varphi_m(x),$$

в силу (14) получаем

$$\sum_{n\ge 0}\lambda^{-2}(\nu_{q_n})\ln^{-2}\mu_1(q_{n_1})\int\left\{\max_{\nu_{q_{n_1}}\le m<\nu_{q_{n_1}+1}}\left|\sum_{m\in Q_1(n)}a_m\varphi_m(x)\right|\right\}^2 d\mu(x) =$$

$$= O(1)\sum_{n\ge 0}\lambda^{-2}(\nu_{q_n})\sum_{\nu_{q_n}\le m<\nu_{q_n+1}}a_m^2 = O(1)\sum_{m\ge 0}a_m^2\lambda^{-2}(m) < \infty,$$

откуда с помощью теоремы Леви выводим оценку $(\max(n_1, n_2)\to\infty)$:

$$\sum_{m\in Q_1(n)}a_m\varphi_m(x) = o_x\{\lambda(\nu_{q_n})\ln\mu_1(q_{n_1})\} = o_x\{\lambda(n)\ln\mu_1(q_{n_1})\}. \tag{26}$$

Аналогично получаем оценку

$$\sum_{m\in Q_2(n)}a_m\varphi_m(x) = o_x\{\lambda(n)\ln\mu_2(q_{n_2})\},\quad \max(n_1, n_2)\to\infty. \tag{27}$$

Теперь (21) следует из (23) – (27).

2. Второе утверждение теоремы доказывается так же, как в теореме 1, с учетом того, что в случае однократных рядов соответствующее утверждение верно (см. [1], доказательство теоремы 9).

Случай произвольной решетки $\{m_n\}$ исчерпывается применением схемы доказательства теоремы 3 из [5].

С помощью теоремы 2 получаем такой результат.

Теорема 3. *Пусть строго возрастающая к* ∞ *последовательность* $\{0 < \lambda(n),\ n\in Z_+^2\}$ *и решетка* $\{m_n\}$ *удовлетворяют одному из следующих условий*:

α) *для некоторого* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0<\alpha_i<1$, $i = 1, 2$, *последовательность* $\lambda(m_n)\|e^{-n^\alpha}\|$ *почти убывает*:

β) *существует* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0<\alpha_i<1$, $i=1,2$, *такое, что*

$$\frac{\ln\lambda(m_n)}{\rho(n^\alpha)}\uparrow,\quad a\quad \frac{\ln\lambda(m_n)}{\rho(n)}\downarrow.$$

1. *Если выполнено условие* (20), *то для любой ОНС* $\varphi\in\Phi$

$$s_{m_n}(x) = o_x\{\lambda(m_n)\|\ln(1+n/\ln\lambda(m_n))\|\}, \tag{28}$$

когда $\max(n_1, n_2)\to\infty$ (*и тем более, когда* $\min(n_1, n_2)\to\infty$).

2. *Если* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ — *пространство с конечной, положительной, неатомической мерой и последовательность* $\omega(n_1, n_2)\to\infty$, *когда* $\max(n_1, n_2)\to\infty$, *то найдется ортогональный ряд* (1), *для которого выполнено условие* (20) *и всюду на* X

$$\limsup_{\max(n_1,n_2)\to\infty}\ \omega(n)\lambda^{-1}(m_n)\|\ln(1+n/\ln\lambda(m_n))\|^{-1}|s_{m_n}(x)| = \infty. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие α). Покажем, что решетка

$$\gamma_n = ([n_1^{1/\alpha_1}],\ [n_2^{1/\alpha_2}]),$$

где $[x]$ означает целую часть числа x, удовлетворяет условиям (14). Действительно, легко видеть, что последовательности

$$\nu_{n_i} = [n_i^{1/\alpha_i}],\quad i = 1, 2,$$

удовлетворяют условию

$$\exp(\nu_{n_i+1}^{\alpha_i} - \nu_{n_i}^{\alpha_i}) = O(1),\quad i = 1, 2.$$

Отсюда в силу условия α) получаем

$$\lambda(m_{\nu_n+1})/\lambda(m_{\nu_n}) \le C\prod_{i=1}^{2}\exp(\nu_{n_i+1}^{\alpha_i}-\nu_{n_i}^{\alpha_i}) = O(1),$$

а тогда, согласно лемме 3, наше утверждение верно. Но в таком случае, если выполнено условие (20), из теоремы 2 следует оценка (21).

Поскольку

$$\mu_i(n_i) = \nu_{n_i+1}-\nu_{n_i} = \left[(n_i+1)^{1/\alpha_i}\right]-\left[n_i^{1/\alpha_i}\right] \sim n_i^{1/\alpha_i-1}, \quad n_i\to\infty,$$

а $\{q_{n_i}\}$, $i=1,2$; $n_i=0,1,\ldots$, определены неравенствами

$$\left[q_{n_i}^{1/\alpha_i}\right] \le n_i < \left[(q_{n_i}+1)^{1/\alpha_i}\right],$$

то

$$\ln\mu_i(q_{n_i}) \sim \ln q_{n_i} \sim \ln n_i, \quad n_i\to\infty. \tag{30}$$

С другой стороны,

$$\ln n_i \sim \ln(1+n_i/\ln\lambda_i(m_{n_i})), \quad n_i\to\infty, \tag{31}$$

где $\lambda_1(n_1)=\lambda_1(n_1,0)$, $\lambda_2(n_2)=\lambda(0,n_2)$ — следы последовательности $\lambda(n)$ на координатных осях.

Действительно, очевидно, что для некоторого $C>0$

$$\ln\left(1+n_i/\ln\lambda_i(m_{n_i})\right) \le C\ln n_i,$$

а в силу условия α) имеет место цепочка эквивалентных неравенств

$$\lambda_i(m_{n_i}) \le C_1\exp n_i^{\alpha_i} \Leftrightarrow \ln\lambda_i(m_{n_i}) \le C_2 n_i^{\alpha_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_i/\ln\lambda_i(m_{n_i}) \ge C_3 n_i^{1-\alpha_i} \Leftrightarrow \ln\left(1+n_i/\ln\lambda_i(m_{n_i})\right) \ge C_4\ln n_i,$$

где C_k, $k=1,2,3,4$, — некоторые положительные постоянные.

Таким образом, из (30) и (31) получаем

$$\ln\mu_i(q_{n_i}) \sim \ln\left(1+n_i/\ln\lambda_i(m_{n_i})\right). \tag{32}$$

Из (32) следует, что оценка (21) может быть записана в виде (28), а (29) вытекает из (22).

В случае β) последовательность $\{\Lambda(n)=\lambda(m_n)\}$ удовлетворяет условию (13). Следовательно, согласно лемме 3, найдется решетка $\{\nu_n\}$ в Z_+^2 такая, что $\{\Lambda(n)\}$ удовлетворяет неравенствам (14) и, следовательно, неравенствам

$$\nu_{n_i+1}-\nu_{n_i} \ge 4, \quad 1<p\le\frac{\Lambda_i(\nu_{n_i+1})}{\Lambda_i(\nu_{n_i})}<q, \quad i=1,2;\ n_i=0,1,\ldots. \tag{33}$$

Отсюда, на основании леммы 5 из [6], фактически доказанной в [1] (теорема 4), имеем

$$B_1\nu_{q_{n_i}+1}/\ln\Lambda_i(\nu_{q_{n_i}+1}) \le \mu_i(q_{n_i}) \le B_2\nu_{q_{n_i}}/\ln\Lambda_i(\nu_{q_{n_i}}), \quad i=1,2.$$

Отсюда и из того, что $\{q_{n_i}\}$ определяется неравенствами $\nu_{q_{n_i}}\le n_i<\nu_{q_{n_i}+1}$, в силу (33) получаем

$$\mu_i(q_{n_i}) \sim n_i/\ln\Lambda_i(n_i) = n_i/\ln\lambda_i(m_{n_i}), \quad n_i\to\infty.$$

В итоге отсюда следует (32) и дальнейшие рассуждения такие же, как в случае α).

***Замечание* 3.** В условии β) теоремы 3 вместо $\rho(n) = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ можно взять любую положительную функцию $v(n)$ для $n \neq 0$, имеющую следы $v_i(n_i)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие неравенствам $n_i - a_i \le v_i(n_i) \le n_i + b_i$, где $a_i, b_i \ge 0$, $i = 1, 2$, — некоторые постоянные.

Как показывает следующая теорема, для „быстро убывающих" последовательностей $\lambda^{-1}(n)$ логарифмический множитель в оценке исчезает.

Теорема 4. *Пусть* $\{ m_n = (m_{n_1}, m_{n_2}) \}$ *— решетка в* Z_+^2, *причем* $m_0 = 0$ *и последовательность* $\{ \lambda(n) > 0,\ n \in Z_+^2 \}$ *таковы, что* $\exists q > 1$ $\forall n = (n_1, n_2) \in Z_+^2$,

$$\lambda(m_{n_1+1}, m_{n_2+1}) \ge q \max\{ \lambda(m_{n_1}, m_{n_2+1}), \lambda(m_{n_1+1}, m_{n_2}) \}. \tag{34}$$

Если коэффициенты ряда (1) *удовлетворяют условию* (20), *то для любой ОНС* $\varphi \in \Phi$ *верна оценка*

$$s_{m_n}(x) = o_x\{\lambda(m_n)\}, \quad \max(n_1, n_2) \to \infty. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $m_n(k) = (m_{n_1}(k), m_{n_2}(k))$ — ближайшая к точке $k = (k_1, k_2)$ точка решетки $\{m_n\}$, удовлетворяющая неравенству

$$m_n(k) \ge k. \tag{36}$$

Тогда из (34), (36) и (20) получаем

$$\sum_{n\ge0} \lambda^{-2}(m_n) \int s_{m_n}^2(x) d\mu(x) = \sum_{n\ge0} \lambda^{-2}(m_n) \sum_{k\le m_n} a_k^2 =$$

$$= \sum_{k\ge0} a_k^2 \sum_{m_n \ge k} \lambda^{-2}(m_n) = \sum_{k\ge0} a_k^2 \sum_{m_{n_1}\ge k_1} \sum_{m_{n_2}\ge k_2} \lambda^{-2}(m_{n_1}, m_{n_2}) =$$

$$= O(1) \sum_{k\ge0} a_k^2 \sum_{m_{n_1}\ge k_1} \lambda^{-2}(m_{n_1}, m_{n_2}(k)) =$$

$$= O(1) \sum_{k\ge0} a_k^2 \lambda^{-2}(m_{n_1}(k), m_{n_2}(k)) = O(1) \sum_{k\ge0} a_k^2 \lambda^{-2}(k) < \infty.$$

Отсюда на основании теоремы Леви следует (35).

Установим окончательность теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ *— пространство с конечной, положительной, неатомической мерой,* $\{m_n\}$ *— решетка в* Z_+^2, *а* $\{ \lambda(n) \uparrow \infty,\ n \in Z_+^2 \}$ *и* $\{ v(n),\ n \in Z_+^2 \}$, $v(n_1, n_2) \to \infty$, *когда* $\max(n_1, n_2) \to \infty$, *— положительные последовательности. Тогда существует ортогональный ряд* (1), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (20), *такой, что всюду на* X

$$\limsup_{\max(n_1,n_2)\to\infty} v(n) \lambda^{-1}(m_n) | s_{m_n}(x) | = \infty.$$

Заметим, что для однократных рядов подобная теорема верна (см. [1], теорема 11). Мы воспользуемся этой теоремой и назовем ее леммой Коляды.

Доказательство. Проводится по той же схеме, что и доказательство второй части теоремы 1. Пусть сначала $m_n = n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $v(n) \uparrow \infty$. Положим $\omega(n_1) = v(n_1, 0)$, $\lambda_1(n_1) = \lambda(n_1, 0)$. Согласно лемме Коляды, найдется ряд (18), коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1}^2 \lambda_1^{-2}(n_1) < \infty,$$

для которого всюду на X

$$\limsup_{n_1 \to \infty} \omega(n_1)\, \lambda_1^{-1}(n_1) \,|\, s_{n_1}(x) \,| = \infty.$$

Рассмотрим двойной ортогональный ряд $\sum_{n \ge 0} a_n\, \varphi_n(x)$, полагая

$$a_n = a_{n_1 n_2} = \begin{cases} c_{n_1}, & n_2 = 0; \\ 0, & n_2 > 0, \end{cases} \quad n_1 = 0, 1, \ldots,$$

и определяя двойную ОНС $\{\varphi_n(x) = \varphi_{n_1 n_2}(x)\}$ на X так, как в теореме 3 из [6]. Этот ряд совпадает на X с однократным рядом (18) и, следовательно, $s_n(x) = s_{n_1}(x)$, а его коэффициенты удовлетворяют условию (20). Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$\limsup_{\max(n_1, n_2) \to \infty} v(n)\, \lambda^{-1}(m_n) \,|\, s_n(x) \,| \ge \limsup_{n_1 \to \infty} \omega(n_1)\, \lambda_1^{-1}(n_1) \,|\, s_{n_1}(x) \,| = \infty.$$

В случае произвольной решетки $\{m_n\}$, используя рассмотренный случай $m_n = n$, применяем схему доказательства теоремы 3 из [5].

1. *Коляда В. И.* Скорость сходимости и суммируемости ортогональных рядов и вложение некоторых классов функций многих переменных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1973. – 129 с.
2. *Móricz F.* On the growth of the rectangular partial sums of multiple non-orthogonal series // An. Math. – 1980. – **6**, № 4. – P. 327 – 341.
3. *Móricz F.* The Kronecker lemmas for multiple series and some applications // Acta math. Acad. sci. hung. – 1981. – **37**, № 1 – 3. – P. 39 – 50.
4. *Móricz F.* On the convergence in a restricted sense of multiple series // An. Math. – 1979. – **5**, № 2. – P. 135 – 147.
5. *Андриенко В. А.* О скорости сходимости кратных ортогональных рядов // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1307 – 1314.
6. *Andrienko V. A.* Rate of approximation by rectangular partial sums of double orthogonal series // An. Math. – 1996. – **22**, № 4. – P. 243 – 266.
7. *Панджакидзе Ш. П.* О теореме Меньшова – Радемахера для двойных рядов // Сообщ. АН ГССР. – 1965. – **39**. № 2. – С. 277 – 282.

Получено 17.04.97