УДК 517.9

И. И. Клевчук (Черновиц. ун-т)

БИФУРКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

We consider a system of nonlinear parabolic equations with a transformed argument. We prove the existence of integral manifolds. We investigate the bifurcation of an invariant torus from equilibrium.

Розглядається система нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом. Доведено існування інтегральних многовидів. Досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги.

1. Преобразование исходной задачи. Рассмотрим систему нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t,\varepsilon)u + B(t,\varepsilon)u_\Delta + f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon) \tag{1}$$

и с периодическим условием

$$u(t,x+2\pi) = u(t,x). \tag{2}$$

Здесь ε — p-мерный параметр с малыми положительными компонентами, $u_\Delta = u(t,x-\Delta)$, Δ — сдвиг аргумента, матрицы $D(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ и функция $f\colon \mathbf{R}^{2n+p+2} \to \mathbf{R}^n$ пять раз непрерывно дифференцируемы по всем аргументам и 2π-периодические относительно t, x, $f(t,x,u,v,\varepsilon) = O(|u|^2+|v|^2)$ при $|u|+|v| \to 0$. Поэтому функция $f(t,x,u,v,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$f(t,x,0,0,\varepsilon) = 0, \quad |f(t,x,u,v,\varepsilon) - f(t,x,u',v',\varepsilon)| \le \nu\left(|u-u'|^2+|v-v'|^2\right)^{1/2},$$
$$|u| \le \rho, \quad |u'| \le \rho, \quad |v| \le \rho, \quad |v'| \le \rho, \tag{3}$$

где $|u|^2 = u_1^2 + \ldots + u_n^2$, причем постоянная Липшица ν может быть сделана как угодно малой при уменьшении ρ. Функцию $f(t,x,u,v,\varepsilon)$ можно доопределить вне области $|u| \le \rho$, $|v| \le \rho$ так, чтобы условие (3) выполнялось во всем пространстве. Пусть матрица $D(t,\varepsilon)$ положительно определена.

Система (1) применяется для моделирования нелинейных эффектов в оптике [1]. Интегральные многообразия и бифуркация решений параболических задач изучались в работах [2 – 6], причем в [5, 6] исследована бифуркация рождения цикла автономного параболического уравнения с преобразованным аргументом. В настоящей работе рассмотрена параболическая система с преобразованным аргументом более общего вида, для которой с помощью метода интегральных многообразий доказано существование инвариантного тора.

Наряду с (1) рассмотрим линейную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t,\varepsilon)u + B(t,\varepsilon)u_\Delta. \tag{4}$$

Решение задачи (4), (2) будем искать в виде ряда Фурье в комплексной форме

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(-ikx), \quad y_{-k}(t) = \bar{y}_k(t). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) и сравнивая коэффициенты при $\exp(-ikx)$, получаем счетную систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = \left[-k^2 D(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)\exp(ik\Delta)\right] y_k(t), \quad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{6}$$

Система (6) является системой линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Согласно теореме Флоке существует невырожденная матрица $H_k(t,\varepsilon)$, $H_k(t+2\pi,\varepsilon) = H_k(t,\varepsilon)$, такая, что замена $y_k = H_k(t,\varepsilon) z_k$ приводит систему (6) к виду

$$\frac{dz_k}{dt} = C_k(\varepsilon) z_k, \quad C_{-k}(\varepsilon) = \overline{C}_k(\varepsilon), \quad k = 0, \pm 1, \ldots .$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде ряда (5). Подставляя (5) в (1) и сравнивая коэффициенты при $\exp(-ikx)$, $k \in \mathbf{Z}$, получаем счетную систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье

$$\frac{dy}{dt} = M(t,\varepsilon) y + F(t,y,\varepsilon), \tag{7}$$

где $y = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots)^T$, $M(t,\varepsilon)$ — бесконечная блочно-диагональная матрица с блоками

$$M_k(t,\varepsilon) = -k^2 D(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)\exp(ik\Delta), \quad k = 0, \pm 1, \ldots ;$$

$F(t,y,\varepsilon) = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots)^T$ — нелинейная функция, причем f_k являются коэффициентами при $\exp(-ikx)$ разложения функции $f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon)$ в ряд Фурье.

Покажем, что функция $F(t,y,\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица. Введем в пространстве последовательностей норму $|y| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим другой вектор $z = (z_0, z_1, z_{-1}, \ldots)^T$ коэффициентов Фурье решения $v(t,x)$ уравнения (1) и соответствующий ему вектор $F(t,z,\varepsilon) = (g_0, g_1, g_{-1}, \ldots)^T$. Используя равенство Парсеваля, имеем

$$|F(t,y,\varepsilon) - F(t,z,\varepsilon)| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k - g_k|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon) -$$

$$- f(t,x,v,v_\Delta,\varepsilon)|^2 dx\right)^{1/2} \le \nu\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(|u-v|^2 + |u_\Delta - v_\Delta|^2\right)dx\right)^{1/2} =$$

$$= \nu\left(2\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k - z_k|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,\nu\,|y-z|.$$

Следовательно, функция F удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\sqrt{2}\nu$.

Используя неравенство Важевского, оценим решение $y_k(t)$ системы (6):

$$|y_k(t)| \le |y_k(t_0)| \exp\int_{t_0}^{t_1} \Lambda_k(t_1)\,dt_1, \tag{8}$$

где $\Lambda_k(t)$ — наибольший характеристический корень матрицы $[M_k(t,\varepsilon) + M_k^*(t,\varepsilon)]/2$.

Пусть для всех x, принадлежащих единичной сфере $|x| = 1$, выполняются неравенства $(D(t,\varepsilon)x, x) \ge \mu > 0$, $(Ax + A^T x, x) \le 2a$, $(B(t,\varepsilon)\exp(ik\Delta)x + B^T(t,\varepsilon)\exp(-ik\Delta)x, x) \le 2b$. Тогда

$$\Lambda_k(t) = \frac{1}{2}\max_{|x|=1}\left(M_k(t,\varepsilon)x + M_k^*(t,\varepsilon)x,\, x\right) \le -k^2\mu + a + b.$$

Отсюда следует, что $\lim_{k\to\infty}\Lambda_k(t) = -\infty$. Предположим, что характеристическое уравнение $\det(C_k(\varepsilon) - \lambda E) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$, имеет простые корни $\alpha_m(\varepsilon) \pm \pm i\beta_m(\varepsilon)$, $\alpha_m(0) = 0$, $\beta_m(0) > 0$, $m = 1, \ldots, p$, а остальные корни удовлетворяют условию $|\operatorname{Re}\lambda| > \gamma + \delta$, $\gamma > \delta > 0$. Условие $\alpha_m(0) = 0$ не имеет характер вырождения, так как ε является p-мерным параметром. Для всех целых k, кроме конечного числа, выполняется неравенство $k^2 \ge (\gamma + \delta + a + b)/\mu$. Тогда $-k^2\mu + a + b \le -(\gamma + \delta)$, $\Lambda_k(t) \le -(\gamma + \delta)$ и из неравенства (8) следует оценка

$$|y_k(t)| \le |y_k(t_0)| \exp[-(\gamma + \delta)(t - t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{9}$$

Перепишем систему (7) в виде

$$\frac{dY_1}{dt} = N_1(t,\varepsilon)Y_1 + F_1(t,y,\varepsilon), \quad \frac{dY_2}{dt} = N_2(t,\varepsilon)Y_2 + F_2(t,y,\varepsilon), \tag{10}$$

где $y = (Y_1, Y_2)^T$, $Y_1 = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots, y_{k_0}, y_{-k_0})^T$, $Y_2 = (y_{k_0+1}, y_{-k_0-1}, \ldots)^T$, $N_1(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}(M_0, M_1, M_{-1}, \ldots, M_{k_0}, M_{-k_0})$, $N_2(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}(M_{k_0+1}, M_{-k_0-1}, \ldots)$, $F_1(t, y, \varepsilon) = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots, f_{k_0}, f_{-k_0})^T$, $F_2(t, y, \varepsilon) = (f_{k_0+1}, f_{-k_0-1}, \ldots)^T$, $k_0 = \left[\sqrt{(\gamma + \delta + a + b)/\mu}\right]$. Матрицу $C(\varepsilon) = \operatorname{diag}(C_0, C_1, C_{-1}, \ldots, C_{k_0}, C_{-k_0})$ приведем к виду $C(\varepsilon) = T(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon)$, где $\Gamma(\varepsilon) = \operatorname{diag}(A_1(\varepsilon), \Gamma_1(\varepsilon))$, $A_1(\varepsilon) = \operatorname{diag}(A_3(\varepsilon), A_4(\varepsilon))$, собственные значения матрицы $A_3(\varepsilon)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda > \gamma + \delta$, $A_4(\varepsilon)$ — диагональная матрица с числами $\alpha_m(\varepsilon) \pm \pm i\beta_m(\varepsilon)$ по диагонали, а собственные значения матрицы $\Gamma_1(\varepsilon)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda < -\gamma - \delta$. Такое преобразование можно получить путем приведения матрицы $C(\varepsilon)$ к жордановой нормальной форме. В системе (10) сделаем замену $Y_1(t) = H(t,\varepsilon)T(\varepsilon)Y_3(t)$, где $H(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}(H_0, H_1, H_{-1}, \ldots, H_{k_0}, H_{-k_0})$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dY_3}{dt} &= \Gamma(\varepsilon)Y_3 + T^{-1}(\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)F_1(t,y,\varepsilon), \\ \frac{dY_2}{dt} &= N_2(t,\varepsilon)Y_2 + F_2(t,y,\varepsilon). \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку матрица $\Gamma(\varepsilon)$ является блочно-диагональной, то систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= A_1(\varepsilon)w_1 + G_1(t,w,\varepsilon), \\ \frac{dw_2}{dt} &= A_2(t,\varepsilon)w_2 + G_2(t,w,\varepsilon), \end{aligned} \tag{12}$$

где $A_2(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}(\Gamma_1(\varepsilon), N_2(t,\varepsilon))$, $Y_3 = (w_1, Y_4)^T$, $w_2 = (Y_4, Y_2)^T$, $w_1 \in \mathbf{R}^{l+2p}$, w_2 принадлежит банаховому пространству $\mathbf{M}$.

В силу предположения относительно собственных значений матрицы $\Gamma_1(\varepsilon)$ справедлива оценка $|\exp[\Gamma_1(\varepsilon)t]| \le N\exp[-(\gamma + \delta)t]$, $t \ge 0$, $N \ge 1$. Тогда для фундаментальной матрицы $L(t,s)$ системы $dw_2/dt = A_2(t,\varepsilon)w_2$ из неравенства (9) следует оценка

$$|L(t,s)| \le N\exp[-(\gamma + \delta)(t - s)], \quad t \ge s. \tag{13}$$

Аналогично можно получить оценку

$$|\exp[A_1(\varepsilon)t]| \le N\exp[-(\gamma+\delta)t], \quad t \le 0. \tag{14}$$

Поскольку вектор-функция F удовлетворяет условию Липшица и $F(t, 0, \varepsilon) = 0$, то

$$G_1(t,0,\varepsilon) = G_2(t,0,\varepsilon) = 0, \quad (|G_1(t,w,\varepsilon)-G_1(t,v,\varepsilon)|^2 + $$
$$+ |G_2(t,w,\varepsilon)-G_2(t,v,\varepsilon)|^2)^{1/2} \le \nu_1|w-v|, \tag{15}$$

где

$$\nu_1 = \sqrt{2}\nu \max\left\{1, \left|T^{-1}(\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)\right|\right\} \max\{1, |H(t,\varepsilon)T(\varepsilon)|\}.$$

2. Существование и свойства интегральных многообразий.

Теорема 1. *Пусть выполняются оценки* (13) – (15). *Тогда при*

$$\nu_1 < \frac{\delta}{N(1+2N)} \tag{16}$$

существует функция $w_2 = h(t, w_1, \varepsilon)$, *определенная на* $\mathbf{R}^{l+3p+1}$, *удовлетворяющая условиям*

$$h(t,0,\varepsilon) = 0, \quad |h(t,w_1,\varepsilon) - h(t,w_1',\varepsilon)| \le \frac{1}{2}|w_1 - w_1'| \tag{17}$$

и такая, что множество $S^- = \{(t, w_1, w_2) \mid t \in \mathbf{R},\ w_1 \in \mathbf{R}^{l+2p},\ w_2 = h(t, w_1, \varepsilon),\ w_2 \in \mathbf{M}\}$ *является интегральным многообразием системы* (12). *Для любого решения* $w(t) = (w_1(t), h(t, w_1(t), \varepsilon))$ *системы* (12), *принадлежащего* S^-, *справедлива оценка*

$$|w(t)| \le 2N|w_1(\sigma)|\exp[\gamma(\sigma-t)], \quad t \le \sigma. \tag{18}$$

Доказательство. Наряду с системой (12) рассмотрим систему интегральных уравнений

$$w_1(t) = \exp[A_1(\varepsilon)(t-\sigma)]c_1 - \int_t^\sigma \exp[A_1(\varepsilon)(t-s)]G_1(s,w(s),\varepsilon)ds,$$
$$w_2(t) = \int_{-\infty}^t L(t,s)G_2(s,w(s),\varepsilon)ds, \tag{19}$$

откуда

$$w(t) = H_+(t-\sigma)c - \int_t^\sigma H_+(t-s)G(s,w(s),\varepsilon)ds + \int_{-\infty}^t H_-(t,s)G(s,w(s),\varepsilon)ds, \tag{20}$$

где

$$H_+(t) = \operatorname{diag}[\exp[A_1(\varepsilon)t], 0], \quad c = [c_1, 0]^T,$$
$$H_-(t,s) = \operatorname{diag}[0, L(t,s)], \quad G = [G_1, G_2]^T.$$

Существование решения уравнения (20) докажем с помощью метода последовательных приближений

$$w^{(0)}(t) = 0, \quad w^{(n+1)}(t) = H_+(t-\sigma)c - \int_t^\sigma H_+(t-s)G(s,w^{(n)}(s),\varepsilon)ds +$$
$$+ \int_{-\infty}^t H_-(t,s)G(s,w^{(n)}(s),\varepsilon)ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

По индукции докажем, что справедливо неравенство

$$\left|w^{(m)}(t) - w^{(m-1)}(t)\right| \le N|c|(\nu_1 K)^{m-1}\exp[\gamma(\sigma - t)], \tag{22}$$

где $m = 1, 2, \ldots$, $t \le \sigma$, $K = 2N/\delta$.

При $m = 1$ неравенство (22) следует из (14). Пусть неравенство (22) справедливо при $m = n$. Тогда, учитывая (13) – (15), получаем

$$\left|w^{(n+1)}(t) - w^{(n)}(t)\right| \le \int_t^\sigma N\exp[(\delta-\gamma)(t-s)]\,\nu_1\left|w^{(n)}(s) - w^{(n-1)}(s)\right|ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t N\exp[(\delta+\gamma)(t-s)]\,\nu_1\left|w^{(n)}(s) - w^{(n-1)}(s)\right|ds \le$$

$$\le N|c|(\nu_1 K)^n\exp[\gamma(\sigma-t)].$$

Следовательно, неравенство (22) справедливо при $m = n+1$, поэтому оно справедливо при всех натуральных m. Последовательные приближения сходятся к решению уравнения (20) при условии $\nu_1 K < 1$.

Выбирая в равенстве (20) вместо c другую постоянную c', получаем

$$w'(t) = H_+(t-\sigma)c' - \int_t^\sigma H_+(t-s)\,G(s, w'(s), \varepsilon)ds + \int_{-\infty}^t H_-(t,s)\,G(s, w'(s), \varepsilon)ds.$$

Используя (13) и (14), оценим разность

$$|w(t) - w'(t)| \le N\exp[(\delta-\gamma)(t-\sigma)]\left|c - c'\right| + \int_t^\sigma N\exp[(\delta-\gamma)(t-s)]\,\nu_1|w(s) -$$

$$- w'(s)|ds + \int_{-\infty}^t N\exp[(\delta+\gamma)(s-t)]\,\nu_1\left|w(s) - w'(s)\right|ds.$$

Положим $x(t) = \exp[\gamma(t-\sigma)]\left|w(t) - w'(t)\right|$, тогда

$$x(t) \le N\left|c - c'\right|\exp[\delta(t-\sigma)] + \nu_1 N\int_{-\infty}^\sigma \exp[-\delta|t-s|]\,x(s)ds,$$

откуда согласно [7, с. 156] находим

$$x(t) \le \frac{2\delta N\left|c-c'\right|}{\delta + \sqrt{\delta^2 - 2\nu_1\delta N}}\exp\left[\sqrt{\delta^2 - 2\nu_1\delta N}\,(t-\sigma)\right].$$

Учитывая обозначения для $x(t)$, получаем

$$\left|w(t) - w'(t)\right| \le \frac{2\delta N\left|c-c'\right|}{\delta + \sqrt{\delta^2 - 2\nu_1\delta N}}\exp\left[\left(-\gamma + \sqrt{\delta^2 - 2\nu_1\delta N}\right)(t-\sigma)\right]. \tag{23}$$

Полагая в (19) $t = \sigma$, находим представление интегрального многообразия

$$w_1(\sigma) = c_1, \quad h(\sigma, c_1, \varepsilon) = \int_{-\infty}^\sigma L(\sigma, s)\,G_2(s, w(s), \varepsilon)ds.$$

Докажем справедливость оценки (17):

$$\left|h(\sigma, c_1, \varepsilon) - h(\sigma, c_1', \varepsilon)\right| \le \int_{-\infty}^\sigma N\exp[(\delta+\gamma)(s-\sigma)]\,\nu_1\left|w(s) - w'(s)\right|ds \le$$

$$\le \frac{2\nu_1\delta N^2\left|c-c'\right|}{\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - 2\nu_1\delta N}\right)^2}.$$

Выбираем ν_1 из условия

$$\frac{2\nu_1 \delta N^2}{\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - 2\nu_1 \delta N}\right)^2} \le \frac{1}{2}.$$

Для выполнения этого неравенства достаточно, чтобы выполнялось условие (16). Но тогда справедлива оценка (17). Оценка (18) следует из (23), если положить $c' = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (13) – (16). *Тогда существует функция* $w_1 = g(t, w_2, \varepsilon)$, *определенная на* $\mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{M}$, *удовлетворяющая условиям* $g(t, 0, \varepsilon) = 0$, $|g(t, w, \varepsilon) - g(t, w', \varepsilon)| \le |w - w'|/2$, *и такая, что множество* $S^+ = \{(t, w_1, w_2) \mid t \in \mathbf{R},\ w_2 \in \mathbf{M},\ w_1 = g(t, w_2, \varepsilon),\ w_1 \in \mathbf{R}^{l+2p}\}$ *является интегральным многообразием системы* (12). *Для любого решения* $w(t) = (g(t, w_2(t), \varepsilon), w_2(t))$ *системы* (12), *принадлежащего* S^+, *справедлива оценка* $|w(t)| = 2N|w_2(\sigma)|\exp[\gamma(\sigma - t)]$, $t \ge \sigma$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $t = \sigma$ — некоторое число (начальный момент). Покажем, что интегральное множество S^- устойчиво в том смысле, что оно притягивает к себе все близкие решения $w(t)$, $t \ge \sigma$, по экспоненциальному закону.

Заметим, что поведение решений системы (12) на интегральном многообразии S^- описывается уравнением

$$\frac{dv}{dt} = A_1(\varepsilon)v + G_1(t, v, h(t, v, \varepsilon), \varepsilon). \tag{24}$$

Теорема 3. *Пусть* $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ — *произвольное решение системы* (12) *с начальным значением* $w(\sigma)$ *при* $t = \sigma$. *При условии* (16) *существует решение* $\xi(t) = (v(t), h(t, v(t), \varepsilon))$, *лежащее на* S^- *и такое, что справедлива оценка*

$$|w(t) - \xi(t)| \le 2N|w_2(\sigma) - h(\sigma, v(\sigma), \varepsilon)|\exp[\gamma(\sigma - t)], \quad t \ge \sigma. \tag{25}$$

Доказательство. Обозначим через $v(t)$ решение уравнения (24) с начальным условием $v(\sigma) = a$. Тогда $\xi(t)$ будет зависеть от a и иметь начальное значение $\xi(\sigma) = (a, h(\sigma, a, \varepsilon))$. Выполняя в системе (12) замену переменных $x(t) = w_1(t) - v(t)$, $y(t) = w_2(t) - h(t, v(t), \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1(\varepsilon)x + G_1(t, \eta + \xi, \varepsilon) - G_1(t, \xi, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(t, \varepsilon)y + G_2(t, \eta + \xi, \varepsilon) - G_2(t, \xi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{26}$$

где $\eta(t) = (x(t), y(t))$. Функция $G(t, \eta + \xi, \varepsilon) - G(t, \xi, \varepsilon)$ удовлетворяет по переменной η условию Липшица с постоянной ν_1.

В силу теоремы 2 система (26) имеет интегральное многообразие S^+, представимое в виде $x = g(t, y, a, \varepsilon)$, где функция g удовлетворяет условиям

$$g(t, 0, a, \varepsilon) = 0, \quad |g(t, y, a, \varepsilon) - g(t, y', a, \varepsilon)| \le \frac{1}{2}|y - y'|. \tag{27}$$

Для любого решения $\eta(t) = (x(t), y(t))$ системы (26) с начальными данными $y(\sigma) = \zeta$, $x(\sigma) = g(\sigma, \zeta, a, \varepsilon)$, $\zeta \in \mathbf{M}$, справедливо неравенство $|\eta(t)| \le \le 2N|y(\sigma)|\exp[\gamma(\sigma - t)]$, $t \ge \sigma$.

Покажем теперь существование таких ζ и a, что для решения $w(t) =$

$= (w_1(t), w_2(t))$ системы (12) и решения $\eta(t) = (x(t), y(t))$ системы (26) при всех $t \geq \sigma$ выполняются равенства

$$x(t) = w_1(t) - v(t), \qquad y(t) = w_2(t) - h(t, v(t), \varepsilon), \tag{28}$$

откуда и будет следовать оценка (25).

Если равенства (28) выполняются при $t = \sigma$, то в силу теоремы единственности они выполняются и при всех $t \geq \sigma$. При $t = \sigma$ (28) имеют вид

$$g(\sigma, \zeta, a, \varepsilon) = w_1(\sigma) - a, \qquad \zeta = w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon). \tag{29}$$

Будем рассматривать (29) как систему уравнений относительно ζ и a. Имеем

$$a = w_1(\sigma) - g(\sigma, w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon), a, \varepsilon). \tag{30}$$

Покажем, что это уравнение имеет решение при любых $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)$. Рассмотрим отображение $H(a) = w_1(\sigma) - g(\sigma, w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon), a, \varepsilon)$. Используя свойства (27) функции g, находим оценку $|H(a) - w_1(\sigma)| \leq |w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon)|/2$, откуда

$$|H(a) - w_1(\sigma)| \leq \frac{1}{2}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)| + \frac{1}{2}|h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon) - h(\sigma, a, \varepsilon)|.$$

Функция h удовлетворяет условию Липшица (17), поэтому из последнего неравенства следует

$$|H(a) - w_1(\sigma)| \leq \frac{1}{2}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)| + \frac{1}{4}|a - w_1(\sigma)|.$$

Рассмотрим в $(l + 2p)$-мерном пространстве шар $\overline{H}$, определяемый неравенством (относительно a) $|a - w_1(\sigma)| \leq |w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)|$. Из неравенства

$$|H(a) - w_1(\sigma)| \leq \frac{3}{4}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)| \tag{31}$$

следует, что отображение $H(a)$ переводит шар $\overline{H}$ в себя, поэтому, согласно теореме Брауэра, это отображение имеет неподвижную точку a^*.

Итак, уравнение (30) имеет решение $a = a^*$, которое в силу (31) удовлетворяет оценке

$$|a^* - w_1(\sigma)| \leq \frac{3}{4}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)|. \tag{32}$$

Подставляя решение a^* во второе уравнение (29), находим, что пара a^*, ζ^*, где $\zeta^* = w_2(\sigma) - h(\sigma, a^*, \varepsilon)$, удовлетворяет системе (29). Теорема доказана.

Систему (24) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_3}{dt} &= A_3(\varepsilon)w_3 + G_3(t, w_3, w_4, h(t, w_3, w_4, \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dw_4}{dt} &= A_4(\varepsilon)w_4 + G_4(t, w_3, w_4, h(t, w_3, w_4, \varepsilon), \varepsilon), \end{aligned} \tag{33}$$

где $v = (w_3, w_4)$, $G_1 = (G_3, G_4)$. В силу предположений относительно собственных значений матриц $A_3(\varepsilon)$ и $A_4(\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\exp[A_3(\varepsilon)t]| &\leq N\exp[(\gamma - \delta)t], \quad t \geq 0, \\ |\exp[A_4(\varepsilon)t]| &\leq N\exp[(\gamma + \delta)t], \quad t \leq 0. \end{aligned} \tag{34}$$

При условии (16), согласно [8, с. 42], существует интегральное многообразие

S_1^+ системы (33), которое может быть представлено в виде $w_3 = r(t, w_4, \varepsilon)$. При этом функция $r(t, w, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$r(t, 0, \varepsilon) = 0, \quad |r(t, w, \varepsilon) - r(t, v, \varepsilon)| \le \frac{1}{2}|w - v|, \quad w \in \mathbf{R}^{2p}, \quad v \in \mathbf{R}^{2p}.$$

Отсюда следует существование центрального многообразия. Обозначим $r_1(t, w, \varepsilon) = h(t, r(t, w, \varepsilon), w, \varepsilon)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются оценки* (13) – (16), (34). *Тогда существует центральное многообразие* $S = \{ (t, w_3, w_4, w_2) \mid t \in \mathbf{R},\ w_4 \in \mathbf{R}^{2p},\ w_3 = r(t, w_4, \varepsilon),\ w_3 \in \mathbf{R}^l,\ w_2 = r_1(t, w_4, \varepsilon),\ w_2 \in \mathbf{M}\}$ *системы* (12).

Уравнение на многообразии S имеет вид

$$\frac{dw_4}{dt} = A_4(\varepsilon)w_4 + G_4(t, r(t, w_4, \varepsilon), w_4, r_1(t, w_4, \varepsilon), \varepsilon). \tag{35}$$

Во многих случаях для исследования бифуркации тривиального решения уравнения (35) достаточно определить функции $r(t, w, \varepsilon)$ и $r_1(t, w, \varepsilon)$ приближенно. Для этого найдем сначала приближенное выражение функции $h(\sigma, c_1, \varepsilon)$ в предположении, что матрица $A_2(t, \varepsilon) = A_2(\varepsilon)$ не зависит от t. Пусть, например,

$$h_n(\sigma, c_1, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\sigma} \exp[A_2(\varepsilon)(\sigma - s)]\, G_2(s, w^{(n)}(s), \varepsilon)\, ds,$$

где $w^{(n)}(s)$ находится с помощью рекуррентной формулы (21). В частности, нулевое и первое приближения имеют вид

$$h_0(\sigma, c_1, \varepsilon) = 0, \quad h_1(\sigma, c_1, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\sigma} \exp[A_2(\varepsilon)(\sigma - s)]\, G_2(s, H_+(s - \sigma)c, \varepsilon)\, ds.$$

Отсюда находим нулевое и первое приближения функций $r(\sigma, w, \varepsilon)$, $r_1(\sigma, w, \varepsilon)$:

$$r^{(0)}(\sigma, w, \varepsilon) = 0, \quad r_1^{(0)}(\sigma, w, \varepsilon) = 0,$$

$$r^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon) = -\int_{\sigma}^{\infty} \exp[A_3(\varepsilon)(\sigma - s)]\, G_3(s, 0, \exp[A_4(\varepsilon)(s - \sigma)]w, 0, \varepsilon)\, ds,$$

$$r_1^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\sigma} \exp[A_2(\varepsilon)(\sigma - s)]\, G_2(s, 0, \exp[A_4(\varepsilon)(s - \sigma)]w, 0, \varepsilon)\, ds.$$

Пусть функции $G_2(t, 0, w, 0, \varepsilon)$ и $G_3(t, 0, w, 0, \varepsilon)$, $w \in \mathbf{R}^{2p}$, аналитичны относительно w в некоторой окрестности точки $w = 0$:

$$G_2(t, 0, w, 0, \varepsilon) = \sum_{|\alpha|=q}^{\infty} g_\alpha(t) w^\alpha, \quad G_3(t, 0, w, 0, \varepsilon) = \sum_{|\alpha|=q}^{\infty} f_\alpha(t) w^\alpha,$$

где $q \ge 2$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2p})$, α_j, $j = 1, \ldots 2p$, — неотрицательные целые, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{2p}$, $w^\alpha = w_1^{\alpha_1} \ldots w_{2p}^{\alpha_{2p}}$.

Предположим, что имеют место разложения

$$f_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\alpha k} e^{ikt}, \quad g_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{\alpha k} e^{ikt}.$$

Тогда определение функций $r^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon)$ и $r_1^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon)$ сводится к вычислениям интегралов вида

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \exp[\mu(\varepsilon)(\sigma - s)]\exp[iks + n(\alpha_m(\varepsilon) \pm i\beta_m(\varepsilon))(s-\sigma)]ds,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma} \exp[\lambda(\varepsilon)(\sigma - s)]\exp[iks + n(\alpha_m(\varepsilon) \pm i\beta_m(\varepsilon))(s-\sigma)]ds,$$

где $n \in \mathbf{N}$, $m = 1, \ldots p$, $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ — собственные значения матриц $A_2(\varepsilon)$ и $A_3(\varepsilon)$ соответственно.

Заметим, что для исследования условий бифуркации достаточно ограничиться членами второго порядка в разложении функций $r^{(1)}(\sigma, w, 0)$, $r_1^{(1)}(\sigma, w, 0)$ в ряд Тейлора. Тогда правая часть системы (35) при $\varepsilon = 0$ будет известна с точностью до членов третьего порядка.

3. Исследование бифуркации положения равновесия. Систему (35) перепишем в виде

$$\frac{dv_k}{dt} = [\alpha_k(\varepsilon) + i\beta_k(\varepsilon)]v_k + V_k(t, v, \bar{v}, \varepsilon),$$
$$\frac{d\bar{v}_k}{dt} = [\alpha_k(\varepsilon) - i\beta_k(\varepsilon)]\bar{v}_k + \bar{V}_k(t, v, \bar{v}, \varepsilon), \tag{36}$$

где v_k — комплексная переменная, $v = (v_1, \ldots, v_p)^T$, $V_k(t + 2\pi, v, \bar{v}, \varepsilon) = V_k(t, v, \bar{v}, \varepsilon)$, $V_k(t, v, \bar{v}, \varepsilon) = O(|v|^2)$ при $|v| \to 0$, $k = 1, \ldots p$.

Пусть выполняется условие A:

$$n_1\beta_1(0) + \ldots + n_p\beta_p(0) \neq m \text{ при } 0 < |n_1| + \ldots + |n_p| < 6,$$
$$\text{где } m, n_1, \ldots, n_p \text{ — целые.}$$

Преобразуем систему (36) с помощью подстановки

$$v = x + \sum_{k=2}^{4} W_k(t, x, \bar{x}, \varepsilon), \tag{37}$$

где W_2, W_3, W_4 — формы соответственно второго, третьего и четвертого порядка с периодическими коэффициентами. Преобразование (37) можно подобрать таким образом, что уравнения для x и $\bar{x}$ примут вид [9, 10]

$$\frac{dx_k}{dt} = [\alpha_k(\varepsilon) + i\beta_k(\varepsilon)]x_k + x_k\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(\varepsilon)x_j\bar{x}_j + X_k(t, x, \bar{x}, \varepsilon),$$

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = [\alpha_k(\varepsilon) - i\beta_k(\varepsilon)]\bar{x}_k + \bar{x}_k\sum_{j=1}^{p} \bar{a}_{kj}(\varepsilon)x_j\bar{x}_j + \bar{X}_k(t, x, \bar{x}, \varepsilon),$$

где $X_k(t + 2\pi, x, \bar{x}, \varepsilon) = X_k(t, x, \bar{x}, \varepsilon)$, $X_k(t, x, \bar{x}, \varepsilon) = O(|x|^5)$ при $|x| \to 0$. Перейдем к полярным координатам, полагая $x_k = r_k\exp(i\varphi_k)$, $\bar{x}_k = r_k\exp(-i\varphi_k)$. В результате получим систему уравнений

$$\frac{dr_k}{dt} = \alpha_k(\varepsilon)r_k + r_k\sum_{j=1}^{p} b_{kj}(\varepsilon)r_j^2 + R_k(t, r, \varphi, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \beta_k(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}(\varepsilon)r_j^2 + r_k^{-1}\Phi_k(t, r, \varphi, \varepsilon),$$

где $b_{kj}(\varepsilon) = \operatorname{Re} a_{kj}(\varepsilon)$, $c_{kj}(\varepsilon) = \operatorname{Im} a_{kj}(\varepsilon)$, $R_k(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^5)$, $\Phi_k(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^5)$ при $|r| \to 0$.

Рассмотрим бифуркационное уравнение $B(\varepsilon)r^2 + a(\varepsilon) = 0$, где $B(\varepsilon)$ — матрица с элементами $b_{kj}(\varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ и r^2 — векторы с элементами $\alpha_k(\varepsilon)$ и r_j^2 соответственно. Обозначим через $\rho(\varepsilon) = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$ решение уравнения $B(0)r^2 + \frac{da}{d\varepsilon}(0)\varepsilon = 0$ и рассмотрим матрицу $Q(\varepsilon) = \operatorname{diag}[\rho_1, \ldots, \rho_p]B(0)\operatorname{diag}[\rho_1, \ldots, \rho_p]$.

Теорема 5. *Пусть* $\det B(0) \neq 0$, $\det \frac{da}{d\varepsilon}(0) \neq 0$, *все элементы вектора* $B^{-1}(0)\frac{da}{d\varepsilon}(0)\varepsilon$ *отрицательны, выполняется условие А и матрица* $Q(\varepsilon)$ *некритическая. Тогда существует инвариантный тор системы* (1).

Утверждение следует из существования инвариантного тора системы (36).

Инвариантный тор будет условно устойчивым. Пусть $l = 0$, выполняются условия теоремы 5 и все собственные значения матрицы $Q(\varepsilon)$ имеют отрицательные вещественные части. Тогда инвариантный тор системы (36) будет устойчивым, поэтому из теоремы 3 следует устойчивость инвариантного тора системы (1).

Решения на торе будут квазипериодическими, если $|(m, \beta(0)) + q| > \gamma|m|^{-p-1}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ при некотором $\gamma > 0$, целом q и векторе $m = (m_1, \ldots, m_p)$ с целочисленными элементами [11, с. 47].

Замечания. **1.** Кроме тора максимальной размерности могут существовать также торы меньших размерностей, для которых $r_k = 0$ при некоторых k.

2. Результаты работы можно обобщить на системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} D_j(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + A(t,\varepsilon)u + B(t,\varepsilon)u_\Delta + f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon),$$

$x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$, с периодическими условиями $u(t, x_1, \ldots, x_j + 2\pi, \ldots, x_m) = u(t, x_1, \ldots, x_m)$, $j = 1, \ldots m$.

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые физические принципы оптической обработки информации. – М.: Наука, 1990. – С. 263 – 325.
2. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
4. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Теорема о центральном многообразии нелинейного параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1021 – 1036.
5. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1991. – **31**, № 3. – С. 467 – 473.
6. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Там же. – 1993. – **33**, № 1. – С. 69 – 80.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
8. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
9. *Самойленко А. М., Полеся И. В.* Рождение инвариантных множеств в окрестности положения равновесия // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 8. – С. 1409 – 1415.
10. *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. – 144 с.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.

Получено 15.10.97,
после доработки — 11.05.98