УДК 517.9

А. М. Самойленко, Я. А. Прикарпатський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ АДІАБАТИЧНО ЗБУРЕНИХ ЦІЛКОМ ІНТЕГРОВНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ. I

By using the Cartan differential-geometric theory of integral submanifolds (invariant tori) of completely Liouville–Arnold integrable Hamiltonian systems on the cotangent phase space, we consider an algebraic-analytical method for investigating the corresponding mapping of imbedding of an invariant torus into the phase space. This method enables one to perform the analytical description of the structure of quasiperiodic solutions to the Hamiltonian system under consideration.

Базуючись на диференціально-геометричній теорії Картана інтегральних підмноговидів (інваріантних торів) повністю інтегровних за Ліувіллем–Арнольдом гамільтонових систем на кодотичному фазовому просторі, розглянуто алгебраїчно-аналітичний метод дослідження відповідного відображення вкладення інваріантного тора в фазовий простір. Це дає можливість описати аналітично структуру квазіперіодичних розв'язків досліджуваної гамільтонової системи.

1. Попередні відомості. Розглянемо динамічну систему як векторне поле $K: M^{2n} \to T(M^{2n})$ на гладкому $2n$-вимірному, $\dim M = 2n \in Z_+$, многовиді з нульовою групою гомологій $H_2(M^{2n}; Z) = 0$, який називаємо фазовим простором [1–3], і вважаємо, що на ньому задана симплектична структура $\Omega^{(2)} \in \Lambda(M^{2n})$, тобто замкнена невироджена диференціальна 2-форма з алгебри Грасмана $\Lambda(M^{2n})$. В цьому випадку векторне поле $K: M^{2n} \to T(M^{2n})$ буде гамільтоновим, якщо існує така функція $H \in D(M^{2n}) := C^\infty(M^{2n}; R)$, що задовольняє наступну умову:

$$i_K\Omega^{(2)} = -dH, \tag{1.1}$$

де $i_K: \Lambda(M^{2n}) \to \Lambda(M^{2n})$ — так зване внутрішнє диференціювання [4] вздовж векторного поля $K: M^{2n} \to T(M^{2n})$.

Означення 1.1. *Гамільтонове векторне поле*

$$\frac{du}{dt} = K(u) \tag{1.2}$$

на симплектичному многовиді M^{2n} розмірності $2n \in Z_+$ з умовою (1.1), де $t \in R$ — еволюційний параметр, називається цілком інтегровною за Ліувіллем динамічною системою, якщо існує рівно $n \in Z_+$ гладких функцій $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n \in D(M^{2n})$ таких, що відповідні векторні поля $K_j: M^{2n} \to T(M^{2n})$, де $i_{K_j}\Omega^{(2)} = -dH_j$, $j = \overline{1,n}$, утворюють скінченновимірну розв'язну [5] алгебру Лі над R, тобто існують такі числа $c_{jk}^i \in R$, $i,j,k = \overline{1,n}$, що $[K_i, K_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k K_k$ для всіх $i,j = \overline{1,n}$, і на підмноговиді $M_h^n = \{u \in M^{2n};\ H_j = h_j \in R,\ j = \overline{1,n}\}$ розмірність алгебри Лі K векторних полів рівна $\dim K = n$.

У випадку, коли алгебра Лі K є інволютивною на M^{2n}, тобто всі $c_{ij}^k \equiv 0$, $i,j,k = \overline{1,n}$, справедливе твердження Арнольда [6] про те, що інтегральний многовид $M_h^n \subset M^{2n}$ за умови компактності є дифеоморфним n-вимірному тору T^n, на якому орбіти динамічної системи (1.2) еквівалентні квазіперіодичним лінійним обмоткам. Саме цей випадок ми будемо розглядати. Далі будемо користуватись наступними двома твердженнями.

Теорема 1.1 (Галіссо – Ріб). *Нехай на деякому відкритому околі* $U \subset M^{2n}$ *задані замкнені лінійно незалежні* 1*-форми* $\beta_j^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$, $j = \overline{1,n}$, *що задовольняють на* M^{2n} *умову інволютивності*

$$\Omega^{(2)}(K_j, K_i) = 0$$

для всіх $i, j = \overline{1,n}$, *де, за визначенням, векторні поля* $K_j: M^{2n} \to T(M^{2n})$ *такі, що* $i_{K_j}\Omega^{(2)} = -\beta_j^{(1)}$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді існують форми Пфапффа (першого ступеня)* $f_j^{(1)} \in \Lambda^1(U)$, $j = \overline{1,n}$, *з такими властивостями*:

$$\Omega^{(2)}|_U = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(1)} \wedge f_j^{(1)}, \qquad df_j^{(1)} \in I(\beta)|_U, \tag{1.3}$$

де $I(\beta)$ *— ідеал диференціальних форм в алгебрі Грасмана* $\Lambda(M^{2n})$, *породжений* 1*-формами* $\beta_j^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$.

Нехай 1-форми $\beta_j^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$, $j = \overline{1,n}$, задовольняють умови теореми 1.1. Оскільки відповідний ідеал $I(\beta)$ на $u \subset M^{2n}$ має клас $n \in Z_+$ (див. [7]) і є замкненим, то на основі теореми Фробеніуса – Картана існує його інтегральний многовид $(M_\beta^n; \pi_\beta)$, де $\pi_\beta: M_\beta^n \to M^{2n}$ — його відповідне вкладення, такий, що векторні поля K_j, $j = \overline{1,n}$, дотичні до образу $\pi_\beta(M_\beta^n) \subset M^{2n}$, тим самим індукують відповідні векторні поля $Z_j : M_\beta^n \to T(M_\beta^n)$, $j = \overline{1,n}$, на многовиді M_β^n. Визначимо 1-форми $\pi_\beta^* f_j^{(1)} \in \Lambda(\pi_\beta^{-1}(U))$, $j = \overline{1,n}$. Справедлива така теорема.

Теорема 1.2 (Картан – Йост). *Диференціальні* 1*-форми* $\pi_\beta^* f_j^{(1)} \in \Lambda^1(\pi_\beta^{-1}(U))$, $j = \overline{1,n}$, *мають такі властивості*:

1) 1*-форми* $\pi_\beta^* f_j^{(1)}$, $j = \overline{1,n}$, *є незалежними на* $(\pi_\beta^{-1}(U)) \subset M_\beta^n$;

2) 1*-форми* $\pi_\beta^* f_j^{(1)}$, $j = \overline{1,n}$, *є замкненими на* $(\pi_\beta^{-1}(U)) \subset M_\beta^n$ *і задовольняють умови*

$$\begin{gathered} d(\pi_\beta^* f_j^{(1)}) = 0, \\ (\pi_\beta^* f_j^{(1)})(Z_k) = \delta_{jk} \end{gathered} \tag{1.4}$$

для всіх $j, k = \overline{1,n}$.

2. Інтегральні многовиди інтегровних алгебраїчно-поліноміальних гамільтонових систем на $T^*(R^n)$. Нижче будемо розглядати спеціальний випадок інтегровних гамільтонових систем на симплектичному многовиді $M^{2n} = T^*(R^n)$, $n \in Z_+$, який допускає ефективний опис відповідної симплектичної структури $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(R^n))$. А саме, як відомо з теореми Дарбу [6 – 8], для певного околу U будь-якої точки $u \in M^{2n}$ існує локальна система координат на атласі многовиду M^{2n}, в термінах якої має місце таке канонічне зображення симплектичної структури $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(R^n))$:

$$\Omega^{(2)}(u) = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j, \tag{2.1}$$

де (p_j, q_j): $U \to R^2$, $j = \overline{1, n}$, — відповідні відображення, які не завжди продовжуються глобально з карти $U \subset M^{2n}$ на весь многовид M^{2n}. Ситуація кардинально змінюється, коли $M^{2n} = T^*(R^n)$. В цьому випадку ми, очевидно, можемо завжди записати для будь-якої 1-форми $\alpha \in \Lambda^1(R^n) \simeq T^*(R^n)$ розклад відносно базисних лінійно незалежних 1-форм $dq_j \in \Lambda^1(R^n)$, $j = \overline{1, n}$:

$$\alpha^{(1)}(q) = \sum_{j=1}^{n} p_j(q)\, dq_j \tag{2.2}$$

в будь-якій точці $q \in R^n$, де p_j: $R^n \to R$, $j = \overline{1, n}$, — деякі гладкі функції з $D(R^n)$. З (2.2) видно, що ці функції $p_j \in D(R^n)$, $j = \overline{1, n}$, використовуються як глобальні координати кодотичного простору $T^*(R^n)$. Застосувавши тепер до 1-форми (2.2) операцію зовнішнього диференціювання як до 1-форми на многовиді $T^*(R^n)$, вкладеної в $T^*(R^n)$ природним чином, з (2.2) отримуємо, що на $T^*(R^n)$ існує глобально задана 2-форма $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(R^n))$ в канонічній формі Дарбу:

$$\Omega^{(2)} := d\alpha^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j. \tag{2.3}$$

Враховуючи апріорну замкненість 2-форми (2.3) та невиродженість на $T^*(R^n)$, вибираємо її як канонічну симплектичну структуру $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(R^n))$ на кодотичному многовиді $M^{2n} = T^*(R^n)$.

Покладемо також, що в канонічних змінних симплектичної структури $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(R^n))$ задана гамільтонова система

$$\frac{du}{dt} = K(u), \tag{2.4}$$

де $u := (q, p) \in T^*(R^n)$, $t \in R$ — еволюційний параметр, яка має систему точних $n \in Z_+$ 1-форм $\beta_j^{(1)} \in \Lambda^1(T^*(R^n))$, $j = \overline{1, n}$, в інволюції, причому, за означенням,

$$-dH_j = i_{K_j}\Omega^{(2)} = \beta_j^{(1)},$$

$j = \overline{1, n}$, $K = K_1$ і векторні поля K_j: $T^*(R^n) \to T(T^*(R^n))$, $j = \overline{1, n}$, комутативні на $T^*(R^n)$ та лінійно незалежні на інваріантному підмноговиді $M_h^n = \{u \in T^*(R^n): H_j = h_j \in R,\ j = \overline{1, n}\}$. В термінах функції Гамільтона $H := H_1 \in D(T^*(R^n))$ динамічна система (2.4) має такий канонічний запис:

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

де $j = \overline{1,n}$, причому далі вважатимемо, що всі визначені вище функції $H_j \in D(T^*(R^n))$, $j = \overline{1,n}$, є алгебраїчно-поліноміальними на $T^*(R^n)$.

На підставі теореми 1.1, поклавши $\beta_j^{(1)} := dH \in \Lambda^1 T^*(R^n)$, $j = \overline{1,n}$, ми можемо сформулювати допоміжну лему.

Лема 2.1. *Для цілком інтегровної алгебраїчно-поліноміальної гамільтонової системи* (2.5) *існує система раціональних* 1*-форм* $f_j^{(1)} \in \Lambda^1(T^*(R^n))$, $j = \overline{1,n}$, *які є точними та лінійно незалежними на інтегральному многовиді* M_h^n, *вкладеному в* $T^*(R^n)$ *за допомогою відображення* $\pi_h\colon M_h^n \to T^*(R^n)$, $h \in R^n$.

Оскільки співвідношення

$$dH_j = 0 \tag{2.6}$$

на інтегральному підмноговиді є лінійним відносно канонічних змінних dp_j та $dq_j \in \Lambda^1(T^*(R^n))$, $j = \overline{1,n}$, на підставі леми 2.1 можна сформулювати наступну лему.

Лема 2.2. *На інтегральному підмноговиді* M_h^n *майже скрізь визначені лінійно незалежні* 1*-форми* $\bar{f}_j^{(1)} \in T^*(R^n)$, $j = \overline{1,n}$, *у вигляді*

$$\bar{f}_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{j,k}(q,p)\,dq_k, \tag{2.7}$$

де $(q,p) \in \pi_h(M_h^n) \subset T^*(R^n)$, *такі, що визначають майже скрізь локально відображення вкладення* $\pi\colon M_h^n \to R^n \subset T^*(R^n)$, *незалежне від параметрів вкладення* $h \in R^n$.

***Зауваження* 2.1.** Згідно з описаною вище конструкцією, характеристична 1-форма (2.7) визначається однозначно, якщо система диференціальних 1-форм (2.7) є розв'язною відносно набору диференціалів $dp_j \in T^*(T^*(R^n))$, $j = \overline{1,n}$, майже скрізь на інтегральному многовиді M_h^n.

Таким чином, скориставшись теоремою 1.3, ми можемо розглянути питання про глобальний координатний опис [1, 6] майже скрізь інтегрального многовиду M_h^n. А саме, справедливе наступне твердження.

Твердження 2.1. *На інтегральному підмноговиді* M_h^n *існують* $n \in Z_+$ *незалежних, можливо гомологічно неоднозначних глобальних координат* $t_j\colon M_h^n \to R$, $j = \overline{1,n}$, *таких, що майже скрізь на* M_h^n $t_1 = t \in R$ *і*

$$\bar{f}^{(1)}(q,p) = \bar{\pi}^* f_h^{(1)} := dt_j, \tag{2.8}$$

де $j = \overline{1,n}$, $(q,p) \in \pi_h(M_h^n)$, *причому вектор* $p \in T_q^*(R^n)$ *є* $R^n \ni q$*-залежним параметром.*

3. Вкладення інтегрального многовиду: алгебраїчно-аналітичний опис. Введені вище глобальні майже скрізь координати $t_j\colon M_h^n \to R$, $j = \overline{1,n}$, на інтегральному многовиді M_h^n задають, очевидно, в неявній формі відображення вкладення $\pi_h\colon M_h^n \to R^n \subset T^*(R^n)$. З метою побудови його аналітичного опису, згідно з (2.7) покладемо, що на деякій карті $U_h \subset M_h^n$ задана координатна система $\mu_j\colon U_h \to R$, $j = \overline{1,n}$, така, що відображення вкладення $\pi_h\colon M_h^n \to T^*(R^n)$ задається аналітично у формі $2n \in Z_+$ h-параметричних відображень

$$q_j = \pi_j(\mu),$$
$$p_j = \pi_{j,h}(\mu; h), \tag{3.1}$$

де $j = \overline{1,n}$ і $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \boldsymbol{R}^n$. Щоб розвинути далі метод знаходження відображень (3.1), додатково припустимо, що інтегральний многовид M_h^n допускає в координатних змінних $\mu: U_h \to \boldsymbol{R}^n$ аналітичне продовження в область комплексних параметрів $\mu: U_h \to C^n$ таким чином, що інтегральний многовид M_h^n буде компактним комплексно-аналітичним многовидом. Остання умова, з огляду на раціональність 1-форм (2.7) на многовиді M_h^n, не є суттєвим обмеженням на клас розглядуваних нами алгебраїчно-поліноміальних систем на $T^*(\boldsymbol{R}^n)$.

Для подальшого опису відображення вкладення (3.1) скористаємось методом канонічних перетворень Пуанкаре – Картана [6, 7], який дає можливість інваріантного опису координатної структури вкладення (3.1) за допомогою так званого методу породжуючих функцій, що задовольняють певні диференціальні рівняння Гамільтона – Якобі [6] з частинними похідними.

Задамо тепер на кодотичному просторі $T^*(U_h)$ до інтегрального многовиду M_h^n локально-канонічні координати $\mu: U_h \to \boldsymbol{R}^n$ та $\overline{w}: T_\mu^*(U_h) \to \boldsymbol{R}^n$, в термінах яких задається майже скрізь локальний дифеоморфізм $\overline{\pi}^*(T^*(U_h)) \to$ $\to T^*(\boldsymbol{R}^n)$, що задовольняє умову канонічності

$$\overline{\pi}_h^* \Omega^{(2)} = \Omega^{(2)}, \tag{3.2}$$

де, за визначенням,

$$\overline{\pi}_h^* \Omega^{(2)}|_{T^*(U_h)} = \sum_{j=1}^n dw_j \wedge d\mu_j.$$

На підставі зображення (2.7), згідно з (3.1), отримуємо, що відображення вкладення $\pi: U_h \to \boldsymbol{R}^n \subset T^*(\boldsymbol{R}^n)$ не залежить ефективно від параметра вкладення $h \in \boldsymbol{R}^n$. Це означає, що рівність (3.2) можна записати в еквівалентній формі

$$\overline{\pi}_h^* d\alpha^{(1)}|_{U_h} = \sum_{j=1}^n d\overline{w}_j \wedge d\mu_j,$$

де

$$\alpha^{(1)} = \sum_{j=1}^n p_j\, dq_j \in T^*(\boldsymbol{R}^n),$$

тобто для всіх $j = \overline{1,n}$ визначені елементи $\overline{w}_j: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ такі, що на $U_h \subset M_h^n$ $\alpha^{(1)}|_{U_h} = \pi^* \alpha^{(1)}$, звідки

$$\overline{w}_j(\mu; h) = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial \overline{\pi}_k(\mu)}{\partial \mu_j}. \tag{3.3}$$

Виходячи з локальної дифеоморфності на свій образ майже скрізь вкладення $\pi: M_h^n \to \boldsymbol{R}^n \subset T^*(\boldsymbol{R}^n)$, співвідношення (3.3) можна записати в еквівалентній формі як співвідношення вигляду [9]

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} \bar{w}_k \left(\frac{\partial \bar{\pi}(\mu)}{\partial \mu}\right)^{-1}_{kj} \tag{3.4}$$

для всіх $j=\overline{1,n}$ на просторі $T^*(M_h^n)$.

З того, що відображення $(q,p): T^*(R^n) \to R^{2n}$ задає глобальні координати на кодотичному многовиді $T^*(R^n)$, та з (3.4) випливає, що відображення $(\mu, \bar{w}) : T^*(R^n) \to R^{2n}$ задає майже скрізь глобальні координати на $T^*(M_h^n)$. Для більш детального опису цього відображення в термінах вкладення $\pi: M_h^n \to R^n \subset T^*(R^n)$ скористаємось методом канонічних перетворень Пуанкаре – Картана [6], задаючи породжуючу функцію $\bar{S} : R^n \times R^n \to R$ так, що справедлива на M_h^n рівність

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j(\mu;h)\, d\mu_j = -\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_j(\mu;h)\, dh_j + d\bar{S}(\mu;h), \tag{3.5}$$

де $\bar{t}_j : M_h^n \to R$, $j=\overline{1,n}$, — деякі канонічно спряжені величини до змінних параметрів вкладення $h \in R^n$. З умови (3.5), очевидно, випливає, що в координатах вкладення многовиду M_h^n в $T^*(R^n)$ відображення $(\bar{t},h): T^*(M_h^n) \to R^{2n}$, задане породжуючою функцією $\bar{S} : R^n \times R^n \to R$, генерує локальний дифеоморфізм многовиду $T^*(M_h^n)$ в себе з новими координатами $(\bar{t},h): T^*(M_h^n) \to \to R^{2n}$. При цьому, очевидно, що породжуюча функція $\bar{S} : R^n \times R^n \to R$ буде існувати як однозначне відображення в однозв'язній області U_h многовиду M_h^n лише тоді, коли інтеграл

$$\oint_{\partial\sigma^2 \subset U_h} \pi_h^* \alpha^{(1)} \equiv 0 \tag{3.6}$$

буде тотожно рівним нулю вздовж будь-якого замкненого кусково-гладкого шляху $\partial\sigma^{(2)} \subset U_h$. Враховуючи, що інтегральний многовид породжений орбітами комутативних векторних полів $K_j : T^*(R^n) \to T(T^*(R^n))$, $j=\overline{1,n}$, незалежних на M_h^n, за формулою Стокса [1, 7, 10] з (3.6) знаходимо

$$d\left(\int_{\sigma^2} \bar{\pi}_h^* \alpha^{(1)}\right) = \int_{\sigma^2} \bar{\pi}_h^* (d\alpha^{(1)}) = \int_{\partial\sigma^2} \bar{\pi}_h^* \Omega^{(2)} \equiv 0, \tag{3.7}$$

оскільки

$$\Omega^{(2)}(K_i, K_j) = \Omega^{(2)}(\pi_{h*} Z_i, \pi_{h*} Z_j) = \pi_h^* \Omega^{(2)}(Z_i, Z_j),$$

$$\Omega^{(2)}(Z_i, Z_j) \equiv 0$$

для всіх $i,j=\overline{1,n}$. Це, зокрема, означає [6], що інтегральний многовид M_h^n є прикладом так званого лагранжевого многовиду, на якому симплектична структура тотожно рівна нулю. Враховуючи (3.6), з (3.5) можна визначити функцію $\bar{S} : R^n \times R^n \to R$ таким чином:

$$\bar{S}(\mu;h) := \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \bar{w}_j(\mu(s);h)\, d\mu_j(s), \tag{3.8}$$

де $\mu : [0,1] \to R^n$ — така траєкторія в R^n, що

$$\mu|_{s=0} = \mu^0 \in R^n, \quad \mu|_{s=1} = \mu \in R^n, \quad \mu^{-1}[0,1] \in U_h.$$

Як простий висновок з визначення (3.5) знаходимо, що координатні функції $\bar{w}_j : T^*_\mu(M^n_h) \to R$ та $\bar{t}_j : T^*_\mu(M^n_h) \to R$, $j = \overline{1,n}$, обчислюються таким чином:

$$\bar{w}_j(\mu; h) = \frac{\partial \bar{S}(\mu; h)}{\partial \mu_j},$$
$$\bar{t}_j(\mu; h) = \frac{\partial \bar{S}(\mu; h)}{\partial h_j}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.9}$$

для майже всіх $(\mu, h) \in R^{2n}$.

Виберемо тепер канонічну координатну систему $\mu : U_h \to R^n$, згідно з принципом відокремлення змінних Гамільтона – Якобі [1], для функції $\bar{S} : R^n \times R^n \to R$, тобто для майже всіх $(\mu; h) \in R^{2n}$ $\bar{S} = S : R^n \times R^n \to R$, де, за визначенням,

$$S(\mu;\, h) := \sum_{j=1}^{n} S_j(\mu_j; h), \tag{3.10}$$

причому $\bar{S}_j : R \times R^n \to R$, $j = \overline{1,n}$, — деякі майже скрізь гладкі відображення. З (3.9) та (3.10) відразу знаходимо, що для майже всіх значень $(\mu; h) \in R^{2n}$

$$\bar{w}_j(\mu; h) := w_j(\mu_j; h) \tag{3.11}$$

для кожного $j = \overline{1,n}$. В цьому випадку з (3.8) та (3.11) випливає

$$S(\mu;\, h) := \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu_j^0}^{\mu_j} w_j(\mu_j; h)\, d\mu_j, \tag{3.12}$$

де $\mu^0 \in R^n$ — будь-яка фіксована точка з образу відображення $\mu : T^*(M^n_h) \to R^n$.

Розглянемо тепер більш детально визначення (3.5) породжуючої функції $S : R^n \times R^n \to R$. З (3.5), очевидно, випливає, що многовид $T^*(M^n_h)$, як локально дифеоморфний многовид $T^*(R^n)$, є симплектичним, симплектична структура якого локально задається виразом

$$\pi_h^* \Omega^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} dh_j \wedge d\bar{t}_j. \tag{3.13}$$

Враховуючи тепер канонічні рівняння Гамільтона (2.5) для змінних $h_j \circ \pi_h$ та $\bar{t}_j \circ \pi_h : T^*(M^n_h) \to R$, $j = \overline{1,n}$, на многовиді M^n_h, легко отримати

$$\frac{d\bar{t}_j}{dt_k} = \delta_{j,k}$$

для всіх $j = \overline{1,n}$. Останнє, очевидно, означає, що можна глобально ототожнити $\bar{t}_j \equiv t_j : M^n_h \to R$, $j = \overline{1,n}$, і записати тепер (3.5), використавши (3.11), як

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(\mu_j; h)\, d\mu_j = -\sum_{j=1}^{n} t_j(\mu; h)\, dh_j + dS(\mu; h). \tag{3.14}$$

Тепер ми можемо скористатися раніше встановленими співвідношеннями (2.8) та (3.4) і сформулювати основну характеристичну теорему.

Теорема 3.1. *На інтегральному підмноговиді існують $n^2 \in Z_+$ раціональних відносно змінних $(\mu, w) \in R \times R$ функцій $f_{kj}\colon R \times R \to R$, $j, k = \overline{1, n}$, таких, що справедливі сумісні диференціальні співвідношення*

$$f_{kj}(\mu_j; w_j) = \frac{\partial w_j(\mu_j; h)}{\partial h_k}, \tag{3.15}$$

розв'язком яких є набір $n \in Z_+$ алгебраїчних співвідношень на параметри $w_j(\lambda)$, $\lambda \in R$, $j = \overline{1, n}$, такого вигляду:

$$w_j^{m_j}(\lambda) + \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}(\lambda; h)\, w_j^{m_j - k} = 0, \tag{3.16}$$

де числа $m_j \in Z_+$, $j = \overline{1, n}$, а всі величини $c_{jk}(\lambda; h)$, $j = \overline{1, n}$, є лінійними афінними функціоналами за параметром $h \in R^n$ з раціональними по $\lambda \in R$ коефіцієнтами.

Доведення. На підставі співвідношень (2.8) та заміни (3.4) у вигляді

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} w_k \left(\frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right)^{-1}_{kj},$$

$j = \overline{1, n}$, із зображення (3.12) та ототожнень $\bar{t}_j \equiv t_j\colon M_h^n \to R$, $j = \overline{1, n}$, відразу знаходимо, що для кожного $j = \overline{1, n}$ справедливі рівності

$$\bar{f}_j^{(1)}(q, p)\big|_{M_h^n} = \bar{f}_j^{(1)}\left(\pi(\mu), w\left(\frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right)^{-1}\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{f}_{jk}^{\pi}\, d\mu_k =$$

$$= dt_j \langle \equiv \rangle\, d\bar{t}_j = d\left(\frac{\partial S(\mu; w)}{\partial h_j}\right) = \frac{\partial}{\partial h_j} \partial S(\mu; w) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial h_j} \sum_{k=1}^{n} w_k(\mu_k; h)\, d\mu_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k(\mu_k; h)}{\partial h_j}\, d\mu_k \tag{3.17}$$

для деяких $n^2 \in Z_+$ функцій $\bar{f}_{jk}^{\pi}\colon R^n \times R^n \to R$, $j, k = \overline{1, n}$, та всіх значень параметра $\mu \in R^n$ з карти U_h. З (3.17) знаходимо, що на $U_h \in M_h^n$ справедлива рівність

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_{jk}^{\pi}(\mu; w)\, d\mu_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k(\mu_k; h)}{\partial h_j}\, d\mu_k. \tag{3.18}$$

Прирівнюючи в (3.18) коефіцієнти при лінійно незалежних диференціалах $d\mu_j$, $j = \overline{1, n}$, знаходимо, що для $j, k = \overline{1, n}$ на U_h виконується рівність

$$\bar{f}_{jk}^{\pi}(\mu; w) = \frac{\partial w_k(\mu_k; h)}{\partial h_j}. \tag{3.19}$$

Тепер розглянемо вираз в (3.19) справа для фіксованого $k \in \overline{1, n}$ як функцію лише одного параметра $\mu_k \in R$. Це, звичайно, означає, що для цього фіксованого $k \in \overline{1,n}$ вираз зліва теж повинен бути функцією лише параметра $\mu_k \in R$. З другого боку, вираз справа залежить лише від функціонального параметра $w_k \in R$, де $k \in \overline{1,n}$ зафіксоване вище. А це означає, що і вираз зліва при цьому значенні $k \in \overline{1,n}$ та всіх $j = \overline{1,n}$ повинен бути функцією тільки функціонального параметра $w_k \in R$. Останнє можна, очевидно, записати ефективно як набір таких співвідношень для всіх $j = \overline{1,n}$ та $i \neq k \in \overline{1,n}$:

$$\frac{\partial \bar{f}_{jk}^{\pi}}{\partial w_i} = 0. \tag{3.20}$$

Набір умов (3.20) є набором алгебраїчних співвідношень на раціональні функції $\bar{f}_{jk}^{\pi}$, $j, k = \overline{1,n}$, залежних ефективно від відображення вкладення $\bar{\pi}$: $U_h \to R^n \subset T^*(R^n)$, описаного раніше. Забезпечивши умову (3.20) вибором відображення вкладення $\bar{\pi}: U_h \to R^n \subset T^*(R^n)$, ми тим самим, очевидно, відразу ж забезпечимо необхідну умову (3.19), тобто отримуємо деякий набір $n^2 \in \in Z_+$ функцій $f_{jk}(\mu_k; h)$, $j, k = \overline{1,n}$, раціонально залежних від параметрів $\mu_k \in R$, $k = \overline{1,n}$, які задовольняють, згідно з (3.19), співвідношення

$$\bar{f}_{jk}(\mu_k; w_k) = \frac{\partial w_k(\mu_k; h)}{\partial h_j}$$

для всіх $j, k = \overline{1,n}$, що співпадає по формі з (3.15). Причому існування майже скрізь гладко вкладеного інваріантного підмноговиду M_h^n гарантує сумісність системи диференціальних співвідношень (3.15) на карті $U_h \subset M_h^n$ для майже всіх значень параметра $h \in R^n$. При цьому узгодженим з (3.1) і (3.4) розв'язком системи (3.15) буде набір алгебраїчних співвідношень (3.16) з умовами на коефіцієнти, які сформульовані в теоремі. Останнє і доводить теорему.

Як наслідок теореми 3.1, згідно з формулами (3.9) та (3.12), для вихідної гамільтонової системи (2.5) на інтегральному многовиді M_h^n справедлива аналітична формула для еволюції векторного поля $K: T^*(R^n) \to T^*(T^*(R^n))$:

$$t = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu_j^0}^{\mu_j} \frac{\partial w_j(\lambda; h)}{\partial h_1} d\lambda, \tag{3.21}$$

де алгебраїчні функції $w_j: R \times R^n \to R$, $j = \overline{1,n}$, визначаються явно як розв'язки рівнянь (3.16). Останні допускають, очевидно, аналітичне продовження в комплексну площину за параметром $\lambda \in C$. Грунтуючись тепер на відомому факті [5], що кожній алгебраїчній функції (3.16) відповідає однозначна компактна ріманова поверхня $\Gamma_h^{n_j}$ алгебраїчного роду $n_j \in Z_+$, $j = \overline{1,n}$, який визначається однозначно за допомогою так званої формули Рімана–Гурвіца [5, 11]:

$$2n_j - 2 = \sum_{k=1}^{k_j} (\nu_{j,k} - 1), \tag{3.22}$$

де для кожного $j = \overline{1,n}$ число $\nu_{j,k} \in Z_+$, $k = \overline{1,k_j}$ — кратності $k_j \in Z_+$ особливих точок галуження ріманової поверхні $\Gamma_h^{n_j}$. З іншого боку, відома теорема Якобі [11] про те, що абелевий многовид будь-якої ріманової поверхні Γ_h^g роду $g \in Z_+$ є дифеоморфним комплексному тору $T_C^g \simeq C^g/(I, B)$, де (I, B) —

комплексна гратка відповідних періодів на C^g [12]. Тепер, згідно з теоремою Арнольда [6] про дифеоморфізм тора T^n компактного інтегрального многовиду цілком інтегровної за Ліувіллем гамільтонової системи, встановлюємо справедливість наступного твердження.

Твердження 3.1. *Компактний інтегральний многовид M_h^n цілком інтегровної поліноміальної гамільтонової системи* (2.5) *дифеоморфний дійсній частині комплексного тора T_C^g роду $n \in Z_+$, причому алгебраїчні роди всіх алгебраїчних кривих* (3.16) *рівні, тобто $n_j = n$, $j = \overline{1, n}$.*

Таким чином, формула (3.21) для еволюції динамічної системи (2.5) на інтегральному многовиді M_h^n, вкладеному в $T^*(R^n)$, дає фактично повний опис властивостей її орбіт в залежності від параметра вкладення $h \in R^n$. Для багатьох застосувань формули типу (3.21) часто застосовують у формі змінних „дія-кут" [3, 6], які вводяться таким чином. Нехай $\gamma_j : R^n \to R$, $j = \overline{1, n}$, — гладкі майже скрізь відображення, визначені за допомогою формул

$$\gamma_j := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma_j^{(k)}} w_k(\lambda; h)\, d\lambda, \tag{3.23}$$

де криві $\sigma_j^{(k)} \subset \Gamma_h^{n_k}$, $j = \overline{1, n}$, утворюють для кожного $k = \overline{1, n}$ базиси одновимірної групи гомологій $H_1(\Gamma_h^n; Z)$ рімановоі поверхні $\Gamma_h^{n_k}$, введеної раніше при аналізі алгебраїчних рівнянь (3.16). Змінним $\gamma_j : R^n \to R$, $j = \overline{1, n}$, відповідають, звичайно спряжені канонічно, так звані кутові змінні $\varphi_j : M_h^n \to \to R^1 / 2\pi Z$, $j = \overline{1, n}$, для яких легко знайти відповідну породжуючу функцію канонічного перетворення $S' : R^n \times R^n \to R$, де

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(\mu_j; h)\, d\mu_j = -\sum_{j=1}^{n} \varphi_j\, d\gamma_j + dS'(\mu; \gamma) \tag{3.24}$$

для майже всіх $(\mu; \gamma) \in R^n \times R^n$. З (3.24) видно, що

$$S'(\mu; \gamma) = S(\mu; h(\gamma))$$

для майже всіх $(\mu; \gamma) \in R^n \times R^n$, де відображення $h : R^n \times R^n$ — обернене до відображення (3.23). Тим самим, з (3.12) і (3.24) легко знаходимо

$$\varphi_j = \frac{\partial S'(\mu; \gamma)}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial}{\partial \gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{\mu_k^0}^{\mu_k} w_k(\lambda; h(\gamma))\, d\lambda \right) =$$

$$= \sum_{s,k=1}^{n} \int_{\mu_k^0}^{\mu_k} \frac{\partial w_k(\lambda; h(\gamma))}{\partial h_s} \frac{\partial h_s(\gamma)}{\partial \gamma_j}\, d\lambda = \sum_{s=1}^{n} t_s\, \omega_{sj}(\gamma), \tag{3.25}$$

де, за визначенням, для майже всіх $\gamma \in R^n$

$$\omega_{sj}(\gamma) := \frac{\partial h_s(\gamma)}{\partial \gamma_j},$$

$j, s = \overline{1, n}$, причому матриця $\omega(\gamma) := \{\omega_{sj}(\gamma);\ j, s = \overline{1, n}\}$ називається [1] „частотною" матрицею динамічної системи (2.5). При еволюції динамічної системи (2.5) вздовж орбіти, дифеоморфної вибраній замкненій кривій σ_s, $s = \overline{1, n}$, з (3.25) та (3.24) випливає

$$\Delta \varphi_j|_{\sigma_s} = 2\pi\delta_{j,s},$$

де $j=\overline{1,n}$. Останнє означає, що еволюція динамічної системи на компактному многовиді M_h^n є квазіперіодичною траєкторією на торі T^n з множиною квазіперіодів $\{T_{j(s)} = 2\pi\omega_{sj}^{-1}(\gamma)\colon\ j=\overline{1,n}\}$, $s=\overline{1,n}$.

Зауваження **3.1.** Запропонована вище алгебраїчно-аналітична методика побудови відображень вкладення інтегральних многовидів цілком інтегровних поліноміальних гамільтонових систем в багатьох випадках може бути, очевидно, застосована і до цілком інтегровних раціонально заданих гамільтонових систем на $T^*(\boldsymbol{R}^n)$. Як приклад можна розглянути гамільтонову систему на площині $\boldsymbol{R}^n$, яка описує рух матеріальної точки в полі двох притягуючих за Ньютоном центрів, розміщених на фіксованій віддалі [1]. Гамільтоніан такої системи в еліптичних координатах $(\xi,\eta)\in\boldsymbol{R}^2$ задається в такій раціонально-алгебраїчній формі:

$$H := H_1 = 2p_\xi^2\frac{\xi^2-c^2}{\xi^2-\eta^2} + 2p_\eta^2\frac{\xi^2-c^2}{\eta^2-\xi^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2}, \tag{3.26}$$

де $(p_\xi, p_\eta)\in T^*_{(\xi,\eta)}(\boldsymbol{R}^2)$ — узагальнені імпульси матеріальної точки, $k\in\boldsymbol{R}_+$ — гравітаційний параметр і $c\in\boldsymbol{R}_+$ — фіксована віддаль між притягуючими центрами. Канонічна симплектична структура у відокремлених змінних Гамільтона – Якобі на $T^*(\boldsymbol{R}^2)$ задається як

$$\Omega^{(2)} = dp_\eta\wedge d\eta + dp_\xi\wedge d\xi \in \Lambda^2(T^*(\boldsymbol{R}^2)).$$

Відносно цієї структури існує ще одна раціонально-алгебраїчна функція H_2: $T^*(\boldsymbol{R}^2)\to\boldsymbol{R}^1$ в інволюції, тобто відповідна дужка Пуассона $\{H_1, H_2\} = 0$ на $T^*(\boldsymbol{R}^2)$, де

$$H_2 = \frac{1}{2}p_\xi^2(\xi^2-c^2) + \frac{1}{2}p_\eta^2(\eta^2-c^2) - k\xi - \frac{h_1}{4}(\xi^2+\eta^2). \tag{3.27}$$

Використовуючи розвинений вище алгоритм дослідження інтегрального многовиду M_h^n для відповідної інтегровної гамільтонової системи (2.5), легко отримуємо явний вираз для породжуючої функції канонічних перетворень у вигляді

$$S(\xi,\eta;h) = \int_{\xi^0}^{\xi} d\lambda\,\omega_\xi(\lambda;h) + \int_{\eta^0}^{\eta} d\lambda\,\omega_\eta(\lambda;h), \tag{3.28}$$

де $(\xi^0,\eta^0)\in\boldsymbol{R}^2$ — фіксовані числа, канонічно спряжені до змінних $(\xi,\eta)\in\in\boldsymbol{R}^2$, функції $(w_\xi, w_\eta)\in T^*_{(\xi,\eta)}(\boldsymbol{R}^2)$ визначені як розв'язки алгебраїчних рівнянь вигляду (3.16):

$$\begin{aligned} w_\xi^2 - \frac{h_2 + \frac{h_1}{2}\lambda^2 + 2k\lambda}{\lambda^2-c^2} &= 0,\\ w_\eta^2 - \frac{h_2 + \frac{h_1}{2}\lambda^2}{\lambda^2-c^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

для майже всіх $\lambda \in C$. Очевидно, що алгебраїчні вирази (3.29) визначають відповідно дві компактні рімановi поверхні $\Gamma^2_{h,\xi}$ та $\Gamma^2_{h,\eta}$, цикли на яких дифеоморфні при $(\xi, \eta) \in R^2$ дійсному тору T^2, згідно з теоремою Арнольда [6]. Тоді, згідно з формулою (3.21), для еволюційного параметра $t \in R$ орбіти динамічної системи (2.5) на інтегральному многовиді $M^n_h = \{(\xi, \eta; p_\xi, p_\eta) \in T^*(R^2): H_1 = H = h_1 \in R,\ H_2 = h_2 \in R\}$ справедлива явна формула

$$t = \frac{1}{4}\int_{\xi^0}^{\xi} d\lambda \frac{\lambda^2}{\sqrt{\left(h_2 + \frac{h_1}{2}\lambda^2 + 2k\lambda\right)(\lambda^2 - c^2)}} + \\ + \frac{1}{4}\int_{\eta^0}^{\eta} d\lambda \frac{\lambda^2}{\sqrt{\left(h_2 + \frac{h_1}{2}\lambda^2\right)(\lambda^2 - c^2)}}, \tag{3.30}$$

важлива для застосувань [1, 6] в задачах небесної механіки.

Зауваження **3.2.** В [13] описано широкий клас цілком інтегровних бігамільтонових на $T^*(R^n)$ систем, які допускають явне інтегрування при переході до так званих канонічних змінних Нійєнхейса, які задають майже скрізь вкладення інтегрального многовиду $\pi_h: M^n_h \to T^*(R^n)$ за допомогою симетричних функцій. Як можна легко переконатись, вказане вкладення Нійєнхейса отримується як частковий випадок запропонованої вище схеми алгебраїчно-аналітичного опису вкладення інтегрального многовиду з умовою невиродженості співвідношень (2.6) на M^n_h.

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
2. *Duistermaat J. J.* On global action–angles // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – 33. – P. 687–706.
3. *Нехорошев Н. Н.* Переменные действие–угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1972. – 26. – С. 181–198.
4. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нехорошев Н. Н.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: ВИНИТИ, 1985. – 213 с. – (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики; Т. 3).
5. *Гурвиц Р.* Теория функций. – М.: Мир, 1973. – 370 с.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
7. *Прикарпатський А. К., Притула М. М., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем. – Київ: УМК ВО, 1988. – 86 с.
8. *Годбийон В.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. – М.: Мир, 1960. – 127 с.
9. *Ercolani N., Siggia E. D.* Painleve property and geometry // Physica. – 1989. – D34. – P. 303–346.
10. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1970. – 412 с.
11. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебраических функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 343 с.
12. *Blaszak M.* Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems. – Berlin: Springer, 1998. – 350 p.
13. *Самойленко А. М.* Асимптотический метод исследования m-частотных колебательных систем // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 10. – С. 1366–1387.

Одержано 19.02.99