УДК 517.54

З. В. Самсония, И. Г. Самхарадзе (Ин-т вычислит. математики АН Грузии, Тбилиси)

О КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ УРАВНЕНИЮ БЕЛЬТРАМИ

By using methods of integral equations, we investigate problems of conformal and quasiconformal mappings of close domains.

Досліджуються задачі конформного та квазіконформного відображень близьких областей з допомогою методів інтегральних рівнянь.

В данной работе усиливаются результаты, полученные авторами ранее (см. замечание в конце статьи), и приводятся их некоторые применения. Следует также отметить, что в квазиконформном случае отображения близких областей, по-видимому, изучаются впервые.

1. Метод интегральных уравнений. Глобальный гомеоморфизм $\tilde{W}(z)$ всей комплексной плоскости E уравнения Бельтрами

$$W_{\bar{z}} = q(z)\,W_z \tag{1}$$

в предположении, что $q(z) \in L_p(E)$, $p > 2$, $|q(z)| \le Q_0 < 1$, можно строить по схеме, предложенной в [1], с помощью интегральных операторов

$$T_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \qquad \Pi_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta,$$

где G — конечная область плоскости E. В дальнейшем будем предполагать $q(z)$ достаточно гладкой функцией в $\overline{G}$, а вне $\overline{G}$ $q(z) \equiv 0$.

Согласно [1] (гл. 2), функция

$$\tilde{W}(z) = z + T_G f, \tag{2}$$

где $f(z)$ — единственное решение плоского сингулярного уравнения

$$f(z) - q(z)\,\Pi_G f = q(z), \tag{3}$$

осуществляет гомеоморфное отображение плоскости E на себя и $\tilde{W}(\infty) = \infty$, $z^{-1}\tilde{W}(z) \to 1$ при $|z| \to \infty$. Такая функция единственна.

Если $q(z) \in C_\gamma(\overline{G})$ и $\partial G \in C_\alpha^1$, $0 < \alpha < 1$, где C_α^1 — класс контуров Ляпунова, то, согласно [2], $\tilde{W}_z, \tilde{W}_{\bar{z}} \in C_{\gamma_0}$, где $0 < \gamma_0 \le \min\{\alpha, \gamma\}$. В случае $f(z) \in C_1(\overline{G})$ для $\Pi_G f$ справедливо представление [1]

$$\Pi_G f = T_G\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^2\,(\zeta - z)}. \tag{4}$$

Гомеоморфизм $\tilde{W}(z)$ известен под названием основного гомеоморфизма уравнения (1).

Пусть коэффициент $q(z)$ уравнения Бельтрами задан в некоторой конечной односвязной области G_0 и принадлежит классу $C_\gamma(\overline{G}_0)$, $0 < \gamma < 1$, $0 \in G_0$.

Рассмотрим на комплексной плоскости односвязную область G, $G \subseteq G_0$, $0 \in G$, ограниченную контуром $\Gamma = \partial G$, $\Gamma \in C_\alpha^1$, $0 < \alpha < 1$. Имея в виду свойства решений уравнения Бельтрами, функцию $W = W(z)$, $W(0) = 0$, $W(z_1) = 1$, $z_1 \in \Gamma$, реализующую квазиконформное отображение области G на единичный круг, будем искать в виде

$$W = \left[\tilde W(z) - \tilde W(0)\right] e^{\psi(z)} = \left[\tilde W(z) - \tilde W(0)\right] \exp\left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\nu(t)\, d\tilde W}{\tilde W(t) - \tilde W(z)} + iC \right), \quad (5)$$

где $d\tilde W = \tilde W_t dt + \tilde W_{\bar t} d\bar t$, $\tilde W(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1) ($q(z) \in 0$ вне $\overline{G}_0$, $\partial G_0 \in C'_\alpha$). Действительная константа C и действительная функция $\nu(t)$ определяются исходя из требований, предъявленных к $W(z)$.

Таким образом приходим к справедливости следующего предложения [3]:

функция $W = \underset{\sim}{W}(z)$, заданная в G формулой (5), удовлетворяет уравнению (1) и однолистно отображает G на единичный круг с выполнением условий $W(0) = 0$, $W(z_1) = 1$, если $\nu(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\nu(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \nu(\tau)\, d\arg\left[\tilde W(\tau) - \tilde W(t)\right] = -\ln\left|\tilde W(t) - \tilde W(0)\right| \quad (6)$$

и

$$C = -\arg\left[\tilde W(z_1) - \tilde W(0)\right] - \frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \nu(\tau)\, d\ln\left|\tilde W(\tau) - \tilde W(z_1)\right|.$$

Уравнение (6) имеет единственное решение $\nu(t)$, принадлежащее некоторому классу Гельдера.

В конформном случае $\tilde W(z) = z$ и, если

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\nu(t)\, dt}{t - z} + \frac{i}{\pi} \int\limits_\Gamma \frac{\nu(t)}{\rho} d\rho \qquad (\rho = |t|), \quad (7)$$

приходим к конструкции, предложенной в [4].

В предлагаемой работе метод плоских и контурных интегральных уравнений применяется в качестве конструктивного аппарата в задачах отображения близких областей. В приведенной ниже постановке этот метод можно применить как в конформном, так и в квазиконформном случаях.

2. О задаче конформного отображения близких областей. Предположим, что уравнение границы Γ задано в параметрической форме

$$t = g(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi; \qquad g(0) = g(2\pi).$$

Рассмотрим другую односвязную область $\tilde G$ типа G на комплексной плоскости с уравнением границы $\tilde\Gamma$,

$$t = \tilde g(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi; \qquad \tilde g(0) = \tilde g(2\pi).$$

Определение. *Область $\tilde G$ назовем ε-близкой ($\varepsilon > 0$) к области G, если выполняются условия*

$$|g(\tau) - \tilde g(\tau)| \le \varepsilon, \qquad \|g'(\tau) - \tilde g'(\tau)\|_{C_\alpha} \le \varepsilon. \quad (8)$$

Для любого $\varepsilon > 0$, разумеется, образуется бесконечное множество областей ε-близких к G. Такое множество обозначим через G_ε.

Интегральное уравнение (6) представим в комплексном виде

$$\nu(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{1}{t'} K(t; t_0)\, \nu(t)\, dt = -\ln|t_0|, \quad t_0 \in \Gamma, \quad (9)$$

где

$$K(t;t_0) = \frac{t'-t_0'}{t-t_0} + \frac{\bar t' - \bar t_0'}{\bar t - \bar t_0} + \frac{t_0'\dfrac{\bar t - \bar t_0}{t-t_0} - \bar t_0'}{\bar t - \bar t_0},$$

$$t' = \frac{dg(\tau)}{d\tau}, \qquad t_0' = \left(\frac{dg(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0}, \qquad \tau_0 \in [0, 2\pi].$$

Аналогично, интегральное уравнение для области $\tilde G$ имеет вид

$$\tilde\nu(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde\Gamma} \frac{1}{t}\tilde K(t;t_0)\,\tilde\nu(t)\,dt = -\ln|t_0|, \qquad t_0 \in \tilde\Gamma, \tag{9'}$$

где $\tilde K(t;t_0)$ получается из $K(t;t_0)$ в предположении, что $t=\tilde g(\tau)$, $t_0=\tilde g(\tau_0)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если границы областей* G *и* $\tilde G \in G_\varepsilon$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, *принадлежат классу* C'_α, $0<\alpha<1$, *то справедливо неравенство*

$$\|\nu(\tau)-\tilde\nu(\tau)\|_{C_{\alpha-\beta}} < A_0(\beta)\,\|\nu\|_{C_{\alpha-\beta}}\,\varepsilon, \tag{10}$$

где $\nu(t)$ *и* $\tilde\nu(\tau)$ *— единственные решения интегральных уравнений* (9) *и* (9′) *соответственно. Константа* $A_0(\beta)$ *и малое число* ε_0 *определяются заданием исходной области* G; β *— любое положительное число, меньшее* α.

Доказательство. Используя параметр τ, уравнения (9) и (9′) представим в виде

$$\nu(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{S(\tau_0;\tau)M(\tau;\tau_0)}{|e^{i\tau}-e^{i\tau_0}|^\beta}\left(\operatorname{ctg}\frac{\tau-\tau_0}{2}+i\right)|e^{i\tau}-e^{i\tau_0}|^\beta\,\nu(\tau)d\tau = -\ln|g(\tau_0)|, \tag{11}$$

$$\tilde\nu(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde S(\tau_0;\tau)\tilde M(\tau;\tau_0)}{|e^{i\tau}-e^{i\tau_0}|^\beta}\left(\operatorname{ctg}\frac{\tau-\tau_0}{2}+i\right)|e^{i\tau}-e^{i\tau_0}|^\beta\,\tilde\nu(\tau)d\tau = -\ln|\tilde g(\tau_0)|, \tag{11'}$$

где $\nu(\tau)=\nu[g(\tau)]$, $\tilde\nu(\tau)=\tilde\nu[\tilde g(\tau)]$.

Кроме того, введены следующие обозначения:

$$\frac{dt}{t-t_0} = \frac{g'(\tau)d\tau}{g(\tau)-g(\tau_0)} = M(\tau_0;\tau)\left(\operatorname{ctg}\frac{\tau-\tau_0}{2}+i\right)d\tau,$$

где функция

$$M(\tau_0;\tau) = \frac{g'(\tau)}{2ie^{i\tau}}\,\frac{e^{i\tau}-e^{i\tau_0}}{g(\tau)-g(\tau_0)} \tag{12}$$

удовлетворяет условию Гельдера с показателем α относительно своих аргументов, т. е. принадлежит классу $C_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$;

$$S(\tau_0;\tau) = \frac{g(\tau)-g(\tau_0)}{g'(\tau)}\,K[g(\tau);g(\tau_0)],$$

$$S(\tau_0;\tau)\in C_\alpha(\Gamma\times\Gamma), \qquad S(\tau_0;\tau_0)=0, \tag{13}$$

β — любое число из $(0,\alpha)$. Подобно определяются значения для выражений $\tilde M(\tau_0;\tau)$, $\tilde S(\tau_0;\tau)$.

Представим интегральные уравнения (11) и (11′) в операторном виде

$$A\nu = \nu + H\nu = f_0, \tag{14}$$

$$\tilde{A}\tilde{\nu} = \tilde{\nu} + \tilde{H}\tilde{\nu} = \tilde{f}_0, \tag{14'}$$

где $f_0 = -\ln|g(\tau_0)|$, $\tilde{f}_0 = -\ln|\tilde{g}(\tau_0)|$, $A = I + H$, $\tilde{A} = I + \tilde{H}$, а $H\nu$ и $\tilde{H}\tilde{\nu}$ — интегральные операторы, входящие в левые части уравнений (11) и (11′) соответственно.

Рассмотрим выражение

$$(H - \tilde{H})\nu(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \tilde{K}^*(\tau_0;\tau)\left(\operatorname{ctg}\frac{\tau-\tau_0}{2} + i\right)\left|e^{i\tau} - e^{i\tau_0}\right|^\beta \nu(\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

где

$$\tilde{K}^*(\tau_0;\tau) = \frac{S(\tau_0;\tau)M(\tau_0;\tau) - \tilde{S}(\tau_0;\tau)\tilde{M}(\tau_0;\tau)}{\left|e^{i\tau} - e^{i\tau_0}\right|^\beta}. \tag{16}$$

Воспользуемся следующими результатами из [5]:

а) функция двух переменных

$$\psi(t;t_0) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\lambda}, \qquad (t;\, t_0 \in \Gamma),$$

удовлетворяет на Γ условию Гельдера с показателем $\mu_0 - \lambda$, если $\varphi(t) \in C_{\mu_0}(\Gamma)$ и $0 \le \lambda < \mu_0 < 1$; более того, справедлива оценка

$$\|\psi(t;t_0)\|_{C_{\mu_0-\lambda}} \le A^*(1 + \lambda),$$

где $A^* \ge \dfrac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{|t - t_0|^\lambda}$ (см. § 5 и 6 указанной работы);

б) функция вида (15)

$$\omega[t(\tau_0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{K}^*(\tau_0;\tau)\, r(\tau_0;\tau)\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{|e^{i\tau} - e^{i\tau_0}|^{1-\beta}},$$

где $r(\tau_0;\tau) = \exp(-i\arg(e^{i\tau} - e^{i\tau_0}))$, принадлежит классу C_δ для любой ограниченной функции $\nu(\tau)$ и $\delta = \alpha - \beta$ (см. § 51 указанной работы).

Нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств [6]:

$$\|[g'(\tau) - g'(\tau_0)] - [\tilde{g}'(\tau) - \tilde{g}'(\tau_0)]\|_{C_\alpha} \le 2\varepsilon;$$

$$\left\|\frac{e^{i\tau} - e^{i\tau_0}}{g(\tau) - g(\tau_0)}\frac{g'(\tau)}{2ie^{i\tau}} - \frac{e^{i\tau} - e^{i\tau_0}}{\tilde{g}(\tau) - \tilde{g}(\tau_0)}\frac{\tilde{g}'(\tau)}{2ie^{i\tau}}\right\|_{C_\alpha} \le A_1\varepsilon;$$

$$\left\|\frac{g(\tau) - g(\tau_0)}{\bar{g}(\tau) - \bar{g}(\tau_0)} - \frac{\tilde{g}(\tau) - \tilde{g}(\tau_0)}{\bar{\tilde{g}}(\tau) - \bar{\tilde{g}}(\tau_0)}\right\|_{C_\alpha} \le A_2\varepsilon;$$

$$|\tilde{g}'(\tau)| \ge \frac{\min\limits_{[0,2\pi]}|g'(\tau)|}{2} \quad \text{при } \varepsilon \le \frac{\min|g'(\tau)|}{2};$$

$$\left\|\left(g'(\tau_0)\frac{\bar{g}(\tau) - \bar{g}(\tau_0)}{g(\tau) - g(\tau_0)} - \bar{g}'(\tau_0)\right) - \left(\tilde{g}'(\tau_0)\frac{\bar{\tilde{g}}(\tau) - \bar{\tilde{g}}(\tau_0)}{\tilde{g}(\tau) - \tilde{g}(\tau_0)} - \bar{\tilde{g}}'(\tau_0)\right)\right\|_{C_\alpha} \le A_3\varepsilon,$$

где все содержащиеся в оценках константы не зависят от $\tilde{G}$.

Учитывая (12), (13) и результат а) в (16), а также приведенные неравенства из [6] при малых значениях параметра ε, убеждаемся в справедливости неравенства

$$\left\| \tilde{K}^*(\tau_0;\tau) \right\|_{C_{\alpha-\beta}} \leq C_1(\beta)\,\varepsilon,$$

которое, в свою очередь, согласно результату б) из (15) приводит к оценке

$$\left\| (H - \tilde{H})\nu \right\|_{C_{\alpha-\beta}} \leq C_0(\beta)\, \|\nu\|_{C_{\alpha-\beta}}\, \varepsilon, \tag{17}$$

где $C_0(\beta)$, $C_1(\beta)$ — абсолютные константы, а $\nu(\tau)$ — любая функция класса $C_{\alpha-\beta}$.

Предположим теперь, что $\nu(\tau)$ и $\tilde{\nu}(\tau)$ — решения уравнений (11) и (11′) соответственно. Тогда в силу (14), (14′) имеем

$$\nu - \tilde{\nu} = \tilde{A}^{-1}\left(H - \tilde{H}\right)\nu - \tilde{A}^{-1}\left(\tilde{f}_0 - f_0\right). \tag{18}$$

Но согласно (16)

$$\|A - \tilde{A}\|_{C_{\alpha-\beta}} = \sup_{\|\nu\|=1} \|(\tilde{A} - A)\nu\|_{C_{\alpha-\beta}} \leq \sup_{\|\nu\|=1} C_0(\beta)\|\nu\|_{C_{\alpha-\beta}} = C_0(\beta)\,\varepsilon$$

и

$$\|(\tilde{A} - A)A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}} \leq \|\tilde{A} - A\|_{C_{\alpha-\beta}}\, \|A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}} \leq C_0(\beta)\|A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}}\,\varepsilon\,.$$

Если теперь предположить, что $\varepsilon < 1/(C_0(\beta)\|A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}})$, то обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ будет равномерно (относительно $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{G}$) ограниченным в пространстве $C_{\alpha-\beta}$,

$$\|\tilde{A}^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}}}{1 - \|(\tilde{H} - H)A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}}}.$$

Имея в виду еще и очевидную оценку для $\|f_0 - \tilde{f}_0\|_{C_{\alpha-\beta}}$, из (18) непосредственно получаем неравенство (10), справедливое для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0 = \min\left\{ \frac{\min|g(\tau)|}{2}; \frac{\min|g'(\tau)|}{2}; \frac{1}{C_0(\beta)\|A^{-1}\|_{C_{\alpha-\beta}}} \right\},$$

$A_0(\beta)$ — константа, зависящая только от G и β (β — любое положительное число, меньшее α). Теорема доказана.

Оценка (10) позволяет с помощью функции $\nu(t)$, определенной заданием исходной области G, строить приближения к конформно отображающим функциям $w = \tilde{\varphi}_{\tilde{\nu}}(z)$ ($\tilde{\varphi}_{\tilde{\nu}}(0) = 0$, $\tilde{\varphi}'_{\tilde{\nu}}(0) > 0$) (следуя [4]; см. формулу (7)) произвольной области $\tilde{G} \in G_\varepsilon$ на $|w| < 1$.

Положим

$$\tilde{\varphi}_\nu(z) = z\exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\nu(\tau)\,\tilde{g}'(\tau)}{\tilde{g}(\tau) - z}d\tau + \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\nu(\tau)\,d|\tilde{g}(\tau)|}{|\tilde{g}(\tau)|} \right), \tag{19}$$

где $\nu(\tau)$ — решение уравнения (9).

Если используем идею доказательства теоремы Племеля – Привалова [5] (§ 18) и неравенство (10), то установим справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Функция* $w = \tilde{\varphi}_\nu(z)$ $(\tilde{\varphi}_\nu(0) = 0,\ \tilde{\varphi}'_\nu(0) > 0)$, *заданная в* $\tilde{G}$ *формулой* (19), *где* $\tilde{G} \in G_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, *в* $\bar{\tilde{G}}$ *допускает оценку*

$$|\tilde{\varphi}_{\tilde{\nu}}(z) - \tilde{\varphi}_\nu(z)| < Q_1 \varepsilon,$$

где константа Q_1 *зависит только от области* G.

3. О квазиконформном отображении близких областей. Воспользуемся приемом выхода в плоскость основного гомеоморфизма $\tilde{W}(z)$. В плоскости $\tilde{W}(z)$ интегральные уравнения (9) и (9′) принимают вид

$$\mu(\zeta_0) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\tilde{W}(\Gamma)} \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = -\ln|\zeta_0 - W_0| \qquad \zeta_0 \in \tilde{W}(\Gamma), \tag{20′}$$

$$\mu(\zeta_0) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\tilde{W}(\tilde{\Gamma})} \frac{\tilde{\mu}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = -\ln|\zeta_0 - W_0| \qquad \zeta_0 \in \tilde{W}(\tilde{\Gamma}), \tag{20″}$$

где

$$\mu(\zeta_0) = \nu\left[\tilde{W}^{-1}(g(\tau_0))\right], \quad \tilde{\mu}(\zeta_0) = \tilde{\nu}\left[\tilde{W}^{-1}(\tilde{g}(\tau_0))\right], \quad \tau_0 \in [0, 2\pi],$$

$$W_0 = \tilde{W}(0), \quad \zeta = \tilde{W}[g(\tau)] \text{ в } (20′), \quad \zeta = \tilde{W}[\tilde{g}(\tau)] \text{ в } (20″).$$

Таким образом, мы располагаем следующими данными [2]:

$$\tilde{W}(\Gamma), \tilde{W}(\tilde{\Gamma}) \in C^1_{\gamma_0}[0, 2\pi], \quad \mu[\zeta(\tau)] \in C_{\gamma_0}[0, 2\pi], \quad \tilde{\mu}\left[\tilde{\zeta}(\tau)\right] \in C_{\gamma_0}[0, 2\pi].$$

В силу (8) имеем

$$\left|\tilde{W}[g(\tau)] - \tilde{W}[\tilde{g}(\tau)]\right| \le C_1(\tilde{W}; G_0)|g(\tau) - \tilde{g}(\tau)| \le C_1(\tilde{W}; G_0)\,\varepsilon. \tag{21}$$

Кроме того,

$$\left(\tilde{W}[g(\tau)]\right)'_\tau = \tilde{W}_t[g(\tau)]\,g'(\tau) + \tilde{W}_{\bar{t}}[g(\tau)]\,\bar{g}'(\tau),$$

$$\left(\tilde{W}[\tilde{g}(\tau)]\right)'_\tau = \tilde{W}_t[\tilde{g}(\tau)]\,\tilde{g}'(\tau) + \tilde{W}_{\bar{t}}[\tilde{g}(\tau)]\,\bar{\tilde{g}}'(\tau),$$

$$\left(\tilde{W}[g(\tau)]\right)'_\tau, \left(\tilde{W}[\tilde{g}(\tau)]\right)'_\tau \in C_{\gamma_0}[0, 2\pi].$$

Составим разность

$$\left(\tilde{W}[g(\tau)]\right)'_\tau - \left(\tilde{W}[\tilde{g}(\tau)]\right)'_\tau = \tilde{W}_t[g(\tau)]\,g'_\tau - \tilde{W}_t[g(\tau)]\,\tilde{g}'_\tau + \tilde{W}_t[g(\tau)]\,\tilde{g}'_\tau -$$

$$- \tilde{W}_t[\tilde{g}(\tau)]\,\tilde{g}'_\tau + \tilde{W}_{\bar{t}}[g(\tau)]\,\bar{g}'_\tau - \tilde{W}_{\bar{t}}[g(\tau)]\,\bar{\tilde{g}}'_\tau + \tilde{W}_{\bar{t}}[g(\tau)]\,\bar{\tilde{g}}'_\tau - \tilde{W}_{\bar{t}}[\tilde{g}(\tau)]\,\bar{\tilde{g}}'_\tau.$$

Учитывая в ней неравенства

$$\|g'(\tau) - \tilde{g}'(\tau)\|_{C_{\gamma_0 - \eta}} \le (\mathrm{const})_1\, \|g'(\tau) - \tilde{g}'(\tau)\|_{C_\alpha},$$

$$\left\|\bar{g}'(\tau) - \bar{\tilde{g}}'(\tau)\right\|_{C_{\gamma_0 - \eta}} \le (\mathrm{const})_2\, \left\|\bar{g}'(\tau) - \bar{\tilde{g}}'(\tau)\right\|_{C_\alpha},$$

$$\left\|\tilde{W}_t[g(\tau)] - \tilde{W}_t[\tilde{g}'(\tau)]\right\|_{C_{\gamma_0 - \eta}} \le (\mathrm{const})_3\, |g(\tau) - \tilde{g}(\tau)|^\eta,$$

$$\left\|\tilde{W}_{\bar{t}}[g(\tau)] - \tilde{W}_{\bar{t}}[\tilde{g}'(\tau)]\right\|_{C_{\gamma_0 - \eta}} \le (\mathrm{const})_4\, |g(\tau) - \tilde{g}(\tau)|^\eta,$$

где $0 < \eta < \gamma_0$, в силу (8) получаем неравенство

$$\left\| \left(\tilde{W}[g(\tau)] \right)'_{\tau} - \left(\tilde{W}[\tilde{g}(\tau)] \right)'_{\tau} \right\|_{C_{\delta_1}} \leq C_2(\tilde{W}; G_0)\, \varepsilon^{\eta}, \tag{22}$$

где $\delta_1 = \gamma_0 - \eta$; η — любое число между 0 и γ_0. Оптимальным вариантом в данном случае нам представляется $\eta = \gamma_0/2$.

Таким образом, условия (8) в плоскости гомеоморфизма $\tilde{W}_{G_0}(z)$ заменяются условиями (21) и (22). Применяя теперь теорему 1, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Теорема 3. *Если области* $G \subsetneq G_0$ *и* $\tilde{G} \in G_\varepsilon$, $\tilde{G} \subset G_0$, *границы которых принадлежат классу* C^1_α, $0 < \alpha < 1$, ε*-близки друг другу в смысле* (8), *то для всех* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ *справедлива оценка*

$$\|\mu(\zeta) - \tilde{\mu}(\zeta)\|_{C_{\gamma_0 - \eta - \beta}} \leq C_0^*(\tilde{W}; G; \beta)\, \|\mu\|_{C_{\gamma_0 - \eta - \beta}}\, \varepsilon^{\eta},$$

где $\mu(\zeta) = \nu\left[\tilde{W}^{-1}(g(\tau))\right]$ *и* $\tilde{\mu}(\zeta) = \tilde{\nu}\left[\tilde{W}^{-1}(\tilde{g}(\tau))\right]$ *— единственные решения интегральных уравнений* (20′) *и* (20″) *соответственно,* $0 < \gamma_0 \leq \min\{\alpha, \gamma\}$, β *— любое положительное число, меньшее* $\gamma_0 - \eta$, *а* $\eta \in (0, \gamma_0)$. *Константа* C_0^* *и малое число* ε_1 *вполне определяются заданием исходной области* G *и гомеоморфизма* $\tilde{W}(z)$.

Теоремы 1 и 3 усиливают (в смысле порядка относительно ε) результаты, полученные в [7].

В заключение заметим, что если G_0 — круг, то можно указать конкретные виды коэффициента $q(z)$ уравнения (1), для которых гомеоморфизм $\tilde{W}(z)$ находится в явном виде. Это достигается с использованием схемы (2), (3), с учетом в ней формулы (4) и выражения $T_{G_0}\left(z^n \bar{z}^m\right)$ из [1, с. 44], где n, m — неотрицательные целые числа.

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1953. – 628 с.
2. *Манджавидзе Г. Ф.* Граничная задача линейного сопряжения со смещением и ее связь с теорией обобщенных аналитических функций // Тр. Тбилис. мат. ин-та. – 1967. – **33**. – С. 82 – 87.
3. *Квеселава Д. А., Самсония З. В.* О квазиконформном отображении областей // Метрические вопросы теории функций. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 53 – 65.
4. *Квеселава Д. А.* О применении интегральных уравнений в теории конформных отображений // Тр. ВЦ АН Грузии. – 1961. – **2**. – С. 3 – 15.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 599 с.
6. *Самсония З. В.* Конструктивная реализация плоских квазиконформных отображений, соответствующих линейным эллиптическим системам: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1991. – 247 с.
7. *Самсония З. В., Симхарадзе И. Г.* К конформному и квазиконформному отображению близких областей // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации. – Пенза: Изд-во политехн. ин-та, 1992. – С. 100 – 112.

Получено 19.05 97