УДК 517.968

С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ СХЕМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

New projection schemes of digitization of ill-posed problems are constructed which are optimal in the sense of amount of used discrete information. The fact is established that the application of self-adjoint projection schemes to digitization of equations with self-adjoint operators is not optimal.

Побудовано нові проекційні схеми дискретизації некоректних задач, що є оптимальними у сенсі обсягу використовуваної дискретної інформації. Встановлено, що при дискретизації рівнянь з самоспряженими операторами використання самоспряжених проекційних схем не є оптимальним.

В настоящее время большой интерес вызывают исследования по оценкам информационной сложности приближенного решения различных задач (см. [1]). При этом под сложностью понимается минимальное количество значений информационных функционалов, требуемых для нахождения решения задачи с наперед заданной точностью. Применительно к операторным уравнениям подобные исследования проводились в основном для уравнений II рода (см., например, [2] и приведенную в ней библиографию), уравнения I рода изучались в работах [3–7]. Целью настоящей статьи является построение новых проекционных схем дискретизации некорректных задач, оптимальных (как по точности приближения, так и в смысле объема используемой дискретной информации) на ряде классов уравнений I рода. В частности, будет установлен неожиданный на наш взгляд эффект, состоящий в том, что при дискретизации уравнений с самосопряженными операторами использование самосопряженных приближающих операторов не является, вообще говоря, оптимальным в указанном смысле.

Пусть X — действительное гильбертово пространство с обычным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порождаемой им нормой $\|\cdot\|_X$, а $\mathcal{L}(X,X)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в X с введенной в нем стандартной нормой $\|\cdot\|$. Для уравнения I рода

$$Ax = f \tag{1}$$

с компактным оператором $A \in \mathcal{L}(X,X)$ и $f \in \operatorname{Range} A$ рассмотрим задачу конечномерной аппроксимации нормального решения x_0, т. е. решения уравнения (1) с минимальной нормой в X. Будем считать при этом, что вместо f задано некоторое его приближение $f_\delta \in X_{\delta,f}$, где $X_{\delta,f}$ — шар с центром в f радиуса δ в метрике пространства X, а δ — малое положительное число, называемое модельной погрешностью правой части (1). Другими словами, мы имеем возмущенное уравнение

$$Ax = f_\delta, \tag{2}$$

где $\|f - f_\delta\|_X \le \delta$.

Поскольку при организации любой вычислительной процедуры допустимо использование лишь конечного числа значений информационных функционалов, вычисленных на коэффициентах задачи, то вместо уравнения (2) мы вынуждены рассматривать его конечномерный аналог. Этот этап построения приближенного решения (1), (2) в теории некорректных задач принято называть (см., например, [8]) дискретизацией, суть которой заключается в том, что в процессе вычисления используется только дискретная информация об операторе A и правой части f_δ. В рамках настоящей работы ограничимся изучением проекционных схем дискретизации. В следующем пункте приведем некоторые известные понятия и факты, а также дадим постановку исследуемой задачи.

1. Пусть $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots\}$ — произвольный ортонормированный базис гильбертова пространства X, а $P_m = P_{B,m}$ — ортопроектор на $\mathrm{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, т. е. $P_{B,m}g = \sum_{i=1}^{m}(b_j, g)b_i$. Тогда произвольный оператор $A \in \mathcal{L}(X, X)$ может быть представлен с помощью бесконечной матрицы $\{(b_i, Ab_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ в следующем виде:

$$Ag = \sum_{i,j=1}^{\infty}(b_i, Ab_j)(b_j, g)b_i.$$

Каждому скалярному произведению (b_i, Ab_j) поставим в соответствие точку (i, j) из множества $[1, \infty] \times [1, \infty]$ координатной плоскости, которую будем рассматривать в качестве номера функционала (b_i, Ab_j). Номером скалярного произведения (b_i, g) будем считать число j. Если теперь каждой области $\Omega \subset [1, \infty) \times [1, \infty)$ поставить в соответствие выражения

$$A_\Omega = A_{B,\Omega} := \sum_{(i,j)\in\Omega}(b_i, Ab_j)(b_j, \cdot)b_i,$$
$$P_\Omega f_\delta = \sum_{k\in\omega}(b_k, f_\delta)b_k, \quad \omega = \{i : (i,j) \in \Omega\}, \tag{3}$$

то с помощью различных наборов Ω и B можно определить все возможные проекционные схемы дискретизации уравнений (1), (2), в которых в качестве дискретной информации используются скалярные произведения

$$(b_i, Ab_j), \quad (b_i, f_\delta), \quad (i,j) \in \Omega, \quad k \in \omega, \tag{4}$$

называемые также галеркинской информацией. Под проекционной схемой дискретизации (1), (2) в дальнейшем будем понимать пару (Ω, B) элементов Ω и B, в результате воздействия которой на (2) осуществляется переход к дискретизированному уравнению

$$A_\Omega x = P_\Omega f_\delta, \tag{5}$$

где A_Ω и $P_\Omega f_\delta$ определяются согласно (3).

Поскольку в силу компактности оператора A задача нахождения решений уравнения (1) не является корректной в смысле Адамара, то для построения устойчивого приближенного решения (1) необходима регуляризация. Следуя [9, с. 55; 10, с. 7], под регуляризатором задачи (1), (2) будем понимать такое семейство операторов $R_\alpha = R_\alpha(A) : X \to X$, зависящих от параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ и оператора A, что для любого $f \in \mathrm{Range}\,A$

$$\lim_{\delta\to\infty}\ \sup_{f_\delta\in X_{\delta,f}}\ \inf_{u\in A^{-1}f}\|u - R_\alpha(A)f_\delta\|_X = 0,$$

где $a(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, а $A^{-1}f$ — полный прообраз элемента f. Совокупность всех регуляризаторов обозначим через $\mathcal{R}$.

Определение. *Под регуляризационно-проекционным методом решения уравнения* (1) *будем понимать произвольное правило* (R_α, Ω, B), $R_\alpha \in \mathcal{R}$, *в соответствии с которым набору функционалов* (4) *в качестве приближенного решения* (1) *сопоставляется элемент*

$$x_{\mathrm{disc}} = x_{\mathrm{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A, f_\delta) := R_\alpha(A_{B,\Omega})P_\Omega f_\delta. \tag{6}$$

Таким образом, регуляризационно-проекционный метод (РПМ) решения (1) можно представить в виде комбинации метода регуляризации R_α и проекционной схемы дискретизации (Ω, B).

Предположим, что нормальное решение x_0 уравнения (1) принадлежит некоторому ограниченному центрально-симметричному множеству $\mathcal{M} \subset X$. Точность РПМ (R_α, Ω, B) на множестве $\mathcal{M}$ характеризуется наибольшим отклонением

$$\mathcal{E}_\delta(A, \mathcal{M}, R_\alpha, \Omega, B) = \sup_{x_0 \in \mathcal{M}} \inf_{f_\delta : \|Ax_0 - f_\delta\|_X \le \delta} \|x_0 - x_{\mathrm{disc}}\|_X .$$

Элементы множества $M_{p,\rho}(A) := \{u : u = |A|^p v,\ v \in X_{\rho,0}\}$, $|A| = (A^*A)^{1/2}$, где A^* — оператор, сопряженный к A, называются истокопредставимыми. Известно, что если уравнение (1) имеет истокопредставимое решение $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$, то x_0 — наименьшее в метрике X решение (1) (т. е. x_0 — нормальное решение (1)). В дальнейшем будем считать, что при некоторых $p > 0$ и $\rho > 0$ уравнение (1) имеет решение $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$. Если теперь ввести в рассмотрение некоторый класс компактных операторов $\mathcal{H} \subset \{A : A \in \mathcal{L}(X, X),\ \|A\| \le \gamma\}$, то под погрешностью РПМ (R_α, Ω, B) на классе $\mathcal{H}$, как обычно, будем понимать величину

$$\mathcal{E}'_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}, R_\alpha, \Omega, B) = \sup_{A \in \mathcal{H}} \mathcal{E}_\delta(A, M_{p,\rho}(A), R_\alpha, \Omega, B).$$

Оптимальной погрешностью проекционной схемы (Ω, B) на классе $\mathcal{H}$ назовем величину

$$\mathcal{E}_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}, \Omega, B) = \sup_{R_\alpha \in \mathcal{R}} \mathcal{E}_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}, R_\alpha, \Omega, B).$$

Известно, что при любых Ω и B справедливо соотношение

$$\mathcal{E}_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}, \Omega, B) \ge \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}.$$

Прежде чем ввести в рассмотрение исследуемую величину, установим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для сохранения оптимального порядка точности* $O(\delta^{p/(p+1)})$ *на классе компактных операторов* $\mathcal{H}$ *необходимо дискретизировать уравнение* (2) *так, чтобы для любого оператора* $A \in \mathcal{H}$ *и элемента* $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$ *выполнялось соотношение*

$$\|(P_\Omega A - A_\Omega) x_0\|_X = O(\delta). \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть при некоторых A и $\bar{x}_0 = |A|^p \bar{v}$, $\|\bar{v}\| = \rho$, справедливо равенство

$$\|(P_\Omega A - A_\Omega) \bar{x}_0\|_X = \delta_1. \qquad (8)$$

Тогда (5) можно рассматривать в качестве возмущенного уравнения по отношению к уравнению

$$A_\Omega x = g,$$

где $g = A_\Omega \bar{x}_0$, с правой частью $P_\Omega f_\delta$, известной с некоторой погрешностью δ_2. Оценим величину δ_2. Используя (8), находим

$$\|g - P_\Omega f_\delta\|_X \le \|P_\Omega(\bar{f} - f_\delta)\|_X + \|(P_\Omega A - A_\Omega)\bar{x}_0\|_X \le \delta + \delta_1,$$

где $\bar{f} = A\bar{x}_0$. С другой стороны, для любого f_δ такого, что $P_\Omega f_\delta = R_\Omega \bar{f}$ и $\|(I - P_\Omega)(\bar{f} - f_\delta)\| \le \delta$, в силу (8) справедливо $\|g - P_\Omega f_\delta\|_X = \delta_1$. Таким образом, имеем $\delta_1 \le \delta_2 \le \delta + \delta_1$.

Для любого центрально-симметричного множества $\mathcal{M}$ и произвольного регуляризатора $R_\alpha \in \mathcal{R}$ введем в рассмотрение величину

$$e_{\delta,\delta_2}(A, A_\Omega, \mathcal{M}, R_\alpha) = \sup_{x_0 \in \mathcal{M}} \sup_{\substack{f_\delta:\, \|Ax_0 - f_\delta\|_X \le \delta \\ \|P_\Omega f_\delta - A_\Omega x_0\|_X \le \delta_2}} \|x_0 - x_{\text{disc}}\|_X,$$

где x_{disc} определяется согласно (6). Используя рассуждения из § 4.2 [8], § 1.3 [10], легко показать, что

$$e_{\delta,\delta_2}(A, A_\Omega, \mathcal{M}, R_\alpha) \ge \overline{\omega}_{\delta_2}(A_\Omega, \mathcal{M}),$$

где $\overline{\omega}_\delta(F, \mathcal{M}) = \sup\limits_{u \in \mathcal{M},\, \|Fu\|_X \le \delta} \|u\|_X$. Нетрудно видеть, что для любого $\xi \ge 1$

$$\overline{\omega}_{\delta_2}(A_\Omega, M_{p,\rho}(A)) = \frac{1}{\xi}\overline{\omega}_{\xi\delta_2}(A_\Omega, M_{p,\xi\rho}(A)) \ge \frac{1}{\xi}\overline{\omega}_{\xi\delta_2}(A_\Omega, M_{p,\rho}(A)).$$

В силу компактности A при достаточно малых δ, δ_1 число $\lambda = (\delta_2/\rho)^{1/(p+1)}$ будет принадлежать спектру оператора $|A|$. Если $\bar{v}$ — собственный элемент оператора $|A|$ ($|A|\bar{v} = \lambda\bar{v}$), то из (8) и $\|Ay\|_X = \||A|y\|_X$ следует

$$\left\|A_\Omega |A|^p \bar{v}\right\|_X \le$$

$$\le \|(P_\Omega A - A_\Omega)|A|^p\bar{v}\|_X + \|P_\Omega A|A|^p\bar{v}\|_X \le \delta_1 + \delta_2 \le \xi\delta_2,$$

$$\left\||A|^p\bar{v}\right\|_X \le \rho^{1/(p+1)}\delta_2^{p/(p+1)},$$

где $\xi = 1 + \delta_1/\delta_2$ и $1 < \xi \le 2$.

Отсюда вытекает оценка

$$e_{\delta,\delta_2}(A, A_\Omega, M_{p,\rho}(A), R_\alpha) \ge \frac{1}{\xi}\overline{\omega}_{\xi\delta_2}(A_\Omega, M_{p,\rho}(A)) \ge \frac{1}{\xi}\rho^{1/(p+1)}\delta_2^{p/(p+1)}.$$

Утверждение теоремы следует из очевидного соотношения

$$\mathcal{E}_\delta(A, M_{p,\rho}(A), R_\alpha, \Omega, B) \ge e_{\delta,\delta_2}(A, A_\Omega, M_{p,\rho}(A), R_\alpha),$$

оценки $\delta_2 \ge \delta_1$ и того факта, что область Ω строится независимо от оператора A и элемента $\bar{v}$.

***Замечание* 1.** Ранее в работе [11], где изучалась конечно-разностная схема дискретизации, рассматривался следующий аналог условия (7):

$$\|(P_\Omega A - A_\Omega)x_0\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Через $\Pi^d_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H})$, $d = (d_1, d_2)$, обозначим множество всех возможных проекционных схем (Ω, B), для которых выполняются соотношения

$$\mathcal{E}_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}, \Omega, B) \le d_1 \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad d_1 \ge 1,$$

и для любого уравнения (1), где $A \in \mathcal{H}$, $f = Ax_0$, $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$,

$$\| (P_\Omega A - A_\Omega) x_0 \|_X \le d_2 \delta. \tag{9}$$

Предполагается, что постоянные d_1, d_2 выбраны так, что $\Pi^d_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}) \ne \varnothing$. Это будет выполняться, например, если

$$(d_2 + 1)^{2p+1} \le (d_1(2d_2 + 1))^{p+1}.$$

Пусть card(Ω) — общее число функционалов (4), используемых при дискретизации (5) уравнения (2). Настоящая статья посвящена вычислению величины

$$\mathrm{Card}_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}) = \min\{\mathrm{card}(\Omega) \colon (\Omega, B) \in \Pi^d_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H})\},$$

которая характеризует минимальный объем дискретной информации (4), гарантирующий оптимальный порядок точности $O(\delta^{p/(p+1)})$ на классе уравнений (1) с операторами $A \in \mathcal{H}$ и нормальными решениями x_0 из множества $M_{p,\rho}(A)$.

2. Обозначим через X^r, $0 < r < \infty$, линейное нормированное подпространство X такое, что для произвольного элемента $g \in X^r$ справедливо соотношение $\| g \|_X \le \| g \|_{X^r}$ и при этом найдется такой базис B, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполняются двойственные соотношения вида

$$\| I - P_{B,k} \|_{X^r \to X} \le \beta_r k^{-r}, \qquad \| P_{B,k} \|_{X \to X^r} \le \overline{\beta}_r k^r,$$

где I — тождественный оператор в X, а константы β_r и $\overline{\beta}_r$ не зависят от k.

Совокупность базисов B, удовлетворяющих этим условиям, обозначим через $\mathcal{B}_r$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением базисов только из $\mathcal{B}_r$.

Пусть $\mathcal{H}^r_\gamma = \{A \colon A \in \mathcal{L}(X, X),\ \| A \|_{X \to X^r} \le \gamma,\ \| A^* \|_{X \to X^r} \le \gamma\}$. Легко видеть, что X^r является обобщением соболевского пространства W^r_2 функций, имеющих суммируемые в квадрате r-е производные, а множество $\mathcal{H}^r_\gamma$ обобщает класс интегральных операторов вида $A x(t) = \int_0^1 h(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau$, ядра $h(t, \tau)$ которых имеют частные производные и

$$\sum_{0 \le i+j \le r} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^{i+j} h(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^j} \right|^2 dt\, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma.$$

Для $X^r = W^r_2$ в качестве примера базиса из $\mathcal{B}_r$ можно назвать тригонометрическую систему (в периодическом случае) или ортонормированную систему функций, построенных на базе так называемых всплесков (подробнее об этом см. [12]).

В рамках предлагаемой нами проекционной схемы дискретизации под Ω будем понимать фигуру координатной плоскости следующего вида:

$$\Gamma^{a,b}_n = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k,$$

$$Q_0 = \{1\} \times [1, 2^{bn}], \quad Q_k = (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{bn-ak}], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b \ge a \ge 0$. Заметим, что координаты (i, j) верхних правых углов прямоугольников Q_k лежат на гиперболе $i^a j = 2^{bn}$, а сама фигура $\Gamma^{a,b}_n$ представляет собой квадрант так называемого ступенчатого гиперболического креста. Впервые гиперболический крест был применен в теории приближений К. И. Бабенко в работе [13], где для некоторых классов периодических функций исследовался вопрос об оптимальном приближающем подпространстве в смысле поперечника Колмогорова. При дискретизации некорректных задач квадрант ступенчатого гиперболического креста $\Gamma_n^{a,b}$, $a=1$, $b=2$, уже использовался в работе [5]. При этом у ядер соответствующих интегральных операторов предполагалось наличие суммируемой в квадрате доминирующей смешанной частной производной. Мы же сейчас покажем, что на самом деле подход, связанный с использованием гиперболического креста, может быть успешно применен и для значительно более широких классов уравнений (1), где $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$.

Следуя [14], рассмотрим класс регуляризаторов, задаваемых параметрически. А именно, пусть $\mathcal{G} = \{g_\alpha\}$, $0<\alpha<1$, — некоторое параметрическое семейство функций, измеримых по Борелю на отрезке $[0,\gamma^2]$, $\|A\| \le \gamma$, и при $0 \le p \le p_*$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0\le\lambda\le\gamma^2} \lambda^p |1-\lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_p \alpha^p, \qquad \sup_{0\le\lambda\le\gamma^2} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2},$$

где p_*, χ_p и χ_* — некоторые не зависящие от α положительные константы.

Совокупность регуляризаторов, задаваемых соотношением $R_\alpha = g_\alpha(A^*A)A^*$, $g_\alpha \in \mathcal{G}$, обозначим $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Примером регуляризатора из $\mathcal{R}'$ является обобщенный метод Тихонова [4].

Согласно схеме $(\Gamma_n^{a,b}, B)$, каждому оператору $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ ставится в соответствие оператор

$$A_n = A_{a,b,n} := \sum_{k=0}^{n} \Delta_k A P_{2^{bn-ak}},$$

где $\Delta_0 = P_1$, $\Delta_k = P_{2^k} - P_{2^{k-1}}$, $k = 1, 2, \dots, n$, а $P_n = P_{B,n}$— ортопроектор, действующий на линейную оболочку первых n элементов базиса $B \in \mathcal{B}_r$. Если $bn - ak$ не является целым числом, то под $P_{2^{bn-ak}}$ будем понимать $P_{2^{\{bn-ak\}}}$, где $\{g\}$ — ближайшее сверху к g целое число. В качестве приближенного решения x_{disc} (6) будем рассматривать элемент

$$x_{\mathrm{disc}} = g_\alpha(A_{a,b,n}^* A_{a,b,n}) A_{a,b,n}^* P_{2^n} f_\delta,$$

где g_α — произвольная функция из $\mathcal{G}$, $p_* \ge p/2$.

Следующий результат доказывается аналогично теореме 2 из [6].

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$ *и* B *— произвольный базис из* $\mathcal{B}_r$. *Для того чтобы* $(\Gamma_n^{a,b}, B) \in \Pi_{\delta,p,\rho}^d(\mathcal{H}_\gamma^r)$, *достаточно выполнения условий:*

а) $2^{-r(p+1)n} \asymp \delta$, $\quad a=0$, $\quad b=1$ *при* $0<p\le 1$;

б) $2^{-r(p+1)n} \asymp \delta$, $\quad a = \dfrac{3-p}{2}$, $\quad b=2$ *при* $1<p<2$;

в) $2^{-2r(p+1)n/p} \asymp \delta$, $\quad a = \dfrac{p-1}{p}$, $\quad b=2$ *при* $p\ge 2$.

Оптимальный порядок точности $O(\delta^{p/(p+1)})$ *достигается при использовании произвольного регуляризатора* $R_\alpha \in \mathcal{R}'$. *При этом*

$$\mathrm{Card}_{\delta,p,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^r) \le \mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b}) \asymp \delta^{-y},$$

где $y = \dfrac{2}{r(p+1)}$ *при* $0 < p \le 1$, $y = \dfrac{p+3}{2r(p+1)}$ *при* $1 \le p \le 2$, $y = \dfrac{2p+1}{2r(p+1)}$ *при* $p \ge 2$.

Заметим, что утверждение теоремы 2 при $0 < p \le 1$ следует из результатов работы [4].

3. Рассмотрим теперь случай, когда оператор A в (1) является самосопряженным и неотрицательным. Положим

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma = \{A : A \in \mathcal{L}(X, X),\ \|A\| \le \gamma,\ A = A^* \ge 0\},$$

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r = \hat{\mathcal{H}}_\gamma \cap \mathcal{H}_\gamma^r.$$

Поскольку при решении задачи (1), где $A = A^* \ge 0$, аппроксимирующий оператор A_Ω принято строить (см., например, [10, с. 31]) также самосопряженным (необязательно неотрицательным), то ограничимся ниже множеством $\hat{\Pi}^d_{\delta,p,\rho}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma) \subset \Pi^d_{\delta,p,\rho}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma)$ проекционных схем с симметричными относительно биссектрисы областями Ω координатной плоскости. При этом эффективность дискретизации уравнений (1), (2) в рамках РПМ будем исследовать с помощью величины

$$\widehat{\mathrm{Card}}_{\delta,p,\rho}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma) = \min\{\mathrm{card}(\Omega) \colon (\Omega, B) \in \hat{\Pi}^d_{\delta,p,\rho}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma)\}.$$

Класс регуляризаторов, задаваемых функцией от оператора решаемого уравнения, определим следующим образом. Пусть $\hat{\mathcal{G}} = \{g_\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, — некоторое параметрическое семейство функций, измеримых по Борелю на отрезке $[-\gamma_0\alpha, c_*\gamma]$, $\gamma_0 > 0$, $c_* \ge 1$ (γ_0, вообще говоря, зависит от конкретной функции g_α) и при $0 \le p \le \hat{p}_*$ удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sup_{-\gamma_0\alpha \le \lambda \le c_*\gamma} |\lambda|^p |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \hat{\chi}_\alpha \alpha^p,$$
$$\sup_{-\gamma_0\alpha \le \lambda \le c_*\gamma} |g_\alpha(\lambda)| \le \hat{\chi}_* \alpha^{-1}, \tag{10}$$

где $\hat{p}_*$, $\hat{\chi}_p$ и $\hat{\chi}_*$ — как и прежде, некоторые не зависящие от α положительные константы. Совокупность регуляризаторов вида $R_\alpha = g_\alpha(A)$, $g_\alpha \in \hat{\mathcal{G}}$, обозначим через $\hat{\mathcal{R}}'$.

Пример. Пусть $q = 0, 1, 2, \ldots$. Согласно обобщенному методу Лаврентьева [3] уравнениям (1), (2) ставится в соответствие регуляризованное уравнение $(\alpha^{q+1} I + A^{q+1})x = A^q f_\delta$. Этот метод регуляризации из $\hat{\mathcal{R}}'$ с функцией $g_\alpha(\lambda) = \dfrac{\lambda^q}{\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1}}$, для которой выполнены условия (10) при $\hat{p}_* = q + 1$, $c_* = 1$ и любых $0 < \gamma_0 < 1$, $\gamma > 0$. В случае $q = 0$ получаем обычный метод Лаврентьева. В качестве других примеров регуляризаторов из $\hat{\mathcal{R}}'$ можно назвать известные итерационные процедуры Ландвебера, Факеева – Ларди и др. (подробнее см. [3, 10]).

Аналогично теореме 1 [7] устанавливается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha = \mu_1 \delta^{1/(p+1)}$, $\|A - A_\Omega\| \le \gamma_0\alpha$ *и* B *— произвольный базис из* $\mathcal{B}_r$. *Тогда на классе уравнений* (1) *с операторами* $A \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma$ *и* $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$ *для любой проекционной схемы* (Ω, B) *и произвольного регуляриза-*

тора R_α *из* $\hat{\mathcal{R}}'$, $\hat{p}_* \geq p$, *справедлива оценка*

$$\|x_0 - x_{\text{disc}}\|_X \leq (\hat{\chi}_* \mu_1^{-1} + \rho\hat{\chi}_p \mu_1^p)\delta^{p/(p+1)} + \rho\hat{\chi}_0 \left\|A^p - |A_\Omega|^p\right\| + \\ + \hat{\chi}_* \mu_1^{-1} \delta^{-1/(p+1)} \|(A - A_\Omega) x_0\|_X. \tag{11}$$

В качестве Ω возьмем ступенчатый гиперболический крест вида

$$\hat{\Gamma}_n = \{1\} \times [1, 2^{2n}] \bigcup_{k=1}^{2n} (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{2n-k}]. \tag{12}$$

Тогда каждому оператору $A \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$ будет соответствовать конечномерный оператор $A_\Omega = A_n := \sum_{k=0}^{2n} \Delta_k A P_{2^{2n-k}}$, где, как и ранее, $P_n = P_{B,n}$— ортопроектор на первые n элементов базиса $B \in \mathcal{B}_r$. Приближенное решение x_{disc} будет задаваться соотношением $x_{\text{disc}} = g_\alpha(A_n) P_{2^{2n}} f_\delta$, где g_α— произвольная функция из $\hat{\mathcal{G}}$, $\hat{p}_* \geq p$.

Приведем теперь ряд вспомогательных результатов, которые потребуются в дальнейшем. Пусть $A, H \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$. Для любого $p > 0$ справедлива оценка [4]

$$\|A^p - H^p\| \leq a_p \|A - H\|^{\min\{p,1\}}, \tag{13}$$

где $a_p = \dfrac{4}{\pi}$ при $p \leq 1$ и функция $p \to a_p$ ограничена на $(0, \hat{p}_*]$ для всех $\hat{p}_* > 0$.

Лемма 1. *Пусть* $A \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$ *и* $p > 1$. *Тогда при* $n \geq 3$

$$\|(A - A_n)A^p\| \leq \nu_p 2^{-2rn}\sqrt{n}, \tag{14}$$

$$\|A^2 - A_n^2\| \leq \nu_* 2^{-2rn} n, \tag{15}$$

$$\|(A - A_n)\| \leq 2\gamma\beta_r 2^{-rn}, \tag{16}$$

где $\nu_* = (1 + 2\sqrt{2})2^r\gamma^2\beta_r^2$, $\nu_p = (2 + 2^r)\gamma^{p+1}\beta_r^2$.

Доказательство. Прежде всего запишем разложение

$$A - A_n = (I - P_{2^{2n}})A + \sum_{k=0}^{2n} \Delta_k A(I - P_{2^{2n-k}}).$$

С учетом определений $\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$ и X^r для любого $p > 1$ имеем

$$\|(I - P_{2^{2n}})A^{p+1}\| \leq \gamma^{p+1}\beta_r^2 2^{-2rn},$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \Delta_k A(I - P_{2^{2n-k}})A^p\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|(I - P_{2^{2n-k}})A\|^2 \|A\|^{p-1} \leq$$

$$\leq \frac{2^r}{2^r - 1}\gamma^{p+1}\beta_r^2 2^{-2rn},$$

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{2n} \Delta_k A(I - P_{2^{2n-k}})A^p\right\| \leq \sup_{\|g\|_X \leq 1} \left\|\sum_{k=n+1}^{2n} A^p(I - P_{2^{2n-k}})A\Delta_k g\right\|_X \leq$$

$$\leq \|A\|^{p-1} \sup_{\|g\|_X \leq 1} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \|\Delta_k g\|_X^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \|\Delta_k A\|^2 \|(I - P_{2^{2n-k}}) A\|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^r \gamma^{p+1} \beta_r^2 2^{-2m} \sqrt{n}.$$

Объединяя полученные оценки, получаем (14).

Для нахождения оценки (15) воспользуемся представлением $A_n^2 = \sum_{k=0}^{2n} P_{2^{2n-k}} A \Delta_k A P_{2^{2n-k}}$. Тогда имеем

$$A P_{2^{2n}} A - A_n^2 = \sum_{k=0}^{2n} G_k, \quad G_k = A \Delta_k A - P_{2^{2n-k}} A \Delta_k A P_{2^{2n-k}}.$$

Заметим далее, что для любого $g \in X_{1,0}$ $(\|g\|_X \leq 1)$ выполняется

$$\|G_k g\|_X \leq \|A \Delta_k A (I - P_{2^{2n-k}}) g\|_X +$$

$$+ \|(I - P_{2^{2n-k}}) A \Delta_k A P_{2^{2n-k}} g\|_X \leq$$

$$\leq \|\Delta_k A\| \|(I - P_{2^{2n-k}}) A\| (\|P_{2^{2n-k}} g\|_X + \|(I - P_{2^{2n-k}}) g\|_X),$$

откуда непосредственно следует

$$\|A P_{2^{2n}} A - A_n^2\| \leq \sup_{\|g\|_X \leq 1} \sum_{k=0}^{2n} \|G_k g\|_X \leq \sqrt{2} 2^r \gamma^2 \beta_r^2 2^{-2m} (2n+1).$$

Подставляя найденную оценку в соотношение

$$\|A^2 - A_n^2\| \leq \|A (I - P_{2^{2n}}) A\| + \|A P_{2^{2n}} A - A_n^2\|,$$

получаем (15). Неравенство (16) доказывается аналогично.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha = \mu_1 \delta^{1/(p+1)}$, $2^{-2m}\sqrt{n} = \mu_2 \delta$ *и* B *— произвольный базис из* $\mathcal{B}_r$. *Для того чтобы* $(\hat{\Gamma}_n, B) \in \hat{\Pi}^d_{\delta,p,\rho}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma)$, $p > 1$, *достаточно выполнения условий*

$$\hat{\chi}_* \mu_1^{-1} + \rho \hat{\chi}_p \mu_1^p + \rho \hat{\chi}_0 a_{p/2} (\nu_* \mu_2)^{\min\{p/2,1\}} + \rho \hat{\chi}_* \mu_1^{-1} \nu_p \mu_2 \leq$$

$$\leq d_1 \rho^{1/(p+1)}, \tag{17}$$

$$\rho \nu_p \mu_2 \leq d_2. \tag{18}$$

Оптимальная по порядку оценка точности $d_1 \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}$ *достигается при использовании произвольного РПМ* $(R_\alpha, \hat{\Gamma}_n, B)$, *где* $R_\alpha \in \hat{\mathfrak{R}}'$, $\hat{p}_* \geq p$. *При этом* $\operatorname{card}(\hat{\Gamma}_n) = 2^{2n}(n+1) \asymp \delta^{-1/r} \log^{1+1/(2r)}(\delta^{-1})$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что в силу (16) при n и α, удовлетворяющих условиям теоремы, выполняется $\|A - A_n\| \leq \gamma_0 \alpha$. Далее, в силу (13) и (15) имеем

$$\left\| A^p - |A_n|^p \right\| \leq a_{p/2} \|A^2 - A_n^2\|^{\min\{p/2,1\}} \leq a_{p/2} (\nu_* 2^{-2m} n)^{\min\{p/2,1\}}.$$

Подставляя в (11) найденную оценку, соотношение (14), а также выражения для параметров α и n, получаем условие (17). Для получения (18) достаточно в условие (9) подставить (14).

Замечание 2. В случае $0 < p \leq 1$ соответствующий результат (получен в

[3, 4]) достигается в рамках традиционной проекционной схемы ($A_n = P_{2^n} A P_{2^n}$) и содержится в теореме 2 настоящей работы.

4. В заключение покажем, что найденная в теореме 4 оценка минимального числа функционалов (4) является в смысле величины $\widehat{\mathrm{Card}}_{\delta,p,\rho}$ точной по порядку.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (17), (18). *Тогда для* $p = 2, 3, \ldots$ *справедливы оценки*

$$c_1 \delta^{-1/r} \log(\delta^{-1}) \le \widehat{\mathrm{Card}}_{\delta,p,\rho}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r) \le c_2 \delta^{-1/r} \log^{1+1/(2r)}(\delta^{-1}).$$

Оптимальный порядок объема дискретной информации доставляет схема (Ω, B), *где* $\Omega = \hat{\Gamma}_n$ (12), *а* B *— произвольный базис из* $\mathcal{B}_k$.

Доказательство. Верхняя оценка следует из теоремы 4. Для нахождения нижней оценки рассмотрим случай $p = 2$. При $p = 3, 4, \ldots$ рассуждения аналогичны. Для упрощения выкладок будем считать $\rho = 1$. Итак, зафиксируем произвольный элемент (Ω, B) из множества $\hat{\Pi}^d_{\delta,2,1}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r)$. Легко видеть, что в силу (9) справедливо $(1,1) \in \Omega$.

Для любого $x \in X$ и $L = 1, 2, \ldots$ положим

$$H_L x = b_1(b_1 + L^{-r} b_L, x) + L^{-r} b_L(b_1 + b_L, x).$$

Тогда при любом $\gamma_1 \le \gamma(2\sqrt{2}\,\bar{\beta}_r)^{-1}$ очевидно включение $\gamma_1 H_L \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$. Заметим, что замена конечномерного оператора $\gamma_1 H_L$ оператором $\gamma_1 H_L + H$, где H — произвольный элемент класса $\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$ такой, что $H b_L = H b_1 = 0$, в дальнейших рассуждениях ничего не изменит.

Прежде всего оценим величину $M = \min\{i : i \notin \omega\}$, где, как и прежде, $\omega = \{i : (i,j) \in \Omega\}$. Для этого рассмотрим уравнение $A_1 x = f_1$, решением которого является элемент $x_1 = A_1^2 b_1$, где $A_1 = \gamma_1 H_M$ и $f_1 = A_1^3 b_1$. Учитывая очевидное соотношение $A_{1,\Omega} x = \gamma_1 b_1(b_1, x)$, находим

$$A_1 b_1 = \gamma_1(b_1 + M^{-r} b_M), \quad x_1 = \gamma_1^2(1 + M^{-2r}) b_1 + \gamma_1^2(M^{-r} + M^{-2r}) b_M,$$

$$A_{1,\Omega} x_1 = \gamma_1^3(1 + M^{-2r}) b_1, \quad P_\Omega f_1 = \gamma_1^3(1 + 2M^{-2r} + M^{-3r}) b_1.$$

Отсюда следует $\|(P_\Omega A_1 - A_{1,\Omega}) x_1\|_X = \gamma_1^3(M^{-2r} + M^{-3r})$. Тогда в силу (9) получаем, что M удовлетворяет условию $M^{-2r} + M^{-3r} \le d_2 \delta / \gamma_1^3$.

Положим $\eta = \max\{2d_2, 1\}$. Рассмотрим еще одно уравнение $A_2 x = f_2$, решением которого является элемент $x = x_2 = A_{1,\Omega}^2 b_1/\eta = \gamma_1^2 b_1/\eta$, где $A_2 = A_{1,\Omega}$, $f_2 = \gamma_1^3 b_1/\eta$. Имеем

$$\left\| \frac{x_1}{\eta} - x_2 \right\|_X \ge \gamma_1^2 \frac{M^{-r}}{\eta}. \tag{19}$$

Поскольку справедливо

$$\left\| \frac{P_\Omega f_1}{\eta} - f_2 \right\|_X = \gamma_1^3 \frac{2M^{-2r} + M^{-3r}}{\eta} \le \delta, \tag{20}$$

то в случае $f_{2,\delta} = P_\Omega f_1/\eta$ наборы функционалов (4) для уравнений $A_1 x_1/\eta = f_1/\eta$ и $A_2 x_2 = f_{2,\delta}$ совпадают. Следовательно, для любого $R_\alpha \in \mathcal{R}$ имеет место соотношение

$$x_{\text{disc}}\left(R_\alpha, \Omega, B, A_1, \frac{f_1}{\eta}\right) = x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_2, f_{2,\delta}) := R_\alpha(A_{1,\Omega}) P_\Omega \frac{f_1}{\eta}.$$

Тогда, учитывая (19), (20), в силу произвольности R_α и включения $(\Omega, B) \in \in \hat{\Pi}^d_{\delta,2,1}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma)$, получаем

$$\gamma_1^2 \frac{M^{-r}}{\eta} \le \left\| \frac{x_1}{\eta} - x_2 \right\|_X \le$$

$$\le \left\| \frac{x_1}{\eta} - R_\alpha(A_{1,\Omega}) P_\Omega \frac{f_1}{\eta} \right\|_X + \left\| x_2 - R_\alpha(A_{1,\Omega}) P_\Omega \frac{f_1}{\eta} \right\|_X \le$$

$$\le \sup_{f_\delta : \|f_1 - f_\delta\| \le \delta} \|x_1 - R_\alpha(A_{1,\Omega}) P_\Omega f_\delta\|_X +$$

$$+ \sup_{f_\delta : \|f_2 - f_\delta\|_X \le \delta} \|x_2 - R_\alpha(A_{1,\Omega}) P_\Omega f_\delta\|_X \le$$

$$\le \sup_{x_1 \in M_{2,1}(A_1)} \sup_{f_\delta : \|A_1 x_1 - f_\delta\|_X \le \delta} \|x_1 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_1, f_\delta)\|_X +$$

$$+ \sup_{x_2 \in M_{2,1}(A_2)} \sup_{f_\delta : \|A_2 x_2 - f_\delta\|_X \le \delta} \|x_2 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_2, f_\delta)\|_X \le$$

$$\le 2 \sup_{A \in \hat{\mathcal{H}}^r_\gamma} \sup_{x_0 \in M_{2,1}(A)} \sup_{f_\delta : \|A x_0 - f_\delta\|_X \le \delta} \|x_0 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A, f_\delta)\|_X \le$$

$$\le 2\mathcal{E}_{\delta,2,1}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma, R_\alpha, \Omega, B) \le 2 d_1 \delta^{2/3}.$$

Отсюда при $\eta_1 = (\gamma_1^2/(2d_1\eta))^{1/r}$ следует оценка $M \ge M_1 + 1 := \eta_1 \delta^{-2/(3r)}$, где $[1, M_1] \subset \omega$.

Далее, на следующих примерах определим точки, принадлежность которых множеству Ω необходима для включения $(\Omega, B) \subset \hat{\Pi}^d_{\delta,2,1}(\hat{\mathcal{H}}^r_\gamma)$.

1. Докажем, что при любых L, $1 \le L \le M_1$, все точки $(L, 1)$, $(1, L)$ принадлежат Ω. Предположим противное, а именно, пусть найдется такое значение L, $1 < L \le M_1$, что $(L, 1)$, $(1, L) \notin \Omega$ (напомним, что мы рассматриваем область Ω, симметричную относительно диагонали координатной плоскости). Рассмотрим уравнение $A_3 x = f_3$, имеющее решение $x_3 = A_3^2 b_1$, где $A_3 = \gamma_1 H_L$ и $f_3 = (\gamma_1 H_L)^3 b_1$. Нетрудно видеть, что

$$x_3 = \gamma_1^2 (1 + L^{-2r}) b_1 + \gamma_1^2 (L^{-r} + L^{-2r}) b_L,$$

$$P_\Omega A_3 x_3 = f_3 = \gamma_1^3 (1 + 2L^{-2r} + L^{-3r}) b_1 + \gamma_1^3 (L^{-r} + L^{-2r} + 2L^{-3r}) b_L.$$

В то же время элемент $A_{3,\Omega} x_3$ может иметь два вида:

$$A_{3,\Omega} x_3 = \gamma_1^3 (1 + L^{-2r}) b_1, \quad \text{если} \quad (L, L) \notin \Omega,$$

и

$$A_{3,\Omega} x_3 = \gamma_1^3 (1 + L^{-2r}) b_1 + \gamma_1^3 (L^{-2r} + L^{-3r}) b_L, \quad \text{если} \quad (L, L) \in \Omega.$$

В обоих случаях справедливо $\|(P_\Omega A_3 - A_{3,\Omega}) x_3\|_X \ge \gamma_1^3 L^{-r} > \gamma_1^3 M_1^{-r} \asymp \delta^{2/3}$, что при достаточно малых δ противоречит (9).

2. Докажем теперь, что если $1 < L \le \eta_2 \delta^{-1/(2r)}$, где $\eta_2 = (\gamma_1^3 / d_2)^{1/(2r)}$, то

$$(L, L) \in \Omega. \tag{21}$$

Как и выше, доказательство проведем от противного. Воспользуемся для этого уравнением (20) из предыдущего примера. А именно, в случае $(L, L) \notin \Omega$ имеем $(P_\Omega A_3 - A_{3,\Omega}) x_3 = \gamma_1 L^{-r} b_L(b_L, x_3) = \gamma_1^3 (L^{-2r} + L^{-3r}) b_L$. Отсюда следует $\| (P_\Omega A_3 - A_{3,\Omega}) x_3 \|_X > \gamma_1^3 L^{-2r} \ge \gamma_1^3 \eta_2^{-2r} \delta = d_2 \delta$, что в силу (9) доказывает (21).

3. Рассмотрим оператор A_4 из $\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r$ следующего вида:

$$A_4 x = \gamma_2 b_1 (b_1 + L^{-r} b_L + J^{-r} b_J, x) +$$
$$+ \gamma_2 b_L (L^{-r} b_1 + L^{-r} b_L + J^{-r} b_J, x) + \gamma_2 J^{-r} b_J (b_1 + b_L + b_J, x),$$

где $\gamma_2 \le \gamma (3\sqrt{3}\,\overline{\beta}_r)^{-1}$, а L и J — произвольные целые числа такие, что $1 < L < J \le M_1$ и $LJ \le \eta_3 \delta^{-1/r}$, $\eta_3 = (\gamma_2^3 / d_2)^{1/r}$. Из предыдущих примеров следует, что $(1, L)$, $(L, 1)$ $(1, J)$, $(J, 1)$, $(L, L) \in \Omega$. Случай $(J, J) \notin \Omega$ возможен лишь при $J > \eta_2 \delta^{-1/(2r)}$. Докажем, что (L, J), $(J, L) \in \Omega$. Предположим противное и рассмотрим уравнение $A_4 x = f_4$, решение которого есть $x_4 = A_4^2 b_1$. Вычислим

$$x_4 = \gamma_2^2 (1 + L^{-2r} + J^{-2r}) b_1 + \gamma_2^2 (L^{-r} + L^{-2r} + J^{-2r}) b_L +$$
$$+ \gamma_2^2 (J^{-r} + L^{-r} J^{-r} + J^{-2r}) b_J.$$

Далее находим (соответственно при $(J, L) \in \Omega$ и в противном случае)

$$(b_J, (P_\Omega A_4 - A_{4,\Omega}) x_4) = \gamma_2^3 J^{-r} (L^{-r} + L^{-2r} + J^{-2r}),$$

$$(b_J, (P_\Omega A_4 - A_{4,\Omega}) x_4) = \gamma_2^3 J^{-r} (L^{-r} + J^{-r} + L^{-r} J^{-r} + L^{-2r} + 2J^{-2r}).$$

В обоих случаях справедливо $\| (P_\Omega A_4 - A_{4,\Omega}) x_4 \|_X > \gamma_2^3 (LJ)^{-r} \ge \gamma_2^3 \eta_3^{-r} \delta = d_2 \delta$, что противоречит включению $(\Omega, B) \in \hat{\Pi}_{\delta,2,1}^d (\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r)$.

Таким образом, на основании рассмотренных примеров можно сделать вывод:

для того чтобы $(\Omega, B) \in \hat{\Pi}_{\delta,2,1}^d (\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r)$, необходимо, чтобы все точки (L, J), $1 \le L$, $J \le M_1 = \eta_1 \delta^{-2/(3r)} - 1$, $LJ \le (\eta_3 / \delta)^{1/r}$, входили в множество Ω.

Осталось подсчитать общее число N таких точек:

$$N \asymp d_2 \delta^{-1/r} \int_1^{M_1} \frac{dx}{x} \asymp \delta^{-1/r} \log(\delta^{-1}).$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Аналогично теореме 5 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 6. *Для достаточно малых* δ *выполняется* $\widehat{\mathrm{Card}}_{\delta,1,\rho} (\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r) \asymp \delta^{-1/r}$. *Оптимальный по порядку объем информации* (4) *достигается в рамках галеркинской схемы дискретизации при* $\Omega = [1, 2^n] \times [1, 2^n]$, $2^n \asymp \delta^{-1/(2r)}$.

***Замечание* 3.** Сравнение теорем 2, 5, 6 позволяет сделать следующее заключение. Оказывается, что при дискретизации уравнения (2) замена самосопряженного оператора A на самосопряженный конечномерный оператор A_Ω оправдана лишь в случае $p \le 1$ (например, в рамках стандартного метода Лаврентьева). В то же время при более высоких значениях p „вполне естественная" симметризация дискретной схемы приводит к увеличению объема используемой информации (4).

***Замечание* 4.** Нетрудно видеть, что все приведенные выше результаты справедливы и в случае, когда вместо точного оператора A задано некоторое его приближение $A_h \in \mathcal{L}(X, X^r)$ такое, что $\|A - A_h\| \le h$, где $h \le c\delta$.

1. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
2. *Переверзев С. В.* Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – 252 с.
3. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of the Ritz–Galerkin method for solving III-posed problems // Учен. зап. Тарт. ун-та. – 1989. – Вып. 863. – С. 3–17.
4. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving III-posed problems // Numer. Math. – 1990. – 57. – P. 63–70.
5. *Pereverzev S. V.* Optimization of projection methods for solving III-posed problems // Computing. – 1995. – 55. – P. 113–124.
6. *Солодкий С. Г.* О дискретизации некорректных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1996. – **36**, № 8. – С. 15–22.
7. *Солодкий С. Г.* Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 699–711.
8. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
10. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 182 с.
11. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 1. – С. 15–24.
12. *Dahmen W., Kunoth A., Schneider R.* Operator equations, multiscale concepts and complexity // Lect. Appl. Math. – 1996. – **32**. – P. 225–261.
13. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247–250.
14. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1967. – 7, № 3. – С. 672–677.

Получено 22.12.97,
после доработки — 05.10.98