УДК 517.5

А. М. Коган (Днепропетр. ун-т)

К ВОПРОСУ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КЛАССОВ W^rH^ω АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

We obtain an asymptotic equality for the best approximation of classes W^rH^ω by algebraic polynomials in the space L_1 for convex upwards modules of continuity which are regularly varying.

Отримано асимптотичну рівність для найкращого наближення класів W^rH^ω алгебраїчними поліномами у просторі L_1 для опуклих вгору модулів неперервності, що правильно змінюються.

1. Введение. В этой работе рассматривается асимптотическое поведение наилучшего приближения классов W^rH^ω алгебраическими полиномами в пространстве $L_1(E_n(W^rH^\omega)_1)$. При этом $W^rH^\omega = \{f: [-1;1] \to R \mid \omega(f^{(r)}, t) \le \le \omega(t)\}$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, $r < n$. В случае $r = 0$ будем писать H^ω вместо W^0H^ω. Обозначим через $\tilde{W}^rH^\omega$ соответствующий класс 2π-периодических функций. Пусть $f_{n,0,\omega}$ — $2\pi/n$-периодическая нечетная функция, определенная на отрезке $[0;\pi/n]$ следующим образом:

$$f_{n,0,\omega}(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega(2t), & 0 \le t \le \pi/2n, \\ \dfrac{1}{2}\omega(2(\pi/n - t)), & \pi/2n \le t \le \pi/n. \end{cases}$$

Пусть далее $f_{n,r,\omega}$ — r-й периодический интеграл функции $f_{n,0,\omega}$ со средним нулевым значением на периоде. Если $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0;1]$, то соответствующую функцию $f_{n,r,\omega}$ будем обозначать $f_{n,r,\alpha}$, а класс — W^rH^α.

Н. П. Корнейчук [1, с. 208] доказал, что

$$E_n(\tilde{W}^rH^\omega)_1 = \| f_{n,r,\omega} \|_1 = \int_0^{2\pi} |f_{n,r,\omega}(t)| dt.$$

В непериодическом случае В. П. Моторный и О. В. Моторная [2] получили следующее асимптотическое равенство:

$$E_n(W^rH^\alpha)_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+\alpha} dx \, \| f_{n,r,\alpha} \|_1 + o\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Функция ω называется правильно изменяющейся в нуле, если

$$\exists\, p \ge 0: \quad \lim_{t\to 0} \omega(\lambda t)/\omega(t) = \lambda^p \quad \forall\, \lambda \in (0;1]. \tag{1}$$

Пусть $\varphi(u) := \dfrac{u\omega'(u)}{\omega(u)}$. Как следует из [3, с. 15], условие (1) эквивалентно следующему:

$$\exists \lim_{u\to 0} \varphi(u) = C. \tag{2}$$

© А. М. КОГАН, 1999

Покажем, что для выпуклых вверх дифференцируемых модулей непрерывности ω, удовлетворяющих условию (2), верно равенство

$$E_n(W^r H^\omega)_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r \frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)dx \, \| f_{n,r,\omega}\|_1 + o\left(\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3)$$

2. Некоторые свойства модулей непрерывности и функций φ.

Утверждение 1. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх дифференцируемый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (2). *Тогда*

$$\forall\, k=0,1,\ldots \quad \exists\, \gamma_k(u) \ \left(\gamma_k(u)\xrightarrow[u\to 0]{} 0;\ \gamma_k(u)\ge 0\right):\ \forall\, \alpha\in[0;1]$$

$$\left|\int_0^u (u-t)^k\left(\omega(\alpha t)\omega(u)-\omega(t)\omega(\alpha u)\right)dt\right| \le \omega^2(u)u^{k+1}\gamma_k(u). \quad (4)$$

Доказательство.

$$\frac{\left|\int_0^u (u-t)^k\left(\omega(\alpha t)\omega(u)-\omega(t)\omega(\alpha u)\right)dt\right|}{\omega^2(u)u^{k+1}} =$$

$$= \frac{\omega(\alpha u)}{\omega(u)}\left|\frac{\int_0^u (u-t)^k\omega(\alpha t)\,dt}{u^{k+1}\omega(\alpha u)} - \frac{1}{u^{k+1}\omega(u)}\int_0^u (u-t)^k\omega(t)\,dt\right| =$$

$$= \frac{\omega(\alpha u)}{\omega(u)}\left|\frac{1}{(\alpha u)^{k+1}\omega(\alpha u)}\int_0^{\alpha u}(\alpha u-\xi)^k\omega(\xi)\,d\xi - \frac{\int_0^u (u-\xi)^k\omega(\xi)\,d\xi}{u^{k+1}\omega(u)}\right| \le |F_k(\alpha u)-F_k(u)|,$$

где

$$F_k(u) = \frac{\int_0^u (u-\xi)^k\omega(\xi)\,d\xi}{u^{k+1}\omega(u)}.$$

Отсюда, чтобы имело место (4), достаточно, чтобы $F_k(u)$ имела предел при $u\to 0$, поскольку в этом случае в силу критерия Коши $|F_k(\alpha u)-F_k(u)|$ равномерно сходится к 0 при $u\to 0$. Докажем это по индукции. Пусть $k=0$. В силу правила Лопиталя

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u\,\omega(u)}\int_0^u \omega(t)\,dt = \lim_{u\to 0}\frac{1}{1+\varphi(u)}.$$

Этот предел существует в силу (2).

Пусть $\exists \lim\limits_{u\to 0} F_n(u)$. Тогда в силу правила Лопиталя имеем

$$\lim_{u\to 0} F_{n+1}(u) = \lim_{u\to 0}\frac{n+1}{u^n\omega(u)(n+1+\varphi(u))}\int_0^u (u-\xi)^n\omega(\xi)\,d\xi.$$

Этот предел существует в силу (2) и предположения индукции. Утверждение доказано.

Функция $\varphi(u)$ имеет следующие свойства.

1. Поскольку ω — выпуклый модуль непрерывности, то очевидно, что $0\le$ $\le\varphi(u)\le 1$.

2. Если $\varphi(u)$ имеет предел при $u \to 0$, то его величина характеризует скорость, с которой $\omega(t)$ стремится к 0 при $t \to 0$. Чем меньше его величина, тем медленнее $\omega(t)$ стремится к 0. Доказательство этого факта можно найти в [3].

3. Некоторые вспомогательные результаты. Рассмотрим $E_n(W^r H^\omega)_1$. Согласно теореме двойственности [4, с. 25]

$$E_n(W^r H^\omega)_1 = \sup_{f \in W^r H^\omega} \sup_{h \in W^0_{\infty,n}} \int_{-1}^{1} f(t) h(t)\, dt, \tag{5}$$

где

$$W^0_{\infty,n} = \left\{ h \in L_\infty[-1;1] \,\middle|\, |h(t)| \le 1 \text{ п.в.};\ \forall p \in P_n \int_{-1}^{1} h(t) p(t)\, dt = 0 \right\}.$$

Здесь P_n — множество алгебраических полиномов степени не выше n. Производя в (5) интегрирование по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} f(t) h(t)\, dt = f(1) \int_{-1}^{1} h(t)\, dt - \int_{-1}^{1} f'(t) \int_{-1}^{t} h(\xi)\, d\xi\, dt.$$

Поскольку h ортогональна константе, то первое слагаемое равно 0. Интегрируя еще $n-1$ раз и учитывая симметричность классов H^ω и $W^0_{\infty,n}$ и то, что k-й интеграл функции h ортогонален константе (для $k < n$), имеем

$$E_n(W^r H^\omega)_1 = \sup_{f \in H^\omega} \sup_{h \in W^r_{\infty,n}} \int_{-1}^{1} f(t) h(t)\, dt, \tag{6}$$

где

$$W^r_{\infty,n} = \left\{ h_r(t) \,\middle|\, h_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{t} (t-u)^{r-1} h(u)\, du, \quad h \in W^0_{\infty,n} \right\}.$$

Пусть

$$a \in (-1;1) \text{ и } \psi_{r,a}(t) := \left(1-a^2\right)^{r/2} \varphi_{n,r}\left(t\left(1-a^2\right)^{-1/2} + \frac{\pi}{2n} r\right),$$

где $\varphi_{n,r}$ — идеальный эйлеров сплайн. Как показано в [2, с. 313],

$$\|\psi_{r,a}\|_C = \psi_{r,a}\left(\frac{\pi}{2n}\sqrt{1-a^2}\right) = K_r\left(1-a^2\right)^{r/2} n^{-r}.$$

Положим $\nu(a) = \frac{\pi}{2n}\sqrt{1-a^2}$, $b_* = b + \frac{\pi}{2n}\sqrt{1-b_*^2}$ для $b \in [-1;0]$. Введем также следующие обозначения: $\zeta_r(t) := C_{r,a}\psi_{r,b_*}(t)$; $P(f,t)$ — убывающая перестановка функции $|f|$. Поскольку класс $W^r_{\infty,n}$ инвариантен относительно замены переменной $t = -z$, то все результаты, полученные для $t \in [-1;0]$, верны и для $t \in [0;1]$.

В силу (6) оценка сверху величины $E_n(W^r H^\omega)_1$ сводится к оценке сверху интеграла $\int_{-1}^{1} f(t) h(t)\, dt$, где $f \in H^\omega$, $h \in W^r_{\infty,n}$. В дальнейшем будем разбивать промежуток интегрирования на отрезки точками, в которых значения функции $h_1(t) = \int_{-1}^{t} h(u)\, du$ равны нулю. Поэтому рассмотрим $\int_a^b f(t) h(t)\, dt$.

Утверждение 2. *Пусть* $h \in W^r_{\infty,n}$, $(a;b) \subset \left(-1+\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{2n}\right)$, *и при этом* $b - a \le 2\nu(b_*)$, *если* $b \le -\frac{\pi}{2n}$, *и* $b - a \le \frac{\pi}{n}$, *если* $b \in \left(-\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{2n}\right)$. *Пусть далее* $h_1(t)$ *не меняет знак на* $(a;b)$ *и обращается в* 0 *на его концах. Тогда*

$$\left|\int_a^b f(t)h(t)\,dt\right| \le C_{r,a}\|f_{n,r,\omega}\|_1\left(\sqrt{1-b_*^2}\right)^r \frac{b-a}{2\pi}\frac{1}{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}\omega(2\nu(b_*)) + C_r^1(b-a)\times$$

$$\times\, n^{-r}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \gamma'(u)\xrightarrow[u\to 0]{} 0,$$

$$C_{r,a} := 1 + 2C_r^* n^{-1}\left(1-a^2\right)^{-1/2}, \tag{7}$$

C_r^*, C_r^1 *— константы, не зависящие ни от* n, *ни от промежутка* $(a;b)$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $b \le -\frac{\pi}{2n}$ (случай $b \in \left(-\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{2n}\right)$ рассматривается аналогично). Пусть $\beta := \sqrt{1-b_*^2}$. Из леммы 1 [2] следует

$$I = \left|\int_a^b f(t)h(t)\,dt\right| \le C_{r,a}\beta^r \int_0^{\frac{b-a}{2}} \varphi_{n,r}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\pi}{2n}r\right)\omega(2t)\,dt.$$

Выполним замену переменной $t = \frac{(b-a)n}{2\pi}u$. Поскольку $b-a \le 2\nu(b_*) = \frac{\pi}{n}\beta$, то

$$I \le C_{r,a}\beta^r\frac{(b-a)n}{2\pi}\int_0^{\pi/n}\varphi_{n,r}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)\omega(\beta u)\,du = C_{r,a}\beta^r\frac{(b-a)n}{2\pi\omega(\pi/n)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/n}\varphi_{n,r}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)\omega\left(\frac{\pi}{n}\beta\right)\omega(u)\,du + C_{r,a}\beta^r\frac{(b-a)n}{2\pi\omega(\pi/n)}\int_0^{\pi/n}\varphi_{n,r}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)\Omega(u)\,du,$$

где $\Omega(u) = \omega(\beta u)\,\omega(\pi/n) - \omega(u)\,\omega(\pi\beta/n)$. В первом слагаемом в интеграле сделаем замену $t = u/2$. Тогда

$$C_{r,a}\beta^r\frac{(b-a)}{2\pi}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\beta\right)4n\int_0^{\pi/2n}\varphi_{n,r}\left(t+\frac{\pi}{2n}r\right)\frac{\omega(2t)}{2}\,dt =$$

$$= C_{r,a}\|f_{n,r,\omega}\|_1\beta^r\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega(2\nu(b_*))\frac{b-a}{2\pi}.$$

Проводя во втором слагаемом $r-1$ раз интегрирование по частям, получаем

$$\left|\int_0^{\pi/n}\varphi_{n,r}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)\Omega(u)\,du\right| \le C_r\left|\int_0^{\pi/n}\Omega(t)\,dt\right|\|\varphi_{n,r}\|_C + \ldots$$

$$\ldots + C_1\left|\int_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)^{r-1}\Omega(t)\,dt\right|\|\varphi_{n,1}\|_C + C_0\left|\int_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)^r\Omega(t)\,dt\right|.$$

В силу (4) и того, что $\|\varphi_{n,l}\|_C = K_l/n^l$, все слагаемые в получившейся сумме не превышают $C_l\omega^2(\pi/n)\,n^{-r-1}\gamma_{r-l}(\pi/n)$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть* $h \in W^r_{\infty,n}$. *Предположим, что* $h_1(t)$ *не меняет знак на* $(a; b) \subset \left(-1+\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{2n}\right)$ *и обращается в* 0 *на его концах, причем* $b-a \geq \geq 2\nu(b_*)$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f(t)h(t)\,dt\right| \leq C_{r,a}\|f_{n,r,\omega}\|_1\left(\sqrt{1-b_*^2}\right)^r \frac{(b-a)}{2\pi}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega(2\nu(b_*)) +$$

$$+ C_r^2(b-a)\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где C_r^2 — *константа, не зависящая ни от* n, *ни от промежутка* $(a; b)$, $\gamma'(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$, $C_{r,a}$ *определяется из* (7).

Доказательство. Обозначим $I = \int_a^b f(t)h(t)\,dt$. Для случая $\omega(t) = t^{\alpha}$ в [2, с. 323] было получено неравенство

$$|I| \leq \lambda C_{r,a}\beta^r \int_0^{\pi\beta/2n} \varphi_{n,r}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\pi}{2n}r\right)\omega(2t)\,dt,$$

где $\beta = \sqrt{1-b_*^2}$, $\lambda = \dfrac{b-a}{2\nu(b_*)}$. Это неравенство справедливо и в нашем случае. Выполняя замену переменной $t = \beta u/2$ и рассуждая так же, как и в доказательстве утверждения 2, получаем

$$|I| \leq \lambda C_{r,a}\beta^r \nu(b_*)\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\beta\right)\|f_{n,r,\omega}\|_1 + C_r^{**}\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right)\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{n^r}\right).$$

Поскольку $2\lambda\nu(b_*) = b-a$, то окончательно имеем

$$|I| \leq C_{r,a}\|f_{n,r,\omega}\|_1\left(\sqrt{1-b_*^2}\right)^r \frac{b-a}{2\pi}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega(2\nu(b_*)) + C_r^2(b-a)\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

что и требовалось доказать.

Поскольку $h(t)$ ортогональна константе, то можно считать, что $|f(t)| \leq \leq \omega(1)$ $\forall\, t \in [-1; 1]$. Определим θ_n следующим образом:

$$\sqrt{1-\theta_n^2} = \left(n^{-1}\omega\left(n^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{r+3}}, \quad r > 0. \tag{8}$$

Если $r = 0$, то рассмотрим два случая:

1) $u^{-1}\omega(u) \xrightarrow[u\to 0]{} C^* < \infty$; в этом случае θ_n определим аналогично (8);

2) $u^{-1}\omega(u) \xrightarrow[u\to 0]{} \infty$; тогда θ_n определяется следующим образом:

$$\sqrt{1-\theta_n^2} = n^{-1/6}\omega\left(n^{-1}\right)^{1/3}. \tag{9}$$

Тогда во всех случаях

$$\left|\int_{-1}^{-\theta_n} f(t)h(t)\,dt + \int_{\theta_n}^{1} f(t)h(t)\,dt\right| = o\left(\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Пусть t_0 — ближайший к $-\theta_n$ слева, а t_* — к θ_n справа нули функции $h_1(t)$. Пусть далее $t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = t_*$ — нули функции $h_1(t)$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} f(t)h(t)\,dt \le \sum_{i=0}^{N} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)h(t)\,dt \right| + o\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{10}$$

Пусть $h_1(t) = \sum_{k\in E} \varphi_k(t)$, где $t \in [t_i; t_{i+1}]$, φ_k — простые функции, E — множество индексов функций φ_k. Обозначим $\Phi_{E_1}(h_1, t) = \sum_{k\in E_1} P(\varphi_k, t)$, где $E_1 \subset E$.

Утверждение 4. *Пусть* $h \in W^r_{\infty,n}$, h_1 *не меняет знак на промежутке* $(a; b)$ *и обращается в* 0 *в точках* a *и* b, *множество* E *вводится так же, как и выше,* $E_1 \subset E$. *Пусть* $\lambda \ge 2$ *таково, что* $\Phi_{E_1}(h_1, 0) \le (\lambda - 1)P(\zeta_{r+1}; 0)$. *Тогда*

$$\int_0^{b-a} \Phi_{E_1}(h_1, t)\,\omega'(t)\,dt \le \lambda C_{r,a} \frac{\|f_{n,r,\omega}\|_1}{2\pi}\left(\sqrt{1-b_*^2}\right)^r \frac{\omega(2\nu(b_*))}{\omega(\pi/n)}\,2\nu(b_*) +$$

$$+ C_r^3 \lambda \gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r}\,\nu(b_*),$$

где C_r^3 *не зависит ни от* n, *ни от промежутка* $(a; b)$, $\gamma'(n) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

Доказательство. Аналогично [2, с. 328]

$$\int_0^{b-a} \Phi_{E_1}(h_1, t)\,\omega'(t)\,dt < \lambda \int_0^{2\nu(b_*)} P(\zeta_{r+1}, t)\,\omega'(t)\,dt,$$

а далее рассуждаем так же, как и в доказательстве утверждения 3.

3. Оценка сверху величины $E_n(W^r H^\omega)_1$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (1). *Тогда*

$$E_n(W^r H^\omega)_1 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{r/2} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)}{\omega(\pi/n)}\,dx\,\|f_{n,r,\omega}\|_1 +$$

$$+ \alpha_r(n)\,n^{-r}\,\omega\left(n^{-1}\right) \quad \forall\, r = 0, 1, \ldots, \quad \alpha_r(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. В силу (10) оценка величины $E_n(W^r H^\omega)_1$ сводится к оценке интеграла $I = \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)h(t)\,dt\right|$. Предположим, что $[t_i; t_{i+1}] \subset [-\theta_n; \theta_n]$ и $t_{i+1} - t_i \le 30\nu(t_i^0)$, где $t_i^0 = \min\{|t_i|, |t_{i+1}|\}$. В силу утверждений 2 и 3 имеем

$$I \le C_{r,t_i^1} \|f_{n,r,\omega}\|_1 \left(\sqrt{1-\left(t_{i*}^0\right)^2}\right)^r \frac{t_{i+1}-t_i}{2\pi}\,\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(2\nu\left(t_{i*}^0\right)\right) +$$

$$+ C'(t_{i+1}-t_i)\,n^{-r}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $t_i^1 = \max\{|t_i|, |t_{i+1}|\}$, $C' = \max\{C_r^1, C_r^2\}$. В силу (7) $C^1_{r,t_i^1} = 1 + \alpha(n)$, где $\alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Согласно теореме Лагранжа, а также вследствие того, что $0 \le \varphi(u) \le 1$, в случае, когда $r > 0$, имеем

$$\left(\sqrt{1-\left(t_{i*}^{0}\right)^{2}}\right)^{r}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(2\nu\left(t_{i*}^{0}\right)\right)-\left(\sqrt{1-\left(t_{i}^{1}\right)^{2}}\right)^{r}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(2\nu\left(t_{i}^{1}\right)\right)\leq\beta(n),$$

где $\beta(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Покажем, что аналогичное неравенство имеет место при $r=0$. Рассмотрим два случая:

1) $u^{-1}\omega(u)\xrightarrow[u\to 0]{}C^{*}<\infty$; тогда в силу (8)

$$\left|\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\left(t_{i*}^{0}\right)^{2}}\right)}{\omega(\pi/n)}-\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\left(t_{i}^{1}\right)^{2}}\right)}{\omega(\pi/n)}\right|=\left|\frac{\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\xi^{2}}\right)}{\omega(\pi/n)}\frac{\pi}{n}\frac{\xi\left(t_{i*}^{0}-t_{i}^{1}\right)}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\right|\leq$$

$$\leq\left(C^{*}\right)^{2}\left(n^{-1}\omega\left(n^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{3}}C'n^{-1}=Cn^{-\frac{1}{3}}=\beta(n).$$

Здесь $|\xi|\in[t_{i*}^{0},\,t_{i}^{1}]$, C', C — константы;

2) $u^{-1}\omega(u)\xrightarrow[u\to 0]{}\infty$; тогда в силу (9)

$$\left|\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\left(t_{i*}^{0}\right)^{2}}\right)}{\omega(\pi/n)}-\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\left(t_{i}^{1}\right)^{2}}\right)}{\omega(\pi/n)}\right|=\left|\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\xi^{2}}\right)}{\omega(\pi/n)}\frac{\xi\left(t_{i*}^{0}-t_{i}^{1}\right)}{1-\xi^{2}}\right|\times$$

$$\times\frac{\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\xi^{2}}\,\omega'\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\xi^{2}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\xi^{2}}\right)}\leq n^{\frac{1}{3}}\omega\left(n^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}Cn^{-1}=C\left(\left(\frac{1}{n}\right)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}=\beta(n).$$

Здесь, как и выше, $|\xi|\in\left[t_{i*}^{0},\,t_{i}^{1}\right]$, C — константа.

Таким образом, неравенство доказано. Отсюда

$$I\leq\frac{1}{2\pi}\left\|f_{n,r,\omega}\right\|_{1}\left(\sqrt{1-\left(t_{i}^{1}\right)^{2}}\right)^{r}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(2\nu\left(t_{i}^{1}\right)\right)\Delta t_{i}+\frac{1}{n^{r}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\alpha^{*}(n)\,\Delta t_{i},$$

где $\alpha^{*}(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Если длина $[t_0;\,t_1]$ (или $[t_N;\,t_{N+1}]$) не превышает $30\nu(t_1)$, то интеграл по этому промежутку оценивается так же, как интеграл по отрезку $[-1;-\theta_n]$.

Пусть $t_{i+1}-t_i>30\,\nu(t_i^0)$ и $[t_i;\,t_{i+1}]\subset[-\theta_n;\,0]$. В этом случае положим $\tau_0=t_{i+1}$, $y_1=t_{i+1}-14\nu(\tau_0)$, $y_2=y_1-\nu(\tau_0)$. Рассмотрим три случая:

1) $h_1(t)$ имеет экстремум на $[y_2;\,y_1]$; в этом случае обозначим через τ_1 ближайший к y_1 экстремум;

2) $h_1(t)$ возрастает на $[y_2;\,y_1]$; в этом случае положим $\tau_1=y_1$;

3) $h_1(t)$ убывает на $[y_2;\,y_1]$; тогда определим $\tau_1=y_2$.

Если $\tau_1-t_i>30\nu(\tau_1)$, то продолжим разбиение отрезка. Получим $\tau_0=$ $=t_{i+1}>\tau_1>\ldots>\tau_m=t_i$. Представим функцию $h_1(t)$ в виде суммы простых функций: $h_1(t)=\sum_{k\in E}\varphi_k(t)$. Пусть $E_1=\{k\in E\mid \operatorname{supp}\varphi_k\cap(\tau_1;\,\tau_0)\neq\varnothing\}$. Определим далее $E_2=\{k\in E\mid k\notin E_1\wedge\operatorname{supp}\varphi_k\cap(\tau_2;\,\tau_1)\neq\varnothing\}$ и т. д. В [2, с. 31] получено следующее неравенство:

$$\Phi_{E_k}(h_1,0)<(\lambda_k-1)\left\|\zeta_{r+1}^{k}\right\|_{C},$$

где $\lambda_k = \dfrac{\tau_{k-1} - \tau_k}{2\nu(\tau_{k-1})}$; $\zeta_{r+1}^k(t) = C_{r+1,\tau_k}\,\psi_{r+1,\tau_{k+1,*}}(t)$. Из этого неравенства и леммы 7 из [2] получим

$$\int_0^x \Phi_{E_1}(h_1, t)\,dt \;\le\; \int_0^x \lambda_k P\left(\zeta_{r+1}^k, t\right)dt. \tag{11}$$

Из [1] (см. теорему 7.5.1) следует

$$I \le \int_0^{\Delta t_i} \Phi_E(h_1, t)\,\omega'(t)\,dt \;=\; \sum_{j=1}^m \int_0^{\Delta t_i} \Phi_{E_j}(h_1, t)\,\omega'(t)\,dt.$$

В силу (11), утверждения 4 и предложения 5.4.7 [5] получаем

$$I \le \sum_{j=1}^m \left(C_{r,\tau_k}\lambda_j \frac{1}{2\pi}\|f_{n,r,\omega}\|_1 \left(\sqrt{1-\tau_{j-1,*}^2}\right)^r \frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(2\nu\left(\tau_{j-1,*}\right)\right) 2\nu\left(\tau_{j-1,*}\right) + \right.$$

$$\left. + \; C_r^3\lambda_j \nu\left(\tau_{j-1,*}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right)\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)n^{-r} \right) \le$$

$$\le C_{r,t_i}\|f_{n,r,\omega}\|_1 \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m \left(\sqrt{1-\tau_{j-1,*}^2}\right)^r \frac{1}{\nu(\tau_{j-1})}\nu\left(\tau_{j-1,*}\right)\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(2\nu\left(\tau_{j-1,*}\right)\right)\left(\tau_{j-1} - \tau_j\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \left(\tau_{j-1} - \tau_j\right)\frac{1}{\nu(\tau_{j-1})}\nu\left(\tau_{j-1,*}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{n}\right)\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)n^{-r} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\|f_{n,r,\omega}\|_1 \sum_{j=1}^m \left(\sqrt{1-\tau_j^2}\right)^r \frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\tau_j^2}\right)\Delta\tau_j \;+\; \frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\alpha'(n)\,\Delta t_i,$$

$$\alpha'(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Случаи, когда $0 \in [t_i; t_{i+1}]$ и длина $[t_0; t_1]$ $([t_N; t_{N+1}])$ больше $30\nu(t_1)$ $(30\nu(t_{N+1}))$, рассматриваются аналогично [2, с. 332].

4. Оценка снизу величины $E_n(W^r H^\omega)_1$. Чтобы оценить величину $E_n(W^r H^\omega)_1$ снизу, рассмотрим $\sup\limits_{f\in H^\omega}\int_{-1}^1 f(t) S_{n,r}(t)\,dt$. Здесь $S_{n,r}(t) = \dfrac{1}{(r-1)!}\times$ $\times\int_{-1}^t (t-u)^{r-1} S_{n,0}(u)\,du$, где $S_{n,0}(t) = \operatorname{sgn}(\sin((n+2)\arccos t))$. Очевидно, что $S_{n,r} \in W_{\infty,n}^r$. Пусть x_k^r, $k = \overline{1, n-r+1}$, — нули $S_{n,r}(t)$ на $(-1; 1)$ (в случае $r = 0$ — точки, в которых $S_{n,0}(t)$ меняет знак). Определим $x_0^r = -1$, $x_{n-r+2}^r = 1$. Из [2, с. 333]

$$x_{k+1}^1 - x_k^1 \;=\; 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2(n+2)}\right)\sqrt{1-\left(x_{k+1}^0\right)^2}\,. \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (1). *Тогда*

$$E_n(W^r H^\omega)_1 \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{r/2}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)dx\,\|f_{n,r,\omega}\|_1 \; +$$

$$+ \;\alpha_r'(n)\,n^{-r}\,\omega\left(n^{-1}\right) \qquad \forall\, r = 0, 1, \ldots, \quad \alpha_r'(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $r = 0$. В силу монотонности наилучшего приближения по n можем рассматривать только нечетные n. Определим

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0{,}5\,\omega(2t), & t \in [0; 2], \\ -0{,}5\,\omega(-2t), & t \in [-2; 0]. \end{cases}$$

Пусть $f_0(t) = \varphi(t - x_k^0)\operatorname{sgn} S_{n,0}(x_k^1) + C_k$ на $[x_{k-1}^1; x_k^1]$, $k = 1, \ldots, (n+1)/2$. Здесь $C_{(n+1)/2} = 0$, а остальные C_k выбраны так, чтобы $f_0(t)$ была непрерывной на $[-1; 0]$. Для $t \in [0; 1]$ полагаем $f_0(t) = f_0(-t)$. Тогда $f_0(t) \in H^\omega$ и

$$E_n(W^r H^\omega)_1 \ge I_0 = \int_{-1}^{1} f_0(t) S_{n,0}(t)\,dt =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \int_{x_k^1}^{x_{k+1}^1} f_0(t) S_{n,0}(t)\,dt = 2\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \int_0^{\frac{x_{k+1}^1 - x_k^1}{2}} \omega(2t)\,dt.$$

Обозначим $\chi_{k+1} = \sqrt{1 - (x_{k+1}^0)^2}$. В силу (12) имеем

$$I_0 = 2\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \int_0^{\chi_{k+1}\operatorname{tg}\pi/(2(n+2))} \omega(2t)\,dt \ge \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \chi_{k+1}\, 2\int_0^{\pi/(2(n+2))} \omega(2\chi_{k+1}t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \chi_{k+1} \frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\!\left(\frac{\pi}{n}\chi_{k+1}\right) \int_0^{\pi/n} \omega(t)\,dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \chi_{k+1} \left(\int_0^{\pi/(n+2)} \omega(\chi_{k+1}t)\,dt - \int_0^{\pi/n} \omega(\chi_{k+1}t)\,dt \right) -$$

$$- \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \chi_{k+1} \left(\frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\!\left(\frac{\pi}{n}\chi_{k+1}\right) \int_0^{\pi/n} \omega(t)\,dt - \int_0^{\pi/n} \omega(\chi_{k+1}t)\,dt \right) = S_1 + S_2 + S_3.$$

Ясно, что $S_2 = o(\omega(1/n))$. В силу (4) $S_3 = o(\omega(1/n))$. Поскольку $\dfrac{\pi}{n+2} \times$ $\times \chi_{k+1} > x_{k+1}^0 - x_k^0$, то

$$I_0 \ge \frac{1}{\pi}\|f_{n,0,\omega}\|_1 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \left(x_{k+1}^0 - x_k^0\right) \frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\!\left(\frac{\pi}{n}\chi_{k+1}\right) + \alpha_0(n)\,\omega\!\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\|f_{n,0,\omega}\|_1 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\omega(\pi/n)}\,\omega\!\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right) dx + \alpha_0'(n)\,\omega\!\left(\frac{1}{n}\right), \quad \alpha_0(n),\ \alpha_0'(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, в случае $r = 0$ теорема доказана.

Пусть $r > 0$, $n - r + 1$ — четно, k_0 таково, что $-\theta_n \in [x_{k_0-1}^{r+1}; x_{k_0}^{r+1})$. Построим четную функцию $f_r(t)$, определенную на $[-1; 0]$ следующим образом:

$$f_r(t) = \begin{cases} \varphi\left(t - x_k^r\right)\operatorname{sgn} S_{n,r}\left(x_k^{r+1}\right) + C_k, & t \in \left[x_k^r - \sigma_k; x_k^r + \sigma_k\right] \subset \left(x_{k-1}^{r+1}; x_k^{r+1}\right), \\ f_r\left(x_k^r - \sigma_k\right), & t \in \left[x_{k-1}^{r+1}; x_k^r - \sigma_k\right], \\ f_r\left(x_k^r + \sigma_k\right), & t \in \left[x_k^r + \sigma_k; x_k^{r+1}\right], \\ C_{k_0}, & t \in \left[-1; x_{k_0}^{r+1}\right], \end{cases}$$

где $k = k_0 + 1, \dots, \dfrac{n-r+1}{2}$; $C_{\frac{n-r+1}{2}} = 0$, а остальные C_k выбраны так, чтобы $f_r(t)$ была непрерывной; σ_k определим ниже.

Пусть

$$\delta_k = \frac{1}{\left|S_{n,\,r+1}\left(x_k^r\right)\right|}\left\|\zeta_{r+1}^k\right\|_1,\ k = k_0+1, \dots, \frac{n-r+1}{2}, \quad \zeta_{r+1}^k(t) = C_{r+1,\, x_{k-1}^{r+1}}\,\psi_{r+1,\, x_{k,*}^{r+1}}(t).$$

В [2] доказано следующее неравенство:

$$\delta_k < \frac{1}{1-\dfrac{d_r}{n}\left(\sqrt{1-\theta_n^2}\right)^{-1}}\left(1+\frac{2C_r^*}{n}\left(\sqrt{1-\theta_n^2}\right)^{-1}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \delta < 1+\gamma_r n^{-\frac{r+1}{r+3}},$$

где d_r и γ_r — константы, зависящие только от r, и

$$\left|S_{n,\,r+1}(t)\right| \geq \psi_k(t) = \delta^{-1}\zeta_{r+1}^k\left(\delta\left(t - x_k^r + \sigma_k\right)\right) \quad \forall\, t \in \left(x_k^r - \sigma_k;\ x_k^r + \sigma_k\right),$$

где $\sigma_k := \nu\left(x_{k,*}^{r+1}\right)\delta^{-1}$.

Пусть $\Phi_{n,r}$ — нечетная, абсолютно непрерывная функция, равная

$$-\,\psi_k(t)\operatorname{sgn} S_{n,\,r}\left(x_k^{r+1}\right) \quad \text{на} \quad \left(x_k^r - \sigma_k;\ x_k^r + \sigma_k\right),\ k = k_0+1, \dots, \frac{n-r+1}{2},$$

и нулю во всех остальных точках $[-1; 0]$. Тогда

$$I = \int_{-1}^{1} f_r(t)S_{n,r}(t)\,dt = 2\int_{x_{k_0+1}^{r+1}}^{0} f_r(t)S_{n,r}(t)\,dt + \alpha(n)\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=k_0+2}^{(n-r+1)/2}\int_{x_{k-1}^{r+1}}^{x_k^{r+1}} f_r(t)\Phi_{n,r}'(t)\,dt + 2\sum_{k=k_0+2}^{(n-r+1)/2}\int_{x_{k-1}^{r+1}}^{x_k^{r+1}} f_r(t)\left(S_{n,r}(t) - \Phi_{n,r}'(t)\right)dt +$$

$$+\ \alpha(n)n^{-r}\omega\left(n^{-1}\right).$$

Здесь $\alpha_n(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Рассмотрим интегралы в первой сумме:

$$I_k = \int_{x_{k-1}^{r+1}}^{x_k^{r+1}} f_r(t)\Phi_{n,r}'(t)\,dt = C_{r,x_{k-1}^{r+1}}\left(\chi_k^{r+1}\right)^r\frac{1}{\delta_k}\int_0^{(\pi/(2n))\chi_k^{r+1}}\omega\left(\frac{2t}{\delta}\right)\varphi_{n,r}\left(\frac{t}{\chi_k^{r+1}}+\frac{\pi}{2n}r\right)dt =$$

$$= C_{r,x_{k-1}^{r+1}}\left(\chi_k^{r+1}\right)^{r+1}\frac{1}{2\delta_k}\int_0^{\pi/n}\omega\left(\frac{t}{\delta}\chi_k^{r+1}\right)\varphi_{n,r}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)dt, \quad \chi_k^{r+1} = \sqrt{1-\left(x_{k,*}^{r+1}\right)^2}.$$

Пусть $\chi_k = \sqrt{1-(x_k^0)^2}$. Поскольку $\dfrac{\pi}{n}\sqrt{1-(x_{k,*}^{r+1})^2} \geq \dfrac{\pi}{n}\chi_k \geq x_k^0 - x_{k-1}^0 = \Delta x_k^0$, то

$$I_k \geq C_{r,x_{k-1}^{r+1}}\chi_k^r\frac{n}{\pi}\Delta x_k^0\frac{1}{\delta_k}\int_0^{\pi/n}\omega\left(\frac{t}{\delta}\chi_k\right)\varphi_{n,r}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)dt.$$

Рассуждая так же, как и в доказательстве утверждения 2, получаем

$$I_k \geq C_{r,x_{k-1}^{r+1}}\chi_k^r\frac{n}{\pi}\Delta x_k^0\frac{1}{\delta_k}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\frac{1}{\delta}\chi_k\right)\int_0^{\pi/n}\omega(t)\,\varphi_{n,r}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2n}r\right)dt +$$

$$+\ \gamma^*(n)\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\Delta x_k^0 = \frac{1}{2\pi}\left\|f_{n,r,\omega}\right\|_1\frac{1}{\delta_k}\chi_k^r\,\Delta x_k^0\frac{1}{\delta_k}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\frac{1}{\delta}\chi_k\right) +$$

$$+\ \gamma^{**}(n)n^{-r}\omega\left(n^{-1}\right)\Delta x_k^0, \quad \gamma^*(n), \gamma^{**}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{\omega(\pi/n)}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\frac{1}{\delta}\chi_k\right)-\omega\left(\frac{\pi}{n}\chi_k\right)\right)\right| = O\left(n^{-\frac{r+1}{r+3}}\right),$$

то

$$I_k \geq \frac{1}{2\pi}\|f_{n,r,\omega}\|_1\frac{1}{\delta_k}\chi_k^r\ \Delta x_k^0\frac{1}{\delta_k}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\chi_k\right)+\tilde{\gamma}(n)\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\Delta x_k^0,$$

$$\tilde{\gamma}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда

$$I \geq \frac{\|f_{n,r,\omega}\|_1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{r/2}\frac{1}{\omega(\pi/n)}\omega\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x^2}\right)dx + 2\sum_{k=k_0+2}^{(n-r+1)/2}\int_{x_{k-1}^{r+1}}^{x_k^{r+1}} f_r(t)\times$$

$$\times\left(S_{n,r}(t)-\Phi'_{n,r}(t)\right)dt+\alpha(n)n^{-r}\omega\left(n^{-1}\right).$$

Таким образом, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что

$$\int_{x_{k-1}^{r+1}}^{x_k^{r+1}} f_r(t)\left(S_{n,r}(t)-\Phi'_{n,r}(t)\right)dt \geq 0,$$

а для этого можно воспользоваться рассуждениями из [2, с. 338].

В силу теорем 1 и 2 имеет место (3). Отметим, что при этом условие (1) (или (2)) является существенным. Рассмотрим $\omega(t) = t^{1/40}e^{-\cos\ln t/80}$. Тогда $\varphi(u) = (2+\sin(\ln u))/80$. При этом $\varphi(u)$ не имеет предела при $u\to 0$. Для этого ω не выполняется (3) в случае $r=0$. Доказательство этого факта слишком громоздко, поэтому наметим лишь его схему. Рассуждая так же, как. и в доказательстве теоремы 2, получаем

$$E_n(H^\omega)_1 \geq \sum_{k=0}^{(n-1)/2}\sqrt{1-\left(x_{k+1}^0\right)^2}\int_0^{\pi/n}\omega\left(\sqrt{1-\left(x_{k+1}^0\right)^2}\,t\right)dt+\alpha(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right) \geq$$

$$\geq \frac{n}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi/n}\omega\left(\sqrt{1-x^2}\,t\right)dt\,dx+\alpha(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad \alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Затем выбирается подпоследовательность n_k такая, что $\frac{n_k}{2\pi}\times$ $\times\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi/n_k}\omega\left(\sqrt{1-x^2}\,t\right)dt\,dx$ превышает на величину порядка $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ соответствующее выражение в правой части (3).

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи в теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Motornyi V. P., Motornaya O. V.* On the best approximation of the classes W^rH^α by algebraic polynomials in L_1 // E. J. Approxim. – 1995. – 1, № 3. – P. 309 – 339.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 141 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
5. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.

Получено 17.09.97,
после доработки — 22.06.98