УДК 517.5

С. И. Новиков (Ин-т математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ КУСОЧНО-ЭРМИТОВЫМИ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНАМИ *

Exact values of upper bounds of deviations of piecewise Hermitian $\mathcal{L}$-splines are found for certain classes of functions determined by systems of linear differential operators with continuous coefficients.

Знайдено точні значення верхніх меж відхилень кусково-ермітових $\mathcal{L}$-сплайнів на деяких класах функцій, які задаються системами лінійних диференціальних операторів з неперервними коефіцієнтами.

1. Пусть $[a, b] \subset \mathbf{R}$ — конечный промежуток, Δ_m: $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t_{m+1} = b$ — заданное разбиение промежутка $[a, b]$. Через $D = d/dt$ обозначается оператор дифференцирования. Пусть $\mathcal{V}_n(\Delta_m)$ — семейство линейных дифференциальных операторов порядка n:

$$\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{\mathcal{L}_{n,i}(D) : i = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$\mathcal{L}_{n,i}(D) = D^n + p_{n-1,i}(t)D^{n-1} + \ldots + p_{1,i}(t)D + p_{0,i},$$

где $p_{k,i}(t) \in C^{(n)}[t_i, t_{i+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Каждому оператору $\mathcal{L}_{n,i}(D)$ соответствует формально сопряженный ему оператор:

$$\mathcal{L}^*_{n,i}(D)x(l) = D^n x(l) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+j} D^j (p_{j,i}(l)\, x(l)).$$

Пусть $f \in C^{(n-1)}[a, b]$ — произвольная заданная функция.

Определение 1. *Функция $S_{n,m}(f)$ называется кусочно-эрмитовым $\mathcal{L}$-сплайном, соответствующим семейству линейных дифференциальных операторов $\mathcal{V}_n(\Delta_m)$, интерполирующим функцию f, если выполняются следующие условия:*

1) $S_{n,m}(f) \in C^{(n-1)}[a, b]$;

2) $\mathcal{L}^*_{n,i}(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)S_{n,m}(f)(t) = 0 \quad \forall\, t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, m$;

3) $S^{(j)}_{n,m}(t_k) = f^{(j)}(t_k), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, \ldots, m+1$.

Кусочно-эрмитовы $\mathcal{L}$-сплайны являются локальными, т. е. на каждом интервале (t_i, t_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, m$, они строятся независимо от других интервалов.

Если $\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{D^n\}$, то имеем полиномиальные эрмитовы сплайны, а при $\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + p_1(t)D + p_0(t)\}$ — эрмитовы $\mathcal{L}$-сплайны, приближения которыми изучались ранее различными авторами (см., например, [1 – 4]).

Обобщенные сплайны, определяемые на различных участках заданной области различными дифференциальными операторами, ранее рассматривали H. Späth [5], P. Prenter [6], S. Pruess [7], Хоанг Ван Лай [8], Ю. Н. Субботин [9], B. McCartin [10], А. И. Гребенников [11] и некоторые другие авторы. Необхо-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-01-00118.

димость изучения таких сплайнов в значительной мере объясняется потребностями численного анализа (см., например, [7, 8, 10] и имеющуюся там библиографию).

Введем класс функций, задаваемых семейством линейных дифференциальных операторов $\mathcal{V}_n(\Delta_m)$: для $1 \le q < \infty$ полагаем

$$K_q(\mathcal{V}_n(\Delta_m)) = \left\{ f\colon f^{(n-1)} \text{— абс. непр. на } [a, b],\ \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \mathcal{L}_{n,i}(D) f(t) \right|^q dt \right)^{1/q} \le 1 \right\}.$$

Пусть $\|f\|_p$ — L_p-норма функции f на $[a, b]$.

Настоящая работа посвящена нахождению величин уклонений класса $K_q(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ от множества кусочно-эрмитовых $\mathcal{L}$-сплайнов:

$$U_{q,p}(\mathcal{V}_n(\Delta_m)) = \sup_{f \in K_q(\mathcal{V}_n(\Delta_m))} \left\| f - S_{n,m}(f) \right\|_p \tag{1}$$

при $q = 2$, $1 < p < \infty$.

Заметим, что приближаемый класс $K_q(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ определяется операторами $\{\mathcal{L}_{n,i}(D)\}_{i=1}^m$ порядка n, а $\mathcal{L}$-сплайны — операторами $\{\mathcal{L}_{n,i}^*(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)\}_{i=1}^m$ порядка $2n$.

Для $\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{D^n\}$ величины $U_{2,1}(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ и $U_{2,\infty}(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ найдены О. В. Давыдовым [3]. Известен также ряд результатов, относящихся к приближению кусочно-эрмитовыми $\mathcal{L}$-сплайнами классов функций, аналогичных $K_q(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$, но определяемых дифференциальными операторами порядка $2n$. Для $\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{D^n\}$ отметим работы P. Ciarlet, M. Schultz, R. Varga [12], В. Л. Великина [2], а также монографию Н. П. Корнейчука ([13], гл. 7); для $\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + p_1(t)D + p_0(t)\}$ — работу А. А. Шумейко [4]; для общего случая приближения кусочно-эрмитовыми $\mathcal{L}$-сплайнами — работы автора [14, 15]. О приближении некоторых других классов функций см. [13] (гл. 7) и комментарии к ней, а также [6].

2. Известно, что кусочно-эрмитовый $\mathcal{L}$-сплайн $S_{n,m}(f)$ для произвольного семейства линейных дифференциальных операторов $\mathcal{V}_n(\Delta_m)$ при произвольной функции $f \in C^{(n-1)}[a, b]$ может не существовать. Это обстоятельство требует ограничить класс дифференциальных операторов, составляющих семейство $\mathcal{V}_n(\Delta_m)$. В дальнейшем будут рассматриваться только семейства, состоящие из так называемых неосциллирующих операторов.

Определение 2. *Линейный дифференциальный оператор*

$$\mathcal{L}_N(D) = D^N + p_{N-1}(t)D^{N-1} + \ldots + p_1(t)D + p_0(t),$$

$p_k \in C[A, B]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, *называется неосциллирующим на промежутке* $[A, B]$, *если любое нетривиальное решение уравнения* $\mathcal{L}_N(D)x(t) = 0$ *имеет на* $[A, B]$ *не более* $N-1$ *нулей с учетом кратностей.*

О свойствах неосциллирующих дифференциальных операторов см., например, [16, 17] и библиографию в них.

В [15] (лемма 1) отмечено, что факт неосцилляции каждого из дифференциальных операторов $\mathcal{L}_{n,i}(D) \in \mathcal{V}_n(\Delta_m)$ на соответствующем промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, обеспечивает существование и единственность кусочно-эрмитова $\mathcal{L}$-сплайна для любой функции $f \in C^{(n-1)}[a, b]$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Предположим, что каждый дифференциальный оператор* $\mathcal{L}_{n,i}(D) \in \mathcal{V}_n(\Delta_m)$ *является неосциллирующим на соответствующем промежутке* $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда*

$$U_{2,p}(\mathcal{V}_n(\Delta_m)) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \Lambda_i^{2/(2-p)}\right)^{1/p-1/2}, & 1 < p < 2, \\ \left(\max\{\Lambda_i : i = 1, 2, \ldots, m\}\right)^{1/p}, & 2 < p < \infty, \end{cases}$$

где Λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *— максимальные собственные значения краевых задач*

$$|x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) = \Lambda_i \mathcal{L}_{n,i}^*(D) \mathcal{L}_{n,i}(D) x(t),$$
$$x^{(j)}(t_i) = x^{(j)}(t_{i+1}) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *соответственно.*

Доказательство этой теоремы основано на идее работы [15]. Однако, реализация этой идеи требует дополнительных исследований, учитывающих специфику задачи (1).

3. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим

$$B_m^+ = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m : a_m \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 1\right\},$$

$$\Gamma(a_i) = \left\{x(\cdot) : \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\mathcal{L}_{n,i}(D) x(t)\right|^2 dt = a_i^2, \ x^{(j)}(t_i) = x^{(j)}(t_{i+1}) = 0, \ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Лемма 1. *Пусть каждый дифференциальный оператор* $\mathcal{L}_{n,i}(D) \in \mathcal{V}_n(\Delta_m)$ *является неосциллирующим на соответствующем промежутке* $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда для любой функции* $f \in K_2(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ *при ее интерполировании кусочно-эрмитовым* $\mathcal{L}$*-сплайном* $S_{n,m}(f)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| f - S_{n,m}(f) \right\|_p \leq \max_{(a_1, \ldots, a_m) \in B_m^+} \left(\sum_{i=1}^{m} \sup_{x \in \Gamma(a_i)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \tag{2}$$

где $1 < p < \ldots \infty$.

Доказательство. Как отмечено ранее, кусочно-эрмитовый $\mathcal{L}$-сплайн $S_{n,m}(f)$ существует и единствен для любой функции $f \in C^{(n-1)}[a, b]$.

В [6] (теорема 3.1) было доказано, что для кусочно-эрмитова $\mathcal{L}$-сплайна имеет место аналог первого интегрального соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\mathcal{L}_{n,i}(D)\big(f(t) - S_{n,m}(f)(t)\big)\right|^2 dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\mathcal{L}_{n,i}(D) f(t)\right|^2 dt - \sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\mathcal{L}_{n,i}(D) S_{n,m}(f)(t)\right|^2 dt. \tag{3}$$

Обозначив $\varphi(t) = f(t) - S_{n,m}(f)(t)$, из (3) получим

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\mathcal{L}_{n,i}(D)\varphi(t)\right|^2 dt \le \sum_{i=1}^{m}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\mathcal{L}_{n,i}(D)f(t)\right|^2 dt.$$

Отсюда в силу определения класса $K_2(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\mathcal{L}_{n,i}(D)\varphi(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \le 1.$$

Кроме того, нетрудно видеть, что $\varphi^{(j)}(t_i)=0$, $j=0,1,\ldots,n-1$, для всех $i = 1,2,\ldots,m+1$.

Для каждой функции $\varphi(\cdot)$ можно подобрать константу $\alpha\in\mathbf{R}$, $|\alpha|\ge 1$, так, чтобы

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\mathcal{L}_{n,i}(D)(\alpha\varphi(t))\right|^2 dt\right)^{1/2} = 1.$$

Обозначив $x(t)=\alpha\varphi(t)$,

$$\Gamma = \left\{x(\cdot): x^{(n-1)}(\cdot) \text{— абс. непр. на } [a,b],\ \left(\sum_{i=1}^{m}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\mathcal{L}_{n,i}(D)x(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} = 1,\right.$$

$$\left. x^{(j)}(t_i)=0,\quad j=0,1,\ldots,n-1,\quad i=1,2,\ldots,m+1\right\},$$

оценим

$$\|\varphi(\cdot)\|_p = |\alpha|^{-1}\|x(\cdot)\|_p \le \|x(\cdot)\|_p \le \sup\left\{\|x(\cdot)\|_p : x(\cdot)\in\Gamma\right\} =$$

$$= \max_{(a_1,\ldots,a_m)\in B_m^+}\left(\sum_{i=1}^{m}\sup_{x\in\Gamma(a_i)}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|x(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Оценка (2) установлена, и лемма 1 доказана.

Таким образом, для получения оценки величины $\left\|f(t)-S_{n,m}(f)(t)\right\|_p$ необходимо решить m однотипных экстремальных задач:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}}|x(t)|^p dt \to \sup,$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\mathcal{L}_{n,i}(D)x(t)\right|^2 dt = a_i^2, \tag{4}$$

$$x^{(j)}(t_i) = x^{(j)}(t_{i+1}) = 0,\quad i=1,2,\ldots,m,\quad j=0,1,\ldots,n-1.$$

Поскольку $1<p<\infty$, выписанные выше задачи относятся к изопериметрическим задачам классического вариационного исчисления. Каждая из них имеет решение.

Лемма 2. *Пусть каждый дифференциальный оператор $\mathcal{L}_{n,i}(D)\in\mathcal{V}_n(\Delta_m)$ является неосциллирующим на соответствующем промежутке $[t_i,\ t_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots,m$. Тогда если функция $x_i(\cdot)$ является решением проблемы* (4), *то она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x_i(t) = \lambda_i \mathcal{L}^*_{n,i}(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)\, x_i(t) \tag{5}$$

и краевым условиям

$$x_i^{(j)}(t_i) = x_i^{(j)}(t_{i+1}) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

при некоторой константе $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $\lambda_i \neq 0$.

Доказательство. Введем функцию Лагранжа $Q = Q(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))$:

$$Q = -\lambda_0 |x(t)|^p + \lambda_1 \left|\mathcal{L}_{n,i}(D)x(t)\right|^2$$

(λ_0, λ_1 — множители Лагранжа) и рассмотрим интегральный функционал

$$I_i(x) = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} Q\big(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big)\, dt .$$

Выписываем необходимое условие экстремума функционала $I_i(x)$ — уравнение Эйлера – Пуассона [18, с. 141 – 143]:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k \left(\frac{\partial Q}{\partial x^{(k)}}\right) = 0 .$$

С помощью несложных преобразований получаем, что если $x_i(\cdot)$ — решение задачи (4), то

$$-\lambda_0 p\, |x_i(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x_i(t) + 2\lambda_1 \mathcal{L}^*_{n,i}(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)\, x_i(t) = 0,$$

$$x_i^{(j)}(t_i) = x_i^{(j)}(t_{i+1}) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Покажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда либо $\lambda_1 = 0$, либо $\mathcal{L}^*_{n,i}(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)\, x_i(t) \equiv 0$ на $[t_i,\ t_{i+1}]$. Первое невозможно в силу метода Лагранжа. Пусть выполнено второе. Поскольку $\mathcal{L}_{n,i}(D)$ является неосциллирующим на $[t_i,\ t_{i+1}]$, то формально сопряженный ему оператор $\mathcal{L}^*_{n,i}(D)$ также неосциллирующий на $[t_i,\ t_{i+1}]$ [17, с. 104], а значит, $\mathcal{L}^*_{n,i}(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)$ неосциллирующий на $[t_i,\ t_{i+1}]$ как суперпозиция двух неосциллирующих операторов [17, с. 94]. Поэтому краевая задача

$$\mathcal{L}^*_{n,i}(D)\mathcal{L}_{n,i}(D)\, x_i(t) = 0,$$

$$x_i^{(j)}(t_i) = 0, \quad x_i^{(j)}(t_{i+1}) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

имеет единственное решение [16], которое является тождественно равным нулю. Однако $x_i(t) \equiv 0$ на $[t_i,\ t_{i+1}]$ не является решением задачи (4). Поэтому $\lambda_0 \neq 0$. Полагаем $\lambda_0 = 2/p$, $\lambda_1 = \lambda_i$ и простыми рассуждениями получаем $\lambda_i \neq 0$. Лемма 2 доказана.

Установим разрешимость каждой из задач (5), (6).

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{L}_N(D) = D^n + p_{N-1}(t)D^{N-1} + \ldots + p_1(t)D + p_0(t)$ — *неосциллирующий на промежутке* $[\alpha, \beta]$, $-\infty \leq \alpha < \beta < +\infty$, *линейный дифференциальный оператор. Тогда найдутся* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ *и* $x(\cdot)$, *для которых*

$$|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t) - \lambda \mathcal{L}^*_N(D)\mathcal{L}_N(D)\, x(t) = 0,$$

$$x^{(j)}(\alpha) = x^{(j)}(\beta) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

а собственная функция $x(\cdot)$ *нормирована условием*

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\mathcal{L}_N(D)x(t)|^2\, dt = A,$$

где A *— произвольное заданное положительное число.*

. ***Доказательство.*** Для $\mathcal{L}_n(D) = D^n$ лемма 3 была доказана А. П. Буслаевым и В. М. Тихомировым [19]. Перенос на случай произвольного неосциллирующего линейного дифференциального оператора не составляет труда: достаточно воспользоваться тем фактом, что функция Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}_N(D)F(t) = H(t),$$

$$F^{(j)}(\alpha) = F^{(j)}(\beta) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и функция Грина сопряженной краевой задачи существуют в силу неосцилляции оператора $\mathcal{L}_N(D)$ [17, с. 105], а затем повторить доказательство, приведенное в [19].

Следуя [19], через $\mathrm{sp}\,(\mathcal{L}_{n,i}(D), a_i)$ обозначается множество собственных значений λ_i в задаче (5), (6) с нормировкой для собственных функций $x_i(\cdot)$:

$$\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\mathcal{L}_{n,i}(D)\,x_i(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Согласно лемме 3 $\mathrm{sp}\,(\mathcal{L}_{n,i}(D), a_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Обозначаем $\lambda_i = \max\{\lambda : \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathcal{L}_{n,i}(D), a_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Лемма 4. *Если дифференциальный оператор* $\mathcal{L}_{n,i}(D)$ *является неосциллирующим на* $[t_i, t_{i+1}]$, *то*

$$\sup_{x(\cdot)\in\Gamma(a_i)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |x_i(t)|^p\, dt = \lambda_i a_i^2, \quad 1 < p < \infty.$$

Доказательство. Пусть $x_i(\cdot)$ — решение экстремальной проблемы (4). Согласно леммам 2 и 3, функция $x_i(\cdot)$ является собственной функцией, соответствующей некоторому $\lambda^{(i)} \in \mathrm{sp}\,(\mathcal{L}_{n,i}(D), a_i)$, с нормировкой (7). Используя (5), (7) и формулу сопряжения Лагранжа (см., например, [20], § 1, п. 5), получаем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |x_i(t)|^p\, dt = \lambda^{(i)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x_i(t)\,\mathcal{L}^*_{n,i}(D)\,\mathcal{L}_{n,i}(D)\,x_i(t)\, dt =$$

$$= \lambda^{(i)}\left[R_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\mathcal{L}_{n,i}(D)\,x(t)\right|^2 dt\right] = \lambda^{(i)}\left(R_i + a_i^2\right),$$

где

$$R_i = \sum_{j=0}^{n-1} \left(D^{n-j-1}\mathcal{L}_{n,i}(D)\,x_i(t)\right) \sum_{k=0}^{j} (-1)^k D^k \left(p_{n-j+k,\,i}(t)\,x_i(t)\right)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}.$$

В силу краевых условий (6) $R_i = 0$.

Таким образом,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |x_i(t)|^p \, dt = \lambda_i a_i^2$$

и остается заметить, что для достижения верхней грани по всем $x(\cdot) \in \Gamma(a_i)$ необходимо $\lambda^{(i)} = \lambda_i$. Лемма 4 доказана.

4. ***Доказательство теоремы* 1.** Из лемм 2 и 4 получаем

$$\left\| f - S_{n,m}(f) \right\|_p \leq \max_{(a_1,\ldots,a_m) \in B_m^+} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i^2 \right)^{1/p}. \tag{8}$$

Заметим, что λ_i зависит не только от номера i промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, но и от нормировочной константы a_i (см. (7)). В [15, с. 152] показано, что $\lambda_i(a_i) = \lambda_i(1)\, a^{p-2}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначив $\Lambda_i = \lambda_i(1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, неравенство (8) можно переписать в следующем виде:

$$\left\| f - S_{n,m}(f) \right\|_p \leq \max_{(a_1,\ldots,a_m) \in B_m^+} \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i a_i^p \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Рассмотрим конечномерную экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i a_i^p \to \max_{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m}, \\ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 1, \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{10}$$

Задача (10) имеет решение благодаря непрерывности максимизируемого функционала и компактности ограничений. Решение задачи (10) для частного случая $\Lambda_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, приведено в [18, с. 446]. Общий случай исчерпывается на основе того же подхода.

Введем функцию Лагранжа задачи (10)

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_m) = c_0 \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i a_i^p + c_1 \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 - 1 \right),$$

где c_0, c_1 — множители Лагранжа.

Пусть $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m) \in \mathbf{R}^m$ — искомый экстремальный вектор задачи (10). Из условий стационарности

$$\frac{\partial L(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

получаем

$$c_0 \Lambda_i \hat{a}_i^{p-1} p + 2 c_1 \hat{a}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Нетрудно убедиться в том, что $c_0 \neq 0$. Полагая $c_0 = -2/p$, приходим к системе уравнений

$$\hat{a}_i \left(\Lambda_i \hat{a}_i^{p-2} - c_1 \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда видно, что вектор $\hat{a}$ нужно искать среди векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, компоненты которых либо равны нулю, либо определяются условиями $\Lambda_i a_i^{p-2} = c_1$, где c_1 находится из ограничения $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$ (см. (10)). Допустим, что k, $k = 1, 2, \ldots, m$, компонент вектора $\hat{a}$ отличны от нуля, а остальные $m-k$ — равны нулю. Полагаем

$$\mathcal{P} = \{ i \in \mathbf{N} : 1 \le i \le m,\ \hat{a}_i \ne 0 \}, \quad k = \operatorname{card} \mathcal{P}.$$

После выполнения несложных преобразований получаем

$$\sum_{j=1}^m \Lambda_j \hat{a}_j^p = \left(\sum_{j \in \mathcal{P}} \Lambda_j^{2/(2-p)} \right)^{(2-p)/2}. \tag{11}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $1 < p < 2$. В этом случае максимум в (11) достигается, когда сумма, стоящая справа, содержит наибольшее число ненулевых слагаемых, т. е. $k = m$ и $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

2. $2 < p < \infty$. Максимум в (11) достигается при $k = 1$ на максимальной компоненте Λ_{i^*} вектора $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m)$.

3. $p = 2$. Этот случай исчерпывается с помощью предельного перехода $p \to 2$ в пп. 1, 2.

Из (9) следует, что для любой функции $f \in K_2(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$ выполняется неравенство

$$\| f - S_{n,m}(f) \|_p \le \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m \Lambda_i^{2/(2-p)} \right)^{1/p - 1/2}, & 1 < p < 2, \\ (\max \{ \Lambda_i : i = 1, 2, \ldots, m \})^{1/p}, & 2 \le p < \infty. \end{cases}$$

Покажем, что существует функция $f \in K_2(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$, которая обращает это неравенство в равенство.

А) $2 \le p < \infty$. Пусть, как и выше, Λ_{i^*} — максимальный элемент среди Λ_1, $\Lambda_2, \ldots, \Lambda_m$. Через $x_{i^*}(\cdot)$ обозначаем собственную функцию, соответствующую Λ_{i^*} и нормированную единицей на промежутке $[t_{i^*}, t_{i^*+1}]$. Полагаем

$$F(t) = \begin{cases} x_{i^*}(t), & t \in [t_{i^*}, t_{i^*+1}], \\ 0, & t \notin [t_{i^*}, t_{i^*+1}]. \end{cases}$$

В силу краевых условий (6) $F^{(j)}(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, и единственности кусочно-эрмитова $\mathcal{L}$-сплайна $S_{n,m}(F)(t) = 0$ на $[a, b]$. Поскольку $F^{(n-1)}$ — абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и

$$\left(\sum_{i=1}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \mathcal{L}_{n,i}(D) F(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{t_{i^*}}^{t_{i^*+1}} \left| \mathcal{L}_{n,i^*}(D) F(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = 1,$$

то $F \in K_2(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$. Кроме того, применяя лемму 4, имеем

$$\| F \|_p = \left(\int_a^b |F(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\int_{t_{i^*}}^{t_{i^*+1}} \left| x_{i^*}(t) \right|^p dt \right)^{1/p} = \Lambda_{i^*}^{1/p}.$$

Б) $1 < p < 2$. Как видно из (10) – (11), в этом случае оптимальный вектор нормализующих параметров $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m)$ имеет вид

$$\hat{a} = \left(\Lambda_1^{1/(2-p)} \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i^{2/(2-p)} \right)^{-1/2}, \ldots, \Lambda_m^{1/(2-p)} \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i^{2/(2-p)} \right)^{-1/2} \right). \tag{12}$$

Пусть $\{\lambda_1(\hat{a}_1), \lambda_2(\hat{a}_2), \ldots, \lambda_m(\hat{a}_m)\}$ — вектор собственных значений, построенный по $\hat{a}$, $\{\hat{x}_1(\cdot), \hat{x}_2(\cdot), \ldots, \hat{x}_m(\cdot)\}$ — соответствующий набор собственных функций, нормированных компонентами вектора $\hat{a}$. Полагаем

$$F(t) = \begin{cases} \hat{x}_1(t), & t \in [a, t_2), \\ \hat{x}_2(t), & t \in [t_2, t_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{x}_m(t), & t \in [t_m, b]. \end{cases}$$

Как и выше, $S_{n,m}(F) \equiv 0$ на $[a, b]$, $F^{(n-1)}$ —абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \mathcal{L}_{n,i}(D) F(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{a}_i^2 \right)^{1/2} = 1,$$

т. е. $F \in K_2(\mathcal{V}_n(\Delta_m))$.

Применив лемму 4, условия нормировки функций $x_i(\cdot)$, выражение (12) и равенства $\lambda_i(\hat{a}_i) = \Lambda_i a_i^{p-2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, получаем

$$\|F\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |x_i(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\hat{a}_i) \, \hat{a}_i^2 \right)^{1/p} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i \hat{a}_i^p = \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i^{2/(p-2)} \right)^{1/p-1/2}.$$

Теорема 1 доказана.

Отметим один важный частный случай теоремы 1.

***Замечание* 1.** Пусть $\mathcal{V}_n(\Delta_m) = \{D^n\}$,

$$W_2^n = \left\{ f : f^{(n-1)} \text{— абсолютно непрерывна на } [a, b], \ \left\| f^{(n)} \right\|_2 \le 1 \right\}.$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_n(D) = D^n$ является неосциллирующим на $\mathbf{R}$, а потому и на любом промежутке $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Поэтому, согласно теореме 1, для величины приближения полиномиальными эрмитовыми сплайнами на классе W_2^n имеем

$$\sup_{f \in W_2^n} \left\| f - S_{n,m}(f) \right\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i^{2/(2-p)} \right)^{1/p-1/2}, & 1 < p < 2, \\ \left(\max\{\Lambda_i : i = 1, 2, \ldots, m\} \right)^{1/p}, & 2 \le p < \infty, \end{cases}$$

где Λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — максимальные собственные значения краевых задач

$$|x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) = \Lambda_i x^{(2n)}(t),$$

$$x^{(j)}(t_i) = x^{(j)}(t_{i+1}) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, соответственно.

Как было отмечено выше, величина $\{ \| f - S_{n,m}(f) \|_p : f \in W_2^n \}$ при $p = 1$ и $p = \infty$ была ранее вычислена О. В. Давыдовым [3]. Таким образом, теорема 1 завершает решение задачи о точном значении погрешности аппроксимации класса W_2^n полиномиальными эрмитовыми сплайнами в пространствах L_p, $1 \leq \leq p \leq \infty$.

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
2. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 165 – 185.
3. *Давыдов О. В.* Некоторые оценки приближения функций эрмитовыми сплайнами // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С. 23 – 30.
4. *Шумейко А. А.* О приближении функций локальными L-сплайнами // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: ДГУ, 1982. – С. 72 – 79.
5. *Späth H.* Exponential spline interpolation // Computing. – 1969. – **4**. – P. 225 – 230.
6. *Prenter P.* Piecewise L-splines // Numer. Math. – 1971. – **18**, № 3. – P. 243 – 253.
7. *Pruess S.* Properties of splines in tension // J. Approxim. Theory. – 1976. – **17**, № 1. – P. 86 – 96.
8. *Хоанг Ван Лай.* Исследования по теории эрмитовых сплайнов и приближенных методов решения параболических и эллиптических задач: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1978. – 128 с.
9. *Субботин Ю. Н.* Интерполяционные L-сплайны третьего порядка // Вариационно-разностные методы в математической физике. – М.: АН СССР, 1984. – С. 215 – 218.
10. *McCartin B.* Theory of exponential splines // J. Approxim. Theory. – 1991. – **66**, № 1. – P. 1 – 23.
11. *Гребенников А. И.* Обобщенные сплайны и задача кусочной интерполяции // Тр. 2-й конф. молодых ученых фак. вычислит. математики и кибернетики МГУ. – М.: МГУ, 1975. – С. 61 – 68.
12. *Ciarlet P., Schultz M., Varga R.* Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. One dimensional problem // Numer. Math. – 1967. – **9**, № 5. – P. 394 – 430.
13. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
14. *Новиков С. И.* Об одной задаче приближения дифференцируемых функций эрмитовыми $\mathcal{L}$-сплайнами // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калинин: КГУ, 1987. – С. 65 – 72.
15. *Novikov S. I.* L_p-approximation by piecewise Hermitian L-splines // E. J. Approxim. – 1995. – **1**, № 2. – P. 143 – 156.
16. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$ // Успехи мат. наук. – 1969. – **24**, № 2. – С. 42 – 96.
17. *Coppel W.* Disconjugacy // Lect. Notes Math. – 1971. – **220**. – P. 1 – 147.
18. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
19. *Буслаев А. П., Тихомиров В. М.* Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 12. – С. 1587 – 1606.
20. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

Получено 08.07.97