УДК 517.9

А. М. Самойленко, Я. А. Прикарпатський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ АДІАБАТИЧНО ЗБУРЕНИХ ЦІЛКОМ ІНТЕГРОВНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ. II

By using the Cartan differential-geometric theory of integral submanifolds (invariant tori) of completely Liouville–Arnold integrable Hamiltonian systems on the cotangent phase space, we consider an algebraic-analytical method for investigating the corresponding mapping of imbedding of an invariant torus into the phase space. This method enables one to perform the analytical description of the structure of quasiperiodic solutions to the Hamiltonian system under consideration. We also consider the problem of the existence of adiabatic invariants associated with the slowly perturbed Hamiltonian system.

Базуючись на диференціально-геометричній теорії Картана інтегральних підмноговидів (інваріантних торів) повністю інтегровних за Ліувіллем – Арнольдом гамільтонових систем на кодотичному фазовому просторі, розглянуто алгебраїчно-аналітичний метод дослідження відповідного відображення вкладення інваріантного тора в фазовий простір. Це дає можливість описати аналітично структуру квазіперіодичних розв'язків досліджуваної гамільтонової системи. Розглянуто також задачу існування адіабатичних інваріантів, що асоційовані з повільно збуреною гамільтоновою системою.

1. Аналіз деформацій інваріантного тора адіабатично збурених цілком інтегровних гамільтонових систем. Нехай задано на фазовому просторі $T^*(R^n)$ цілком інтегровну поліноміально-алгебраїчну гамільтонову систему [1 – 3]

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_j}, \tag{1.1}$$

де $j=\overline{1,n}$, адіабатично залежну від параметра $\tau := \varepsilon t \in R/2\pi Z$, де $R_+ \ni \ni \varepsilon \to 0$ — деякий малий параметр. Припускаємо також, що відповідна гамільтонова система

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H_\tau(q,p)}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H_\tau(q,p)}{\partial q_j}, \tag{1.2}$$

де $j=\overline{1,n}$, $H_\tau(q,p) := H(q,p;\tau)$ для всіх $(q,p)\in T^*(R^n)$, є цілком інтегровною для всіх значень фіксованого параметра $\tau := \varepsilon t \in R/2\pi Z$ [4 – 10]. Це означає, що існує повний інволютивний набір незалежних функцій $H_{j,\tau}: T^*(R^n) \to R$, $j=\overline{1,n}$, залежних адіабатично від параметра $\tau := \varepsilon t \in R/2\pi Z$. За умови невиродженості майже скрізь системи 1-форм $dH_j = 0$ на інтегральному многовиді $M^n_{h,\tau}$ динамічної системи (1.2) при фіксованому параметрі $\tau := \varepsilon t \in \in R/2\pi Z$ (тобто незалежному від еволюційної змінної часу $t \in R^n$) існує, згідно з [11], відображення вкладення інтегрального многовиду $M^n_{h,\tau}$ в $T^*(R^n)$, яке задається стаціонарною породжуючою функцією

$$S_\tau(\mu_\tau;h_\tau) = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mu_{j,\tau}^0}^{\mu_{j,\tau}} w_{j,\tau}(\mu_{j,\tau};h_\tau)\,d\mu_{j,\tau}, \tag{1.3}$$

де набір $(\mu_{j,\tau}, w_{j,\tau}) \in \Gamma_{h,\tau}^n \simeq M_{h,\tau}^n$, $j=\overline{1,n}$, — набір локальних координат на карті $U_{h,\tau} \subset M_{h,\tau}^n$ в термінах декартового добутку ріманових поверхонь $\Gamma_{h,\tau}^{n_j}$, $j=\overline{1,n}$, визначених алгебраїчними рівняннями з [11]. Оскільки породжуюча функція (1.3) задає канонічне перетворення симплектичної структури $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(R^n))$ при кожному фіксованому $\tau \in R/2\pi Z$, можемо тепер розглянути рівняння гамільтонової системи (1.2) при $\tau := \varepsilon t \in R/2\pi Z$ в термінах локальних координат $(\mu_{j,\tau}, w_{j,\tau}) \in \Gamma_{h,\tau}^{n_j}$, $j=\overline{1,n}$, на многовиді $M_{h,\tau}^n$, використовуючи теорему Пуанкаре – Картана [1] про інваріантність інтегрального інваріанта Пуанкаре – Картана для неавтономних гамільтонових систем. А саме, можна записати наступну рівність [1 – 3]:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\,dq_j - H_\tau dt = \sum_{j=1}^{n} w_{j,\tau}\,d\mu_{j,\tau} - H'_\tau dt + dS_\tau(\mu_{\tau u};h_\tau) \tag{1.4}$$

на карті $U_{h,\tau}$, де, за визначенням, $H'_\tau : T^*(R^n) \to R$, $t \in R$, — відповідна функція Гамільтона системи (1.2) відносно канонічної симплектичної структури

$$\pi_{h,\tau}^*\Omega^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} dw_{j,\tau} \wedge d\mu_{j,\tau}$$

на многовиді $T^*(M_{h,\tau}^n)$ при фіксованому значенні параметра $\tau \in R/2\pi Z$. З (1.4) випливає

$$H'_\tau := H_\tau\big|_{\tau=\varepsilon t} + \varepsilon\frac{\partial S_\tau}{\partial \tau}, \tag{1.5}$$

де, за умовою, параметр $\varepsilon \to 0$. Відображення вкладення $\pi_{h,\tau}^* : M_{h,\tau}^n \to T^*(M_{h,\tau}^n)$ є заданим для всіх $\tau \in R/2\pi Z$, функція Гамільтона (1.5) визначена в координатах простору $T^*\left(\prod_{k=1}^n \Gamma_{h,\tau}^{n_k}\right)$ на $T^*(M_{h,\tau}^n)$ однозначно. Вважатимемо тепер, що при певному фіксованому значенні параметра $\tau = \tau_0 \in R/2\pi Z$ інтегральний многовид M_{h,τ_0}^n дифеоморфний дійсному тору T_{γ,τ_0}^n з незалежним набором $n \in Z$ квазіперіодів $\{T_{j(s)}^{\tau_0} := 2\pi\omega_{sj}(\tau_0); j=\overline{1,n}\}$, $s=\overline{1,n}$, де, за визначенням, матриця квазіперіодів $\omega_\tau : R^n \to R^n$ має вигляд

$$\omega_\tau := \left\{\frac{\partial h_{j\tau}(\gamma_\tau)}{\partial \gamma_{k,\tau}} : j,k=\overline{1,n}\right\} \tag{1.6}$$

для всіх $\tau = \tau_0 \in R/2\pi Z$. Відповідні рівняння Гамільтона на многовиді $T^*(\Gamma_{h,\tau}^n)$ набирають майже скрізь такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{j,\tau}}{dt} &= \frac{\partial H'_t}{\partial w_{j,\tau}}, \\ \frac{dw_{j,\tau}}{dt} &= \frac{\partial H'_t}{\partial \mu_{j,\tau}}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

де $j=\overline{1,n}$ і $\tau = \tau_0 \in R/2\pi Z$. Відповідно в термінах змінних „дія-кут" на тороїдальному многовиді $T^*(T^n_{\gamma,\tau}) = T^*(\Gamma^n_{h,\tau})$ гамільтонова система (1.7) записується так:

$$\frac{d\varphi_{j,\tau}}{dt} = \omega_{1j}(\tau) + \varepsilon \frac{\partial^2 S'_\tau}{\partial \gamma_{j,\tau}\partial\tau},$$
$$\frac{d\gamma_{j,\tau}}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial^2 S'_\tau}{\partial \varphi_{j,\tau}\partial\tau}, \tag{1.8}$$

де $\{\varphi_{j,\tau}: j = \overline{1,n}\} \in T^n_{\gamma,\tau}$, $S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma_\tau) := S_\tau(\mu_\tau(\varphi_\tau,\gamma_\tau), h_\tau(\gamma_\tau))$ для всіх $\tau = \tau_0 \in R/2\pi Z$. Отримана динамічна система (1.8) на просторі $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$ при $\varepsilon \to 0$ є, очевидно, заданою в так званій стандартній формі М. М. Боголюбова [12], для якої можна ефективно застосувати метод усереднення та прискореної збіжності відповідного канонічного перетворення [1, 13] до нових канонічних змінних на торі $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$, в термінах яких еволюція динамічної системи (1.8) цілком разділяється для часу $t \in [0; 1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ і є деякою квазілінійною функцією з достатньо високою точністю $O(\varepsilon^r)$, де $r \ge 2$. При цьому, як відомо з [1, 12, 14], процедура прискореної збіжності, розвинута в рамках КАМ-теорії [1], спряжена в загальній постановці з так званою проблемою малих знаменників (дільників), яка частково розв'язується в [1] при деяких додаткових обмеженнях на параметри гамільтонової системи (1.8). Щодо системи (1.8), то її права частина легко виражається аналітично і записується у вигляді

$$\frac{d\varphi_{j,\tau}}{dt} = \omega_{1j}(\tau) + \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,\tau}\left(\omega^{-1}(\tau)\frac{\partial\omega(\tau)}{\partial\tau}\right)_{k,j} +$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\omega_{k,\tau}\frac{\partial\mu_{k,\tau}}{\partial h_{j,\tau}}\right)\omega_{j,s}(\tau), \tag{1.9}$$
$$\frac{\partial\gamma_{j,\tau}}{\partial t} = \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(w^{-1}(\tau)F(\tau)\right)_{j,k} w_{k,\tau}(\mu_{k,\tau}; h_\tau)\right],$$

$j,k = \overline{1,n}$, $\tau := \varepsilon t \in R/2\pi Z$ і де, за визначенням, матриця $F(\tau) := \{F_{j,k}(\tau) = f^{-1}_{jk}(\tau; \mu_{k,\tau}, w_{k,\tau}) : j,k = \overline{1,n}\}$, причому, згідно з [11],

$$f_{jk}(\tau; \mu_{k,\tau}, w_{k,\tau}) = \frac{\partial w_{k,\tau}(\mu_{k,\tau}; h_\tau)}{\partial h_{j,\tau}},$$

для всіх $j,k = \overline{1,n}$. Система рівнянь (1.9) у нашому випадку має досить спеціальний вигляд, що дає можливість ефективно застосовувати метод усереднення та канонічних перетворень Пуанкаре – Картана для встановлення існування квазіінваріантної деформації інваріантного тора $T^n_{\gamma,\tau}$ до певного тора $T^n_{\bar\gamma}$, орбіти (1.9) на якому будуть еквівалентними квазілінійним функціям еволюційного параметра $t \in R_+ \cap [0; 1/\varepsilon)$, де $\varepsilon \to 0$, а при деяких додаткових умовах і для всіх $t \in R_+$.

Застосуємо тепер до гамільтонової системи (1.9) метод стаціонарного канонічного перетворення для аналізу існування такої координатної системи в околі інтегрального многовиду динамічної системи (1.2), що еволюція її буде еквівалентна лінійному квазіперіодичному руху на деякому торі $T^n_{\bar\gamma}$. Породжуючу функцію $\Phi^\varepsilon: R \times (R/2\pi Z)^n \to R$ цього відображення координатної системи з простору $T(T^n_{\gamma,\tau})$ до координатної системи деякого простору $T(T^n_{\bar{\gamma}})$ задамо таким чином [1]:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{j,\tau}\, d\varphi_{j,\tau} - H'_\tau\, dt = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j\, d\gamma_j - H^\varepsilon dt + d\Phi^\varepsilon(t;\varphi_\tau,\gamma), \tag{1.10}$$

де функція Гамільтона $H^\varepsilon\colon R \times T^*(T^n_{\bar{\gamma}}) \to R$ не залежить від кутових змінних $\varphi \in T^n_{\bar{\gamma}} \in R$, а для породжуючої функції Φ^ε при $\varepsilon \to 0$ справедливий наступний асимптотичний розклад:

$$\Phi^\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{j,\tau}\gamma_j + \varepsilon\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma) + \varepsilon^2\Phi_2(t;\varphi_\tau,\gamma) + O(\varepsilon^3). \tag{1.11}$$

З рівностей (1.10) та (1.11) маємо

$$\begin{aligned} \gamma_{j,\tau} &= \gamma_j + \varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_{j,\tau}} + O(\varepsilon^2), \\ \varphi_{j,\tau} &= \varphi_j + \varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial\gamma_j} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

для всіх $j = \overline{1,n}$ при $\varepsilon \to 0$. Крім цього з (1.10) знаходимо також вираз для функції Гамільтона

$$H^\varepsilon = H'_\tau + \varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + O(\varepsilon^2). \tag{1.13}$$

Враховуючи, що при $\varepsilon \to 0$ справедливий розклад

$$H^\varepsilon(t;\gamma) = H^{(0)}(t;\gamma) + \varepsilon H^{(1)}(t;\gamma) + O(\varepsilon^2) \tag{1.14}$$

для всіх $\gamma \in T_\varphi(T^n_{\bar{\gamma}})$ і $t \in R$, можна прирівняти (1.13) та (1.14) з урахуванням (1.12). Як результат, знаходимо такі співвідношення для коефіцієнтів ряду (1.14):

$$\begin{aligned} H^{(0)}(t;\gamma) &= H_\tau(\gamma_\tau)\big|_{\gamma_\tau=\gamma}, \\ H^{(1)}(t;\gamma) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_\tau(\gamma_\tau)}{\partial\gamma_{j,\tau}}\bigg|_{\gamma_\tau=\gamma} \frac{\partial\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma)}{\partial\varphi_{j,\tau}} + \\ &\quad + \frac{\partial S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)}{\partial\tau}\bigg|_{\gamma_\tau=\gamma} + \frac{\partial\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Оскільки функція $H_1\colon R \times R^n \to R$ не залежить в (1.15) від тороїдального аргумента $\varphi_\tau \in T^n_{\gamma,\tau}$, по ньому можна провести процедуру усереднення і отримати наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} H^{(1)}(t;\gamma) &= \sum_{j=1}^{n} \omega_{1j}(\tau)\left\langle \frac{\partial\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma)}{\partial\varphi_{j,\tau}} \right\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\tau}\langle S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} + \frac{\partial}{\partial t}\langle \Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

де, за визначенням, для будь-якої функції $g \in L_1(T^n_{\gamma,\tau}; R)$

$$\langle g(\varphi_\tau)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n_{\gamma,\tau}} d\varphi_\tau g(\varphi_\tau). \tag{1.17}$$

Як результат періодичності функції $\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma)$ за змінними $\varphi_\tau\in T^n_{\gamma,\tau}$ з (1.16) отримуємо

$$H^{(1)}(t;\gamma) = \frac{\partial}{\partial\tau}\langle S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} + \frac{\partial}{\partial t}\langle\overline{\Phi}_1(t;\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}}. \tag{1.18}$$

Врахуємо, що для будь-якої функції $g\in L_1(T^n_{\gamma,\tau})$ справедлива тотожність [13, 15]

$$\langle g(\varphi_\tau)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} \equiv \frac{1}{\overline{K}_\tau}\oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau g(\varphi_\tau(\mu_\tau))\left|\frac{\partial\varphi_\tau(\mu_\tau)}{\partial\mu_\tau}\right|, \tag{1.19}$$

де

$$\overline{K}_\tau := \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau\left|\frac{\partial\varphi_\tau(\mu_\tau)}{\partial\mu_\tau}\right|,$$

$$\sigma_\tau = \left\{\bigotimes_{j=1}^{n}\sigma_{j,\tau}\right\}\in H_1(\Gamma^n_{h,\tau})$$

— базис одновимірної групи гомологій рімановоі поверхні $\Gamma^n_{j,\tau}$, $\left|\frac{\partial\varphi_\tau(\mu_\tau)}{\partial\mu_\tau}\right|$ — відповідний невироджений якобіан переходу:

$$\left|\frac{\partial\varphi_\tau(\mu_\tau)}{\partial\mu_\tau}\right| = \det[f(\tau;\mu_\tau,w_\tau)]\det[w(\tau)], \tag{1.20}$$

де будемо вважати, що для всіх $\tau\in R/2\pi Z$ $\det[\omega(\tau)]\neq 0$. Враховуючи (1.20), можна записати операцію усереднення (1.19) в наступному вигляді:

$$\langle g(\varphi_\tau)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} = \frac{1}{K_\tau}\oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau g(\varphi_\tau(\mu_\tau))\det[f(\tau;\mu_\tau,w_\tau)], \tag{1.21}$$

де

$$K_\tau = \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau\det[f(\tau;\mu_\tau,w_\tau)].$$

Таким чином, для усередненої величини $\langle S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}}$ в (1.18), використовуючи (1.21), знаходимо

$$\langle S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} = \left\langle\sum_{j=1}^{n}\int_{\mu^0_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}(\varphi_\tau;\gamma)} w_{j,\tau}(\lambda;h_\tau(\gamma))\right\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=0}\left\langle\prod_{j=1}^{n}\left[1+\nu\int_{\mu^0_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}(\varphi_\tau;\gamma)} d\lambda w_{j,\tau}(\lambda;h_\tau(\gamma))\right]\right\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} =$$

$$= \frac{1}{K_\tau}\frac{\partial}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=0}\oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau\det\left[f_{jk}(\tau;\mu_{k,\tau},w_{k,\tau})\left[1+\nu\int_{\mu^0_{k,\tau}}^{\mu_{k,\tau}(\varphi_\tau;\gamma)} d\lambda w_{k,\tau}(\lambda;h_\tau(\gamma))\right]\right]_{j,k=\overline{1,n}} =$$

$$= \frac{1}{K_\tau}\frac{\partial}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=0}\det\left[\oint_{\sigma_{k,\tau}} d\mu_\tau\, f_{jk}(\tau;\mu_{k,\tau},w_{k,\tau})\left[1+\nu\int_{\mu^0_{k,\tau}}^{\mu_{k,\tau}(\varphi_\tau;\gamma)} d\lambda w_{k,\tau}(\lambda;h_\tau(\gamma))\right]\right]_{j,k=\overline{1,n}} =$$

$$= \frac{1}{K_\tau}\sum_{s=1}^{n}\det\left[\oint_{\sigma_{k,\tau}} d\mu_\tau\, f_{jk}(\tau;\mu_{k,\tau},w_{k,\tau})\int_{\mu^0_{k,\tau}}^{\mu_{k,\tau}(\varphi_\tau;\gamma)} d\lambda w_{k,\tau}(\lambda;h_\tau(\gamma))\,(1-\delta_{ks})\right]_{j,k=\overline{1,n}} =$$

$$= \frac{1}{K_\tau}\sum_{s=1}^{n} K_{s,\tau}, \tag{1.22}$$

де, за визначенням, для $s=\overline{1,n}$

$$K_{s,\tau} = \det\left[\oint_{\sigma_{k,\tau}} d\mu_\tau\, f_{jk}(\tau;\mu_{k,\tau},w_{k,\tau})\int_{\mu^0_{k,\tau}}^{\mu_{k,\tau}(\varphi_\tau;\gamma)} d\lambda w_{k,\tau}(\lambda;h_\tau(\gamma))\,(1-\delta_{ks})\right]_{j,k=\overline{1,n}}, \tag{1.23}$$

$$K_\tau = \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau \det[f(\tau;\mu_\tau,w_\tau)] = \det\left[\oint_{\sigma_\tau} d\mu\, f_{jk}(\tau;\mu,w_{k,\tau})\right]_{j,k=\overline{1,n}}.$$

Всі підінтегральні вирази у формулах (1.23) є відомими, згідно з [11], величина $\frac{\partial}{\partial\tau}\langle S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}}$, згідно з (1.22), — цілком визначена функція повільної змінної $\tau=\varepsilon t\in R/2\pi Z$ та параметра $\gamma\in R^n$. З іншого боку, функція $\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma)$, $\varphi_\tau\in T^n_{\gamma,\tau}$, $t\in R$, може бути визначена методом характеристик [16] в явному вигляді:

$$\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma) = \int_0^t H^{(1)}(s,\gamma)ds -$$

$$-\int_0^t ds\frac{\partial S'_\tau\left(\int_0^s \omega_1(\varepsilon s)ds+\varphi^0_\tau,\ \gamma\right)}{\partial\tau} + \overline{\Phi}_1(\varphi^0_{j,\tau},\gamma); \tag{1.24}$$

де $\tau=\varepsilon s\in R/2\pi Z$, $\overline{\Phi}_1: T^*(T^n_{\gamma,\tau})\to R$ — деяка, поки що невідома, початкова функція, причому при виконанні інтегрування за параметром $s\in R$ в кінцевому результаті необхідно покласти

$$\varphi^0_{j,\tau} = \varphi_{j,\tau}-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau d\tau\omega_{1j}(\tau). \tag{1.25}$$

Оскільки вираз для $\frac{\partial S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)}{\partial\tau}$, $\varphi_\tau\in T^n_{\gamma,\tau}$, вважаємо, згідно з (1.22), відомим, то формулу (1.24) можна підставити у вираз (1.18) для визначення $H^{(1)}(t;\gamma)$, $t\in R$:

$$H^{(1)}(t;\gamma) = \frac{\partial}{\partial\tau}\langle S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} + \left\langle\frac{\partial S'_\tau(\varphi_{j,\tau},\gamma)}{\partial\tau}\right\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} +$$

$$+\ \omega_{1j}(\tau)\int_0^t ds\left\langle \frac{\partial^2 S'_\tau\left(\varphi_\tau-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon s}^{\varepsilon t} d\tau\,\omega_1(\tau),\ \gamma\right)}{\partial\tau\,\partial\varphi_{j\tau}}\right\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}} +$$

$$+\ \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \overline{\Phi}_1\left(\varphi_\tau-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau d\tau\,\omega_1(\tau),\ \gamma\right)\right\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}}. \tag{1.26}$$

Виконуючи операцію усереднення $\langle\ldots\rangle^{T^n_{\gamma,\tau}}$ в (1.24), одразу ж знаходимо, що (1.26) — тотожність для будь-якої диференційовної функції $\overline{\Phi}_1 : T^*(T^n_{\gamma,\tau}) \to \to R$. Це означає, що цю початкову умову можна вибрати, зокрема, нульовою, що й надалі будемо вважати виконаним, тобто $\overline{\Phi}_1 \equiv 0$ на $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$. Щоб рівняння для кутової змінної $\varphi \in T^n_\gamma$ виконувалось з точністю $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$, покладемо функцію $H_1(t;\tau)$ в (1.24) рівною нулеві, що дає на T^n_γ таке рівняння:

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = w_{1j}(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad j=\overline{1,n}. \tag{1.27}$$

Це, очевидно, означає, що в термінах кутових змінних (1.25) еволюція динамічної системи (1.2) буде квазістаціонарною, оскільки з точністю $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon\to 0$,

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = O(\varepsilon^2), \tag{1.28}$$

для всіх $j=\overline{1,2}$. Щоб рівності (1.27) були правильними для всіх $t\in R$, необхідно, щоб динамічна система (1.9) на просторі $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$ допускала для всіх $t\in R$ обмежені розв'язки за $\bmod (R/2\pi Z)^n$. Необхідною умовою існування таких розв'язків є, очевидно, невиродженість матриці $\{w_{j,k}(\tau):\ j,k=\overline{1,n}\}$, тобто $\det[\omega(\tau)]\neq 0$ для параметра $\tau\in R/2\pi Z$. Щоб існували на інтегральному многовиді гамільтонової системи (1.2) квазілінійні координати з простору $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$, необхідно, щоб була визначена для всіх $t\in R$ гладко диференційовна породжуюча функція (1.24), де ми вважаємо, що $H_1(t;\tau)\equiv 0$ для всіх $t\in \in R$. В цьому випадку для функції $\Phi_1 : R\times T^*(T^n_{\gamma,\tau})\to R$ згідно з (1.24) отримуємо такий вираз:

$$\Phi_1(t;\varphi_\tau,\gamma) = -\int_0^t ds\,\frac{\partial S'_\tau\left(\varphi_{j,\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon t}^{\varepsilon s} d\tau\,\omega(\tau),\ \gamma\right)}{\partial\tau}, \tag{1.29}$$

де функція $S'_\tau(\varphi_\tau,\gamma)$ задана неявно виразом (1.3). Зауважимо, що умова $\det[\omega(\tau)]\neq 0$, $\tau\in R/2\pi Z$, випливає також з необхідності локального дифеоморфізму (1.20) координатних систем $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$ та $T^*(\Gamma^n_h)$ на карті кодотичного многовиду $T^*(M^n_{h,\tau})$. При додаткових умовах на алгебраїчні криві [11] функція (1.29) є гладко диференційовною на $T^*(T^n_{\gamma,\tau})$ для всіх $\varepsilon\le\varepsilon_0$, де $\varepsilon_0>0$ —

деяке фіксоване число, залежне від розміщення алгебраїчних особливостей на ріманових поверхнях $\Gamma_{h,\tau}^{n_j}$, $n_j = n$, $j = \overline{1,n}$, відповідних функціям з [11]. Враховуючи (1.28), можемо стверджувати, що при цих умовах на алгебраїчні криві [11] адіабатично збурена гамільтонова система (1.2) має так звані адіабатичні інваріанти [1].

Визначення 1.1. *Функція* $\gamma\colon (R/2\pi Z)\times T^*(R^n)\to R$ *називається адіабатичним інваріантом динамічної системи* (1.2), *якщо для будь-якого* $\rho > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho) > 0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0(\rho))$

$$\sup_{t\in(0,1/\varepsilon)} \left|\gamma(\tau; q(t), p(t)) - \gamma(0; q^{(0)}, p^{(0)})\right| < \rho. \tag{1.30}$$

Визначення 1.2. *Функція* $\gamma : (R/2\pi Z)\times T^*(R^n)\to R$ *називається майже адіабатичним інваріантом (або квазіадіабатичним інваріантом) динамічної системи* (1.2), *якщо для будь-якого* $\rho > 0$ *і кожного компакту* $K\subset T^*(R^n)$

$$\operatorname*{mes}_{t\in(0,1/\varepsilon)} \Big\{(q^{(0)}, p^{(0)}) \in T^*(R^n)\cap K : \\ \sup_{t\in(0,1/\varepsilon)} \left|\gamma(\tau; q(t), p(t)) - \gamma(0; q^{(0)}, p^{(0)})\right| > \rho\Big\} = o(\varepsilon) \tag{1.31}$$

при $\varepsilon\to 0$.

Базуючись тепер на висновках стосовно формул (1.28), (1.29) та рівнянь (1.9), можемо сформулювати наступне твердження.

Твердження 1.1. *Адіабатично збурена цілком інтегровна гамільтонова система* (1.2) *на* $T^*(R^n)$ *має адіабатичні інваріанти* $\gamma_j\colon (R/2\pi Z)\times T^*(R^n)\to \to R$, $j=\overline{1,n}$, *якщо повний частотний базис* $\omega(\tau)\in \operatorname{Mat}(R^n)$ *є невиродженим, тобто* $\det\omega(\tau)\neq 0$ *для всіх* $\tau\in R/2\pi Z$, *а також виконані певні умови регулярності для алгебраїчних функцій* [11] *та обмеженої диференційовності усередненого виразу* (1.22). *Зокрема, необхідно невиродженою є детермінантна величина* (1.23) *для всіх* $\tau\in R/2\pi Z$.

При дещо слабших умовах регулярності на параметри алгебраїчних функцій [11] динамічна система (1.2) може мати тільки квазіадіабатичні інваріанти, що вимагає додаткового аналізу для конкретно заданого адіабатичного збурення [4 – 10].

2. Адіабатичні інваріанти повільно збуреної гамільтонової системи Хенон – Хейлеса. Нехай на $T^*(R^2)$ задана наступна гамільтонова система Хенон – Хейлеса [17, 10]:

$$\frac{dq_j}{dt} = p_j, \quad \frac{dp_1}{dt} = -aq_2^2 - 6aq_1^2 - \overline{\omega}_1^2 q_1 + b, \\ \frac{dp_2}{dt} = -2aq_1q_2 - \overline{\omega}_2^2 q_2, \tag{2.1}$$

де $(q;p)\in T^*(R^2)$, $\overline{\omega}_j\in R_+$, $j=\overline{1,2}$, — деякі частоти коливань і параметри $a, b\in C^2(R/2\pi Z; R)$ — повільно змінні функції параметра $\tau := \varepsilon t\in R/2\pi Z$, $\varepsilon\to 0$ — малий параметр. При фіксованому параметрі $\tau\in R/2\pi Z$ динамічна система (2.1), крім функції Гамільтона $H := H_1 \in D(T^*(R^2))$:

$$H_1 := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(p_j^2 + \overline{\omega}_2^2 q_j^2\right) + aq_1q_2^2 + 2aq_1^3 - bq_1, \tag{2.2}$$

має ще один інволютивний відносно канонічної симплектичної структури $\Omega^{(2)} = \sum_{j=1}^{2} dp_j \wedge dq_j \in \Lambda^2(T^*(R^n))$ інваріант $H_2 \in D(T^*(R^2))$:

$$H_2 := q_2^4 + 4aq_1^2q_2^2 + 4\overline{\omega}_1^2 aq_1q_2^2 + \frac{1}{a}\overline{\omega}_1^2(4\overline{\omega}_1^2 - \overline{\omega}_2^2)q_2^2 +$$
$$+ \left[(4\overline{\omega}_1^2 - \overline{\omega}_2^2)/a - 4q_1\right]p_2^2 + 4q_2p_1p_2 - 2bq_2^2,$$

тобто для всіх $(p, q) \in T^*(R^2)$ відповідна дужка Пуассона $\{H_1, H_2\} = 0$. Динамічна система (2.1) є, очевидно, алгебраїчно-поліноміального типу, описаного в [11], що дає можливість застосувати розвинутий тут метод дослідження її інтегральних многовидів та їх адіабатичних деформацій. Побудову явного відображення вкладення $\pi_h\colon M_h \to T^*(R^2)$ було виконано вперше в роботі [8], а саме, відображення $\pi_h\colon M_h \to T^*(R^2)$ було вперше запропоновано без обгрунтування в [10] на основі аналізу зв'язку цієї системи з так званими скінченно-вимірними редукціями динамічної системи Кортевега – де Фріза.

А. Враховуючи факт [10], що гамільтонова система (2.1) може бути ізоморфно відображена на $T^*(R^2)$ до гамільтонової системи (2.1) при частотах $\overline{\omega}_j \equiv 0$, $j = \overline{1,2}$, надалі будемо вивчати адіабатичні деформації редукованої динамічної системи при $a = 1/2$:

$$\frac{dq_j}{dt} = p_j, \quad \frac{dp_1}{dt} = -q_2^2/2 - 3q_1^2 + b(\tau),$$
$$\frac{dp_2}{dt} = -q_1q_2, \qquad (2.3)$$

де $(p, q) \in T^*(R^2)$ і $b \in C^2(R/2\pi Z; R)$ — адіабатично змінний параметр.

Система (2.3) є, очевидно, гамільтоновою з гамільтоніаном

$$H_1 := H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} p_j^2 + \frac{1}{2}q_1q_2^2 + q_1^3 - b(\tau)q_1 \qquad (2.4)$$

і з інволютивним інваріантом

$$H_2 := \frac{1}{2}q_2^4 + 2q_1^2q_2^2 + 4q_2p_1p_2 - 2q_2^2b(\tau). \qquad (2.5)$$

Застосовуючи послідовно до (2.3) метод знаходження відображення вкладення інваріантного многовиду $M_{h,\tau} := \{H_j = h_{j,\tau} \in R : j = \overline{1,2}\}$ в фазовий простір $T^*(R^2)$, після нескладних обчислень знаходимо наступні характеристичні співвідношення, описані в [11]:

$$\frac{\partial w_{j,\tau}(\mu_{j,\tau}; h_{j,\tau})}{\partial h_{k,\tau}} = f_{k,j}(\tau; \mu_j, w_j), \qquad (2.6)$$

де для $j, k = \overline{1,2}$

$$f_{11}(\tau; \mu_{1,\tau}, w_{1,\tau}) = \frac{1}{\mu_{1,\tau} w_{1,\tau}}, \quad f_{22}(\tau; \mu_{2,\tau}, w_{2,\tau}) = \frac{1}{\mu_{2,\tau}},$$
$$f_{21}(\tau; \mu_{1,\tau}, w_{1,\tau}) = \frac{1}{w_{1,\tau}}, \quad f_{12}(\tau; \mu_{2,\tau}, w_{2,\tau}) = \frac{1}{\mu_{2,\tau} w_{2,\tau}}, \qquad (2.7)$$

причому співвідношення (2.6) реалізуються при таких симетричних алгебраїчних виразах локального відображення вкладення $\overline{\pi}_\tau : M_{h,\tau}^2 \to R^2 \subset T^*(R^2)$:

$$q_1 = \mu_{1,\tau} + \mu_{2,\tau}, \quad q_2^2 = -4\mu_{1,\tau}\mu_{2,\tau}. \tag{2.8}$$

Згідно з [11] маємо також такий набір рівностей для вкладення $\pi_\tau : M_{h,\tau}^n \to \to T_q^*(R^2)$:

$$p_1 = \sqrt{-\mu_{1,\tau}\mu_{2,\tau}}\left(\frac{w_{1,\tau} - w_{2,\tau}}{\mu_{1,\tau} - \mu_{2,\tau}}\right), \quad p_2 = \frac{w_{1,\tau}\mu_{1,\tau} - w_{2,\tau}\mu_{2,\tau}}{\mu_{1,\tau} - \mu_{2,\tau}}. \tag{2.9}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.7), легко знаходимо

$$\begin{gathered} w_{1,\tau}^2 = \frac{2}{\lambda}\left(h_{1,\tau}\lambda + \xi_{1,\tau}(\lambda)\right), \\ w_{2,\tau}^2 = \frac{2}{\lambda}\left(h_{1,\tau}\lambda + \xi_{2,\tau}(\lambda)\right), \end{gathered} \tag{2.10}$$

де параметр $\lambda \in C$ і $\xi_{j,\tau}: C \to C$, $j = \overline{1,2}$, — деякі сталі алгебраїчні функції. Підставляючи вирази (2.8) та (2.9) у відповідні вирази для величин $h_{1,\tau} = H_1$ та $h_{2,\tau} = H_2$ на інтегральному многовиді $M_{h,\tau}^2$, знаходимо вираз для функцій $\xi_{j,\tau}(\lambda)$, $j = \overline{1,2}$, $\lambda \in C$:

$$\xi_{1,\tau} = \xi_{2,\tau} = -\lambda^4 + b(\tau)\lambda^2. \tag{2.11}$$

Це означає, виходячи з (2.10), що існує ріманова поверхня $\Gamma_{h,\tau}^2$ алебраїчного другого роду, яка є майже скрізь атласом на інтегральному многовиді $M_{h,\tau}^2$, причому в координатах кодотичного простору $T^*(\Gamma_{h,\tau}^2 \times \Gamma_{h,\tau}^2)$, локально дифеоморфного кодотичному простору $T^*(M_{h,\tau}^2)$. відповідне відображення $\overline{\pi}_{h,\tau}$: $T^*(\Gamma_{h,\tau}^2 \times \Gamma_{h,\tau}^2) \to T^*(R^2)$ є канонічно симплектичним, тобто $\Omega^{(2)} = \overline{\pi}_{h,\tau}^*\Omega^{(2)}$. Будуючи далі породжуючу функцію цього канонічного перетворення [11], знаходимо

$$t_\tau = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mu_{j,\tau}^0}^{\mu_{j,\tau}} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\lambda\left(h_{1,\tau} + h_{2,\tau}\lambda + b(\tau)\lambda^2 - \lambda^4\right)}}, \tag{2.12}$$

де $\mu_{j,\tau}^0 \in \Gamma_{h,\tau}^2$, $j = \overline{1,2}$, — деякі початкові параметри еволюції гамільтонової системи (2.3) на $T^*(R^2)$.

При цьому, в термінах канонічних змінних $(\mu_{j,\tau}, w_{j,\tau}) \in T^*(\Gamma_{h,\tau}^2)$, якими розшаровано симплектичний простір $T^*(R^2)$, параметри вкладення $h_{1,\tau}$ і $h_{2,\tau} \in D(T^*(\Gamma_{h,\tau}^2 \times \Gamma_{h,\tau}^2))$ мають вигляд

$$\begin{gathered} h_{1,\tau} = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2}\mu_{j,\tau}\left(w_{j,\tau}^2 + 2\mu_{j,\tau}^3\right) / \prod_{i\neq j}^{2} (\mu_{j,\tau} - \mu_{i,\tau}) - b(\tau)\sum_{j=1}^{2} \mu_{j,\tau}, \\ h_{2,\tau} = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2}\left(w_{j,\tau}^2 + 2\mu_{j,\tau}^3\right) / \prod_{i\neq j}^{2} \left(\mu_{j,\tau}^{-1} - \mu_{i,\tau}^{-1}\right) + b(\tau)\sum_{j=1}^{2} \mu_{j,\tau}, \end{gathered} \tag{2.13}$$

який дає можливість легко виписати відповідні рівняння на многовиді $T^*(M^2_{h,\tau})$ в координатах атласу $T^*(\Gamma^2_{h,\tau}\times\Gamma^2_{h,\tau})$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_{j,\tau}}{dt_\tau} &= \frac{\partial H_1}{\partial w_{j,\tau}},\\ \frac{dw_{j,\tau}}{dt_\tau} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \mu_{j,\tau}},\end{aligned}\tag{2.14}$$

де точки $(\mu_{j,\tau}, w_{j,\tau})\in T^*(\Gamma^2_{h,\tau})$, $j=\overline{1,2}$, причому на $\Gamma^2_{h,\tau}\times\Gamma^2_{h,\tau}$ виконуються співвідношення

$$w_{j,\tau}(\mu_{j,\tau})-\frac{2}{\mu_{j,\tau}}\left(h_{1,\tau}+h_{2,\tau}\mu_{j,\tau}+b(\tau)\mu^2_{j,\tau}-\mu^4_{j,\tau}\right) = 0.\tag{2.15}$$

Б. Розглянемо тепер наступне узагальнення гамільтонової системи Хенон – Хейлеса на $T^*(R^2)$, виписане в [10]:

$$\begin{aligned}\frac{dq_j}{dt} = p_j,\quad \frac{dp_1}{dt} &= -q_2^2/2-3q_1^2,\\ \frac{dp_2}{dt} &= -q_1q_2+bq_2^{-3},\end{aligned}\tag{2.16}$$

де $(p,q)\in T^*(R^2)$ і параметр $b\in C^2(R/2\pi Z;R)$ — адіабатично залежний від $\tau:=\varepsilon t\in R/2\pi Z$, $\varepsilon\to 0$. Відповідна пара інволютивних інваріантів $H_1 = H$, $H_2\in D(T^*(R^2))$ задається при сталому параметрі $\tau\in R/2\pi Z$ в наступному поліноміально-раціональному вигляді:

$$\begin{aligned}H_1 &:= \sum_{j=1}^{2}p_j^2+q_1q_2^2+2q_1^3+b(\tau)q_2^{-2},\\ H_2 &:= -\frac{1}{4}q_2^4-q_1^2q_2^2-2q_2p_1p_2+2q_1q_2^{-2}b(\tau)+2q_1p_2^2.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Для гамільтонової системи (2.16), використовуючи інваріанти (2.17), методами з [11] знаходимо рівняння для знаходження явного вигляду канонічних координат $(w_{j,\tau},\mu_{j,\tau})\in\Gamma^2_{h,\tau}$, $j=\overline{1,2}$, в деякому околі інтегрального многовиду $M^2_{h,\tau}$:

$$\frac{\partial w_{j,\tau}(\mu_{j,\tau})}{\partial h_{1,\tau}} = \frac{2}{\mu_{j,\tau}w_{j,\tau}},\quad \frac{\partial w_{j,\tau}(\mu_{j,\tau})}{\partial h_{2,\tau}} = \frac{2}{w_{j,\tau}},\quad j=\overline{1,2},\tag{2.18}$$

причому рівняння (2.18) реалізуються лише за умови вкладення $\overline{\pi}_\tau: M^2_{h,\tau}\to \to R^2\subset T^*(R^2)$:

$$q_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\mu_{j,\tau},\quad q_2^2 = -\prod_{j=1}^{2}\mu_{j,\tau},\tag{2.19}$$

яке продовжується канонічно на многовид $T^*(R^2)$ в такому вигляді:

$$p_1 = 2\sqrt{-\mu_{1,\tau}\mu_{2,\tau}}\,\frac{w_{1,\tau}-w_{2,\tau}}{\mu_{1,\tau}-\mu_{2,\tau}},\quad p_2 = 2\,\frac{\mu_{1,\tau}w_{1,\tau}-\mu_{2,\tau}w_{2,\tau}}{\mu_{1,\tau}-\mu_{2,\tau}}\tag{2.20}$$

для всіх координат $(w_{j,\tau}, \mu_{j,\tau}) \in T^*(\Gamma^2_{h,\tau})$, $j = \overline{1,2}$, що задають атлас на $T^*(M^2_{h,\tau})$.

Як результат явного вкладення (2.19) і (2.20) многовиду $M^2_{h,\tau}$ в $T^*(R^2)$ знаходимо з (2.18) та виразів (2.17) наступні рівняння для алгебраїчних функцій [11]:

$$w^2_{j,\tau} = 4\lambda^{-1}\left(b(\tau)\lambda^{-1} + h_{1,\tau} + h_{2,\tau}\lambda - 14\lambda^4\right), \quad j = \overline{1,2}, \tag{2.21}$$

які однозначно задають ріманову поверхню $\Gamma^2_{h,\tau}$. При цьому, в координатах простору $T^*(\Gamma^2_{h,\tau})$, інваріанти (2.17) як параметри вкладення мають вигляд

$$\begin{gathered} h_{1,\tau} = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{4}\mu_{j,\tau}\left(16w^2_{j,\tau} + 2\mu^3_{j,\tau}\right) / \prod_{i\neq j}^{2} \left(\mu_{j,\tau} - \mu_{i,\tau}\right) - b(\tau)\sum_{j=1}^{2}\mu^{-1}_{j,\tau}, \\ h_{2,\tau} = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{4}\left(16w^2_{j,\tau} + \mu^3_{j,\tau}\right) / \prod_{i\neq j}^{2} \left(\mu^{-1}_{j,\tau} - \mu^{-1}_{i,\tau}\right) + b(\tau)\sum_{j=1}^{2}\mu^{-1}_{j,\tau}. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Відповідна еволюція (2.16) на інтегральному многовиді $M^2_{h,\tau}$ в координатах $T^*(\Gamma^2_{h,\tau} \times \Gamma^2_{h,\tau})$ задається тепер рівнянням

$$t_\tau = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mu^0_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda\left(h_{1,\tau} + h_{2,\tau}\lambda + b(\tau)\lambda^{-1} - 14\lambda^4\right)}}, \tag{2.23}$$

де $\mu^0_{j,\tau} \in \Gamma^2_{h,\tau}$, $j = \overline{1,2}$, — деякі початкові параметри. Із зображення (2.23), зокрема, одразу ж бачимо, що еволюція на інтегральному многовиді здійснюється за квазіперіодичним по $t_\tau \in R$ законом. При цьому область деформації параметра $b \in R$ (як сталої величини) визначається виключно умовами компактності відповідного дійсного тора T^2_C, який ізоморфний абелевому многовиду $J(\Gamma^2_{h,\tau})$ ріманової поверхні $\Gamma^2_{h,\tau}$ [18].

Використовуючи отримані вище явні аналітичні вирази для цілком інтегровних систем типу Хенон – Хейлеса (2.3) і (2.16), легко отримати вирази для їх адіабатичних інваріантів $\gamma_j \in D(T^*(R^2))$, $j = \overline{1,2}$, як функціонали, що випливають з (1.12):

$$\gamma_j = \gamma_{j,\tau} - \varepsilon\frac{\partial\Phi_1(\varphi_\tau, \gamma)}{\partial\varphi_{j,\tau}} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.24}$$

Тут, за визначенням з [11],

$$\gamma_{j,\tau} := \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma_{j,\tau}} w_{k,\tau}(\lambda; h_\tau)\, d\lambda, \quad \sigma_{j,\tau} \in H_1(\Gamma^2_{h,\tau}; Z), \quad j = \overline{1,2}, \tag{2.25}$$

— базис одновимірної групи гомологій $H_1(\Gamma^2_{h,\tau})$ многовиду $\Gamma^2_{h,\tau}$, а породжуюча функція $\Phi_1 : T^*(T^2_{\gamma,\tau}) \to R$ визначається явним виразом (1.29), отриманим раніше. Оскільки, згідно з (1.28), адіабатичні інваріанти задовольняють умову

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0, \quad j = \overline{1,2}, \tag{2.26}$$

для знаходження їх аналітичного виразу в термінах координат простору

$T^*(R^2)$ є достатнім, очевидно, розв'язати з точністю $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, рівняння (2.24) відносно змінних $\gamma_j \in R$, $j = \overline{1,2}$. Розв'язуючи його ітераційно з точністю $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, з (2.24) отримуємо

$$\gamma_j = \gamma_{j,\tau} - \varepsilon \frac{\partial \Phi_1(\varphi_\tau, \gamma_\tau)}{\partial \varphi_{j,\tau}} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, \quad (\varphi_\tau, \gamma_\tau) \in T^*(T^n_{\gamma,\tau}). \tag{2.27}$$

При цьому, очевидно, повинні виконуватись умови твердження 1.1, накладені на базис частот $\omega_{j,i}(\tau)$, $j, i = \overline{1,2}$, а також на ріманову поверхню $\Gamma^2_{\gamma,\tau}$, які б забезпечили дійсність частотного базису для всіх значень параметра $\tau \in R/2\pi Z$, що у свою чергу пов'язане з областю зміни адіабатичних параметрів $a, b \in \in C^2(R/2\pi Z; R)$ відносно параметрів вкладення інтегрального многовиду $M^2_{h,\tau}$ в $T^*(R^2)$. Зокрема, враховуючи невиродження частотного базису на торі $T^2_{\gamma,\tau}$, легко знайти необхідну умову на коефіцієнти ріманових поверхонь задач Хенона – Хейлеса А та Б. А саме, для випадку А маємо забезпечити умову неіснування спільних коренів рівняння $w_\tau(\lambda) = 0$, $w'_\tau(\lambda) = 0$, де $w_\tau(\lambda) = h_{1,\tau} + h_{2,\tau}\lambda + b(\tau)\lambda^2 - \lambda^4$, $\tau = \varepsilon t \in R/2\pi Z$. Як результат отримуємо, що величина

$$\bar{\lambda}_\tau = \frac{-3h_{2,\tau} \pm \sqrt{9h^2_{2,\tau} - 32h_1 b(\tau)}}{4b(\tau)} \tag{2.28}$$

не задовольняє рівняння $w_\tau(\bar{\lambda}) = 0$, тобто виконується нерівність

$$\bar{\lambda}^4_\tau - \bar{\lambda}^2_\tau b(\tau) - h_{2,\tau}\bar{\lambda}_\tau - h_{1,\tau} \neq 0 \tag{2.29}$$

для заданих значень $h_{1,\tau}, h_{2,\tau} \in R$ (які визначаються точно вибором даних Коші для гамільтонової системи (2.3)). Крім цього, з умови (2.8) випливає, що рівняння $w_\tau(\lambda) = 0$, $\lambda \in C$, повинно мати лише строго комплексні корені, а це дає таку додаткову умову: при $b(\tau) \neq 0$, $\tau \in R/2\pi Z$

$$h^2_{2,\tau} \geq \frac{32}{9} b h_{1,\tau}. \tag{2.30}$$

Аналогічного типу умови легко виписати також для випадку Б. А саме, величина

$$\bar{\lambda}_\tau = \frac{-2h_{1,\tau} \pm \sqrt{4h_{1,\tau} - 15h_{2,\tau} b(\tau)}}{6h_{2,\tau}} \tag{2.31}$$

не задовольняє рівняння $w_\tau(\bar{\lambda}) = 0$, де

$$w_\tau(\lambda) = 4\lambda^{-1}\left(-14\lambda^4 - \lambda^{-1} b(\tau) + h_{2,\tau}\lambda + h_{1,\tau}\right) \tag{2.32}$$

для всіх $\tau \in R/2\pi Z$. Крім цього, умова строгої комплексності коренів рівняння $w_\tau(\lambda) = 0$, $\lambda \in C$, дає аналогічне до (2.31) обмеження на $h_{j,\tau} \in R$, $j = \overline{1,2}$, яке не виписуємо.

Проаналізуємо тепер структуру алгебраїчних функцій (2.10) та (2.21), які задають сепарабельні координати на розшаруванні $T^*(M^2_{h,\tau})$ адіабатично збурених гамільтонових систем типу Хенона – Хейлеса (2.3) та (2.16) відповідно. Їх спільною рисою, як легко бачити, є наявність адіабатичного параметра $b(\tau)$, $\tau \in R/2\pi Z$, в формі адитивного коефіцієнта до параметрів вкладення $h_{j,\tau} \in$

$\in R$, $j=\overline{1,2}$, інтегрального многовиду $M^2_{h,\tau}$ в $T^*(R^2)$. Оскільки кожному параметру алгебраїчних функцій (2.10), (2.21) може бути поставлений у відповідність канонічно спряжений параметр еволюції, то існує відповідне тороїдне розширення многовиду $M^2_{h,\tau}$ до нового інтегрального многовиду $M^3_{h,\tau}\in$ $\in T^*(R^3)$, де $h_{0,\tau}=b\in R$ вважається новим параметром вкладення. Отже, ми можемо стандартним шляхом, базуючись на методі з [11], побудувати аналітично відповідне вкладення $\pi_{h,\tau}\colon M^3_{h,\tau}\to T^*(R^3)$, враховуючи характеристичні функції вкладення $f_{j,k}(\tau;\mu_{k,\tau},w_{k,\tau})$, $j,k=\overline{0,2}$, де $(\mu_{k,\tau},w_{k,\tau})\in\Gamma^{n_k}_{h,\tau}$, $k=$ $=\overline{0,2}$. Як результат нескладних обчислень для моделі Хенон – Хейлеса (2.3) отримуємо

$$
\begin{gathered}
f_{11}(\tau;\mu_{1,\tau},w_{1,\tau}) = \frac{1}{\mu_{1,\tau}w_{1,\tau}},\quad f_{22}(\tau;\mu_{2,\tau},w_{2,\tau}) = \frac{1}{w_{2,\tau}},\\
f_{21}(\tau;\mu_{1,\tau},w_{1,\tau}) = \frac{1}{w_{1,\tau}},\quad f_{12}(\tau;\mu_{2,\tau},w_{2,\tau}) = \frac{1}{\mu_{2,\tau}w_{2,\tau}},\\
f_{01}(\tau;\mu_{1,\tau},w_{1,\tau}) = \frac{\mu_{1,\tau}}{w_{1,\tau}},\quad f_{02}(\tau;\mu_{2,\tau},w_{2,\tau}) = \frac{\mu_{2,\tau}}{w_{2,\tau}},
\end{gathered}\tag{2.33}
$$

$w_{0,\tau}\equiv 0$ на $T^*(M^3_{h,b})$, де ми врахували, що відповідне вкладення $\overline{\pi}\colon M^3_{h,\tau}\to$ $\to R^2\times R^2\subset T^*(R^3)$ не залежить явно від параметрів розширення $(s_\tau, b)\in$ $\in T^*(R)$ фазового простору $T^*(R^2)$, що випливає з комутативності дужок Пуассона $\{H_j, b\}=0$, $j=\overline{1,2}$. Як результат розв'язку рівнянь (2.33) та явної форми інваріантів (2.13) знаходимо, що алгебраїчні функції [11], які задають сепарабельний атлас на кодотичному многовиді $T^*(M^3_{h,\tau})$, задаються виразами (2.10), причому для параметра еволюції $s_\tau\in R$ за допомогою звичайних еліптичних інтегралів на рімановій поверхні $\Gamma^2_{h,\tau}$ знаходимо такий явний вираз:

$$
\begin{aligned}
s_\tau &= \frac{\partial S_\tau(\mu;h,b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mu^0_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}} w_{j,\tau}(\lambda;h,b)\,d\lambda = \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mu^0_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}}\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{2\lambda\left(h_{1,\tau}+h_{2,\tau}\lambda+b(\tau)\lambda^2-\lambda^4\right)}}.
\end{aligned}\tag{2.34}
$$

При цьому, очевидно, многовид $M^3_{h,b}=M^2_{h,\tau}\times R_b$ для всіх $h,b\in R^3$, тобто інтегральний многовид $M^3_{h,\tau}$ є дійсно дифеоморфним тору T^2 при описаних вище додаткових умовах, що накладаються на параметри вкладення $h,b\in R^3$.

Щоб розвинути описану вище схему аналізу динамічних систем Хенон – Хейлеса для випадку їх адіабатичного збурення параметром $b\in C^2(R/2\pi Z;$ $R)$, потрібно побудувати ефективний новий нетривіальний інваріант $H_0\in$ $\in T^*(R^3)$ в інволюції до інваріантів $H_j\in T^*(R^3)$, $j=\overline{1,2}$, на розширеному фазовому просторі $T^*(R^3)$.

Оскільки побудова точного інваріанта $H_0\in T^*(R^3)$ — досить нетривіальна задача, рівнозначна побудові адіабатичного інваріанта високого порядку точності, то скористаємось конструкцією з [8], яка дає можливість зобразити інтегральний многовид $M^2_{h,\tau} \subset T^*(R^2)$ як ізотропну редукцію з фазового простору $T^*(R^3)$ цілком інтегровної гамільтонової системи типу Хенона – Хейлеса відносно симплектичної структури:

$$\Omega_0^{(2)} = \sum_{j=1}^{2} dp_j \wedge dq_j + db \wedge ds. \tag{2.35}$$

Розширена гамільтонова система на фазовому просторі $T^*(R^3)$ має крім інваріантів $H_j \in T^*(R^3)$, $j = \overline{1,2}$, ще один тривіальний інваріант $H_0 = b \in D(T^*(R^3))$, який зредукуємо на фазовий простір $T^*(R^2)$, на якому вже $b = b(\tau)$, $\tau \in R/2\pi Z$. Щоб виконати вказану редукцію, необхідно ввести дві нетривіальні в'язі першого роду [4] на фазовому просторі $T^*(R^3)$, які б враховували *à pridri* вказану вище еволюцію параметра $b \in C^2(R/2\pi Z; R)$ вздовж фактичного векторного поля даної адіабатично збуреної гамільтонової системи. Беручи до уваги, що при $\varepsilon \to 0$ $dt_\tau/dt = 1 + O(\varepsilon)$, можемо, враховуючи вирази (2.12), (2.23), (2.34), покласти

$$\begin{aligned} H_0^{(1)} &= s - s(q,p;b), \\ H_0^{(2)} &= b - b(\varepsilon t_\tau(qp;b)), \end{aligned} \tag{2.36}$$

де $H_0^{(1)} = 0$, $H_0^{(2)} = 0$, для всіх точок $(q,p;s,b) \in M^2_{h,h'}$ інтегрального многовиду $M^2_{h,h'}$. Оскільки в'язі (2.36) — ізотропно вироджені, тобто величина

$$\left\{H_0^{(1)}, H_0^{(2)}\right\} = 1 - \varepsilon b'(\tau)\frac{\partial t_\tau}{\partial b} \simeq O(\varepsilon^2) \tag{2.37}$$

рівна нулю при $\varepsilon \to 0$, то можемо виконати стандартну ізотропну редукцію многовиду $T^*(R^3)$ на $T^*(R^2)$ і таким чином описати гамільтонову систему в натуральних змінних $(q;p) \in T^*(R^2)$. Відповідно до накладення в'язей (2.36) на $T^*(R^3)$ необхідно розширити інваріанти $H_j \to H'_j \in D(T^*(R^3))$, $j = \overline{1,2}$, за правилом

$$H'_j := H_j + \sum_{k=1}^{2} \xi_k^{(j)} H_0^{(k)}, \tag{2.38}$$

де $\xi_k^{(j)} \in R$, $j,k = \overline{1,2}$, — так звані множники Лагранжа, які однозначно знаходяться з умови

$$\left\{H'_j, H_0^{(k)}\right\} = 0 \tag{2.39}$$

для всіх $j,k = \overline{1,2}$. Враховуючи той факт, що з точністю до $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, функції H_0^j, $H_0^{(k)}$, $j,k = \overline{1,2}$, на фазовому просторі $T^*(R^3)$ є в інволюції, можемо застосувати до симплектичної структури (2.35) та інваріантів (2.36), (2.38) схему дослідження вкладення інваріантного многовиду $M^2_{h,h'}$ в $T^*(R^3)$, і таким чином побудувати відповідні алгебраїчні функції, які задаватимуть майже скрізь його координатний атлас.

Як показують розрахунки для конкретної моделі типу Хенон – Хейлеса, запропонована вище схема дослідження адіабатичних інваріантів фактично еквівалентна методу канонічних перетворень, описаному в [11].

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
2. *Duistermaat J. J.* On global action-angles // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – **33**. – P. 687 – 706.
3. *Нехорошев Н. Н.* Переменные действие-угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1972. – **26**. – С. 181 – 198.
4. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нехорошев А. Н.* Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Сер. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 3. – 213 с.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
6. *Годбийон В.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. – М.: Мир, 1960. – 127 с.
7. *Прикарпатський А. К., Притула М. М., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем. – Київ: УМК ВО, 1988. – 86 с.
8. *Копич М. І., Прикарпатський Я. А., Самуляк Р. В.* Адіабатичні інваріанти узагальненої гамільтонової системи Хенон – Хейлеса та структура хаотичного руху // Допов. НАН України. – 1997. – № 2. – С. 32 – 36.
9. *Ercolani N., Siggia E. D.* Painleve property and geometry // Physica D. – 1989. – **34**. – P. 303 – 346.
10. *Blaszak M., Wojciechowski-Rauch S.* A generalized Henon – Heiles system and related integrable Newton equations // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 4. – P. 1693 – 1709.
11. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Дослідження інваріантних деформацій інтегральних многовидів адіабатично збурених цілком інтегровних гамільтонових систем. I // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1379 – 1390.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 245 с.
13. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
14. *Самойленко А. М.* Асимптотический метод исследования *m*-частотных колебательных систем // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1366 – 1387.
15. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
16. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 279 с.
17. *Blaszak M.* Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems. – New York: Springer, 1998. – 350 p.
18. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебраических функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 343 с.

Одержано 16.03.99