УДК 517.944

І. В. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. Б. Романенко (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

АПРІОРНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗАДАЧ З КОЕФІЦІЄНТАМИ З СОБОЛЄВСЬКИХ ПРОСТОРІВ

We consider the general initial boundary value problem for a linear parabolic equation of arbitrary even order in the anisotropic Sobolev spaces. We prove the existence and uniqueness of the solution and establish a priori estimate for it.

Розглянуто загальну початково-крайову задачу для лінійного параболічного рівняння довільного парного порядку в анізотропних соболєвських просторах. Доведено існування, єдиність розв'язку та апріорну оцінку для нього.

Вступ. В роботі досліджується параболічна задача

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x,t) D^\alpha u = f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$B_j u = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(x,t) D^\beta u = g_j(x,t), \qquad (x,t)\in S_T, \qquad j = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$u(x,0) = h(x), \qquad x\in\Omega, \tag{3}$$

в циліндричній області $Q_T = \Omega\times(0,T)$, де T — довільне додатне число, $\Omega\subset R^n$ — обмежена область з гладкою границею $\partial\Omega$. В (2) $S_T = \partial\Omega\times(0,T)$.

Задача (1) – (3) досліджувалась в роботах багатьох авторів, зокрема В.О. Солонникова [1–3] у випадку коефіцієнтів $a_\alpha(x,t)$, $b_{jb}(x,t)$, що належать певним просторам гельдерових функцій. Зокрема, для таких коефіцієнтів в [1, 2] доведені апріорні оцінки розв'язків задачі (1) – (3) в анізотропних соболєвських просторах.

На відміну від відомих результатів в даній роботі задача (1) – (3) розглядається при слабкій умові гладкості коефіцієнтів $a_\alpha(x,t)$, $b_\beta(x,t)$. А саме, ми припускаємо лише, що ці коефіцієнти належать певним соболєвським просторам.

Одержані результати є основою для введення топологічної характеристики загальної початково-граничної задачі для нелінійних параболічних рівнянь довільного порядку, що буде зроблено в наступній роботі авторів.

Відзначимо, що для параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами з соболєвських просторів апріорні оцінки були отримані одним з авторів в роботах [4, 5] відповідно для граничних умов Діріхле та з похідними першого порядку.

Функціональні простори та допоміжні нерівності. Задача (1)–(3) буде розглядатися в стандартних анізотропних соболєвських просторах [1–3]. Введемо основні позначення для просторів та відповідних норм. Далі m — фіксоване натуральне число.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс з невід'ємними цілими компонентами, $x\in R^n$. Позначимо

$$|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad x^\alpha \overset{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Для $u\colon Q_T\to R$ будемо використовувати позначення

$$D^\alpha u \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u,$$

$$D^k u \overset{\text{def}}{=} \left\{ D^\alpha u : |\alpha| = k \right\}, \ k \ge 0.$$

Для нецілого додатного числа k простором $C^{(k)}(\overline{Q}_T)$ назвемо банахів простір усіх функцій u, що мають неперервні похідні $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u(x,t)$, $|\alpha| + 2ms < k$ при $(x,t) \in \overline{Q}_T$ та скінченну норму

$$\|u\|_{Q_T}^{(k)} = \sum_{|\alpha|+2ms \le [k]} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right|_{Q_T}^{(0)} + |u|_{Q_T}^{(k)},$$

де $|u|_{Q_T}^{(0)} = \max\{|u(x,t)| : (x,t) \in \overline{Q}_T\}$, $[k]$ — ціла частина числа k,

$$|u|_{Q_T}^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|+2ms=[k]} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right|_{x,Q_T}^{(k-[k])} + \sum_{0<k-|\alpha|-2ms<2m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right|_{t,Q_T}^{\left(\frac{k-|\alpha|-2ms}{2m}\right)},$$

$$|u|_{x,Q_T}^{(l)} \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^l} : x, y \in \Omega, \ y, t \in (0,T) \right\}, \quad 0 < l < 1,$$

$$|u|_{t,Q_T}^{(l)} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{|u(x,t)-u(y,\tau)|}{|t-\tau|^l} : x \in \Omega, \ t, \tau \in (0,T), \ t \ne \tau \right\}, \quad 0 < l < 1.$$

При $p > 1$, $k = 2ml$ з натуральним числом l позначимо через $W_p^{(k)}(Q_T)$ банахів простір усіх функцій u, що мають узагальнені похідні $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in L_p(Q_T)$, $|\alpha| + 2ms \le k$ з нормою

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{|\alpha|+2ms \le k} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right\|_{p,Q_T}^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_{p,Q_T} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_{Q_T} |u|^p \, dx dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для додатного нецілого числа k простором $W_p^{(k)}(Q_T)$ назвемо банахів простір усіх функцій u, що мають узагальнені похідні $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in L_p(Q_T)$, $|\alpha| + 2ms \le k$, та скінченну норму

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(k)} = \left\{ \sum_{|\alpha|+2ms<k} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right\|_{p,Q_T}^p + \left(\| u \|_{p,Q_T}^{(k)} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{|\alpha|+2ms=[k]} \left(\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right\|_{x,p,Q_T}^{(k-[k])} \right)^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<k-|\alpha|-2ms<2m} \left(\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right\|_{t,p,Q_T}^{\left(\frac{k-|\alpha|-2ms}{2m}\right)} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{x,p,Q_T}^{(l)} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{\int_0^T dt \iint_{\Omega^2} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|^p}{|x-y|^{n+pl}} dx\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < l < 1,$$

$$\|u\|_{t,p,Q_T}^{(l)} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{\int_\Omega dx \iint_{[0,T]^2} \frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+pl}} dt\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < l < 1.$$

Нехай S — поверхня вимірності $n-1$ у просторі R^n, а $l_0 \geq 0$ — дійсне число. Будемо говорити, що поверхня S належить класу C^{l_0}, якщо існують $\{U_i\}_{i=1}^I$ — скінченний набір відкритих множин та додатне число d з властивостями:

S_1) $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} U_i$;

S_2) для кожного i існують $\xi_i \in S \bigcap U_i$ та прямокутна декартова система координат $\{y\}$ з центром у точці ξ_i такі, що множина $S \bigcap U_i$ у координатній системі $\{y\}$ може бути подана у вигляді $y_n = h_i(y')$, $y' \in D$, де $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, $D = (-d, d)^{n-1}$;

S_3) $h_i \in C^{l_0}(D)$ при кожному i.

Нехай $k > 0$, а границя $\partial\Omega$ області Ω належить до класу C^{l_0}, де $l_0 \geq \max\{k, 1\}$.

Позначимо $D_T(d) \overset{\mathrm{def}}{=} (-d, d)^{n-1} \times (0, T)$, а через $\varphi_i(y)$ перетворення координат із локальної системи $\{y\}$ до координатної системи $\{x\}$. Для довільної функції $u: S_T \to R$ позначимо $u^{(i)}(y',t) \overset{\mathrm{def}}{=} u(\varphi_i(y', h_i(y')), t)$, де $(y',t) \in D_T(d)$, $i = \overline{1, I}$.

Введемо простір $C^{(k)}(S_T)$ як множину усіх функцій $u: S_T \to R$ таких, що $u^{(i)}(y',t) \in C^{(k)}(D_T(d))$, $i = \overline{1, I}$. Норму у цьому просторі можна визначити так:

$$\|u\|_{S_T}^{(k)} \overset{\mathrm{def}}{=} \max\left\{\left\|u^{(i)}\right\|_{D_T(d)}^{(k)} : i = \overline{1, I}\right\}.$$

Визначимо простір $W_p^{(k)}(S_T)$ як множину усіх функцій $u: S_T \to R$ таких, що $u^{(i)}(y',t) \in W_p^{(k)}(D_T(d))$, $i = \overline{1, I}$. Норму у цьому просторі можна визначити таким чином:

$$\|u\|_{p,S_T}^{(k)} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{I} \left\|u^{(i)}\right\|_{p,D_T(d)}^{(k)}.$$

***Зауваження* 1.** Нескладно показати еквівалентність норм просторів $C^{(k)}(S_T)$ та $W_p^{(k)}(S_T)$, що відповідають різним покриттям $\{U_i\}$ границі $\partial\Omega$.

Простір $W_p^{(k)}(\Omega)$ для нецілого k можна розуміти як простір всіх функцій $u(x)$, $x \in \Omega$, таких, що $\tilde{u}(x,t) \in W_p^{(k)}(Q_1)$, де $\tilde{u}(x,t) = u(x)$ для $x \in \Omega$, $t \in (0, 1)$. Норму в $W_p^{(k)}(\Omega)$ можна визначити рівністю $\|u\|_{p,\Omega}^{(k)} = \|\tilde{u}\|_{p,Q_1}^{(k)}$.

Позначимо для цілого числа $\dfrac{k}{2m}$

$$W_p^{(k),0}(Q_T) \overset{\mathrm{def}}{=} W_p^{(k)}(Q_T) \bigcap \left\{u : \frac{\partial^s u}{\partial t^s} = 0,\ 0 \leq s \leq \frac{k}{2m} - 1 \text{ для } x \in \Omega,\ t = 0\right\}.$$

Коректність такого означення обгрунтовує лема 1. Аналогічно можна визначити простір $W_p^{(k),0}(S_T)$.

Позначимо $G_T(R) \stackrel{\text{def}}{=} (-R,R)^n \times (0,T)$, $G_T^{(0)}(R) \stackrel{\text{def}}{=} G_T(R) \bigcap \{x_n = 0\}$.

Лема 1. *Нехай* $u \in W_p^{(k)}(\Omega_T)$, *а* s, α *такі, що* $j = |\alpha| + 2ms < k - 2m/p$, *і нехай* $0 \le \rho \le k - j - 2m/p$, *а* $h \le \min\left\{R^k, T^{k/(2m)}\right\}$. *Тоді існують* $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in W_p^\rho(\Omega)$ *та стала* C, *незалежна від* u, h *і така, що*

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u\right\|_{p,\Omega}^{(\rho)} \le Ch^{1-\frac{j+\rho}{k}-\frac{2m}{kp}}\left(\|u\|_{p,Q_T}^{(k)} + h^{-1}\|u\|_{p,Q_T}\right).$$

Доведення випливає з теорем 3.4, 8.4 роботи [6].

Лема 2. *Нехай* $u \in W_p^{(k)}(G_T(R))$, *а* s, α *такі, що* $j = |\alpha| + 2ms < k$, *і нехай* $h \le \min\left\{R^k, T^{k/2m}\right\}$. *Тоді існують* C_1, C_2, *незалежні від* u, h *і такі, що*:

a) *якщо* $0 \le \rho < k - j$, *то* $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in W_p^{(\rho)}(G_T(R))$ *та*

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u\right\|_{p,G_T(R)}^{(\rho)} \le C_1 h^{1-\frac{j+\rho}{k}}\left(\|u\|_{p,G_T(R)}^{(k)} + \|u\|_{p,G_T(R)}\right);$$

b) *якщо* $0 \le \rho < k - j - \frac{n+2m}{p}$, *то* $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in C^{(\rho)}(G_T(R))$ *та*

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u\right\|_{G_T(R)}^{(\rho)} \le C_2 h^{1-\frac{j+\rho}{k}-\frac{n+2m}{kp}}\left(\|u\|_{p,G_T(R)}^{(k)} + h^{-1}\|u\|_{p,G_T(R)}\right).$$

Доведення випливає з теорем 3.4, 8.4 роботи [6].

Лема 3. *Нехай* $u \in W_p^{(k),0}(G_T(R))$, *а* s, α *такі, що* $j = |\alpha| + 2ms < k$. *Нехай* $T < R^{2m}$. *Тоді існують* C_1, C_2, *незалежні від* u, T *і такі, що*:

a) *якщо* $0 \le \rho < k - j$, *то* $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in W_p^{(\rho)}(G_T(R))$ *та*

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u\right\|_{p,G_T(R)}^{(\rho)} \le C_1 T^{\frac{k}{2m}-\frac{j+\rho}{2m}}\|u\|_{p,G_T(R)}^{(k)};$$

b) *якщо* $0 \le \rho < k - j - \frac{n+2m}{p}$, *то* $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \in C^{(\rho)}(G_T(R))$ *та*

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u\right\|_{G_T(R)}^{(\rho)} \le C_2 T^{\frac{k}{2m}-\frac{j+\rho}{2m}+\frac{n+2m}{2mp}}\|u\|_{p,G_T(R)}^{(k)}.$$

Доведення випливає з леми 2 та застосування нерівності Пуанкаре до другого доданку у дужках з урахуванням того, що можна вибрати $h = T^{\frac{k}{2m}}$.

Лема 4. *Нехай* $u \in W_p^{(k)}(G_T(R)) \cap L_\infty(Q_T)$, $\frac{k}{2m}$ — *ціле, а* $j \in 1, \ldots, k-1$. *Тоді існує* C, *незалежна від* u, T *і така, що при* $r_j = \frac{kp}{j}$ *виконується нерівність*

$$\sum_{|\alpha|+2ms=j} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right\|_{r_j, Q_T}^{r_j} \le C \left\{ \sum_{|\alpha|+2ms=k} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \right\|_{p, Q_T(R)}^{p} \|u\|_{\infty, Q_T}^{r_j - p} + T \|u\|_{\infty, Q_T}^{r_j} \right\}.$$

Доведення випливає з нерівності Ніренберга–Гальярдо [7] після інтегрування її на проміжку $[0, T]$.

Лема 5. *Нехай* $u \in W_p^{(k),0}(G_T(R))$, $\frac{k}{2m}$ — *ціле*, $\frac{n+2m}{p} < k$, *а* $j \in 1, \ldots, k-1$ *і нехай* $T < \min\{R^{2m}, 1\}$. *Тоді існує* C, *незалежна від* u, T *і така, що при* $r_j = \frac{kp}{j}$ *виконується нерівність*

$$\sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u \|_{r_j, G_T(R)}^{r_j} \le C T^{(r_j - p)\left(\frac{k}{2m} - \frac{n+2m}{2mp}\right)} \left(\|u\|_{p, G_T(R)}^{(k)} \right)^{r_j}.$$

Доведення. З пункту b) леми 3 $u \in C(G_T(R))$ і $|u|_{G_T(R)}^{(0)} \le \le C_2 T^{k - \frac{n+2m}{2mp}} \|u\|_{p, G_T(R)}^{(k)}$. Звідси на підставі леми 4 випливає потрібна нерівність.

Лема 6. *Нехай* $u \in W_p^{(k)}(G_T(R))$, $h \le \min\{R^k, T^{k/(2m)}\}$, *а* s, α *такі, що* $j = |\alpha| + 2ms < k - \frac{1}{p}$, $0 \le \rho \le k - j - \frac{1}{p}$. *Тоді* $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \Big|_{x_n = 0} \in W_p^{(\rho)}\left(G_T^{(0)}(R)\right)$ *і*

а) *існує* C_1, *незалежна від* u, h і *така, що*

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \Big|_{x_n=0} \right\|_{p, G_T^{(0)}(R)}^{(\rho)} \le C_1 h^{1 - \frac{j+p}{k} - \frac{1}{kp}} \left(\|u\|_{p, G_T(R)}^{(k)} + h^{-1} \|u\|_{p, G_T(R)} \right);$$

b) *якщо* $u \in W_p^{(k),0}(G_T(R))$, $T < R^{2m}$, *то існує* C_2, *незалежна від* u, T *і така, що*

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s D^\alpha u \Big|_{x_n=0} \right\|_{p, G_T^{(0)}(R)}^{(\rho)} \le C_2 T^{k - \frac{j+p}{2m} - \frac{1}{2mp}} \|u\|_{p, G_T(R)}^{(k)}.$$

Доведення. Твердження а) леми випливає з теорем 3.4, 8.4 роботи [6]. Твердження b) випливає із застосування нерівності Пуанкаре до другого доданку у дужках правої частини нерівності в а) з урахуванням того, що можна вибрати $h = T^{k/(2m)}$.

Апріорні оцінки розв'язків крайових задач. Будемо розглядати розв'язність та оцінки задачі (1)–(3) у просторі $W_p^{(4m)}(Q_T)$, припустивши, що числа m, n, p, m_j задовольняють умови

$$p > \frac{2m+n}{2m}, \quad p \ne \frac{2m+1}{2m - m_j}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{4}$$

а коефіцієнти a_α, $b_{j\beta}$ задовольняють умови:

a$_1$) $a_\alpha: Q_T \to R,\ a_\alpha \in W_p^{(2m)}(Q_T),\ |\alpha| \le 2m$;

a$_2$) існує $\nu_0 > 0$ таке, що для довільних $(x, t) \in Q_T,\ \eta \in R^n$ виконана нерівність

$$(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t)\eta^\alpha \ \ge\ \gamma_0 |\eta|^{2m};$$

b$_1$) $b_{j\beta}:\ S_T \to R,\ b_{j\beta} \in W_p^{(4m-m_j-1/p)}(S_T),\ |\beta| \le m_j,\ j = \overline{1,m}$.

Для $x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T),\ \eta$ — одиничного вектора зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$ у точці x, ξ — довільного вектора з дотичної до $\partial\Omega$ площини у точці x, $\tau \in \in C,\ q \in R$ позначимо

$$L(x, t, \xi + \tau\eta, q) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ q - (-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t)\,(\xi + \tau\eta)^\alpha,$$

$$B_j(x, t, \xi + \tau\eta) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x,t)\,(\xi + \tau\eta)^\beta, \qquad j = \overline{1,m}.$$

Якщо $q \ge -\nu|\xi|^{2m};\ 0 < \nu < \nu_0$ та $|q| + |\xi| > 0$, то $L(x, t, \xi + \tau\eta, q)$ як функція від τ має m коренів τ_s^+ з додатною дійсною частиною, а решту — з від'ємною [3]. Нехай $L^+(x, t, \xi, \tau, q) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \prod_{s=1}^m (\tau - \tau_s^+)$. Будемо вимагати виконання такої умови:

b$_2$) для довільної точки $(x, t) \in S_T$ та довільного вектора ξ, дотичного до $\partial\Omega$ у точці x за умов $q \ge -\nu|\xi|^{2m},\ 0 < \nu < \nu_0$ та $|q| + |\xi| > 0$ поліноми B_j від τ лінійно незалежні за модулем полінома L^+ від τ (умова Лопатинського).

Припускаємо, що функції у правих частинах (1)–(3) належать наступним просторам:

$$f \in W_p^{(2m)}(Q_T), \qquad q_j \in W_p^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)}(S_T), \qquad h \in W_p^{4m - \frac{2m}{p}}(\Omega). \tag{5}$$

Крім перерахованих вимог, від коефіцієнтів рівняння та крайових умов, а також функцій у правих частинах будемо вимагати виконання умов узгодженості. З початкової умови (3) та рівняння (1) можна знайти значення

$$u|_{t=0} = h(x) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ u^{(0)}(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x,0) D^\alpha h(x) + f(x,0) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ u^{(1)}(x),\ x \in \Omega. \tag{6}$$

Умови узгодженості для $j = 1, \ldots, m$ будуть складатися із таких співвідношень:

$$\sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(x,0) D^\beta u^{(0)}(x) = g_j(x, 0), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

$$\sum_{|\beta| \le m_j} \left\{ \frac{\partial b_{j\beta}}{\partial t}(x,0) D^\beta u^{(0)}(x) + b_{j\beta}(x,0) D^\beta u^{(1)}(x) \right\} = \frac{\partial g_i(x,0)}{\partial t}, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Будемо говорити, що для задачі (1)–(3) виконані умови узгодженості, якщо справедлива умова:

c) для кожного $j = 1, \ldots, m$ виконана умова (7), а для j таких, що $p > \frac{2m+1}{2m - m_j}$, виконана додатково ще й (8).

Теорема. *Нехай $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з границею $\partial\Omega \in C^{4m}$, $T \in (0, \overline{T}]$, а для задачі (1) – (3) виконані умови (4), (5), a$_1$), a$_2$), b$_1$), b$_2$), c). Тоді задача (1) – (3) має єдиний розв'язок $u \in W_p^{(4m)}(Q_T)$, що задовольняє апріорну оцінку*

$$K_1 \left\{ \|f\|_{p,Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{p,S_T}^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)} + \|h\|_{p,\Omega}^{\left(4m - \frac{2m}{p}\right)} \right\} \le \|u\|_{p,Q_T}^{(4m)} \le$$

$$\le K_2 \left\{ \|f\|_{p,Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{p,S_T}^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)} + \|h\|_{p,\Omega}^{\left(4m - \frac{2m}{p}\right)} \right\}. \tag{9}$$

Константи K_1, K_2 в нерівності (9) залежать тільки від Ω, $\overline{T}$, n, p, ν_0 та норм $a_\alpha(x, t)$, $b_{j\beta}(x, t)$ у просторах $W_p^{(2m)}(Q_T)$, $W_p^{(4m - m_j - 1/p)}(S_T)$ відповідно.

Доведення. Стандартним чином [5] побудуємо функцію $\nu(x, t)$, яка задовольняє умови

$$\left. \frac{\partial^k \nu}{\partial t^k} \right|_{t=0} = u^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \tag{10}$$

$$\|\nu\|_{p,Q_T}^{(4m)} \le K_1 \left(\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)} + \|h\|_{p,\Omega}^{(4m - 2m/p)} \right), \tag{11}$$

де $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$ знаходяться за формулами (6).

Розглянемо $u_1(x, t) \overset{\text{def}}{=} u(x, t) - \nu(x, t)$. Якщо u — розв'язок задачі (1)–(3), то u_1 — розв'язок задачі

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x,t) D^a u_1 = f_1(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1'}$$

$$\sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(x,t) D^\beta u_1 = g_{1j}(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2'}$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3'}$$

де

$$f_1(x, t) = f(x,t) - \frac{\partial \nu}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x,t) D^a \nu,$$

$$g_{1j}(x, t) = g_j(x, t) - \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(x,t) D^\beta \nu, \quad j = \overline{1,m}.$$

З (10) випливає, що $u_1 \in W_p^{(4m),0}(Q_T)$, $f_1 \in W_p^{(2m),0}(Q_T)$, $g_{1j}(x, t) \in W_p^{(4m - m_j - 1/p),0}(S_T)$, $j = \overline{1,m}$. Крім цього, з (11) випливає оцінка

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(4m)} \le \|u_1\|_{p,Q_T}^{(4m)} + K_2 \left(\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)} + \|h\|_{p,\Omega}^{(4m - 2m/p)} \right). \tag{12}$$

З наведених вище міркувань випливає, що твердження теореми досить довести у випадку, коли

$$f \in W_p^{(2m),0}(Q_T), \quad g_j \in W_p^{(4m-m_j-1/p),0}(S_T), \quad j = \overline{1,m}, \quad h \equiv 0. \tag{13}$$

Доведемо теорему за умов (13) і покажемо, що у цьому випадку $u \in \in W_p^{(4m),0}(Q_T)$. Спочатку доведемо теорему у випадку малого $T \le T_0$. Для цього побудуємо оператор

$$R: W_p^{(2m,\{m_j\}),0}(Q_T,S_T) \to W_p^{(4m)}(Q_T),$$

де

$$W_p^{(2m,\{m_j\}),0}(Q_T,S_T) \overset{\text{def}}{=} W_p^{(2m),0}(Q_T) \times \left(\prod_{j=1}^{m} W_p^{(4m-m_j-1/p),0}(S_T) \right),$$

і доведемо, що він разом з оператором $Pu \overset{\text{def}}{=} (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u)$ задовольняє рівності

$$PR\varphi = \varphi + M\varphi, \quad PRu = u + Nu, \tag{14}$$

де $\varphi \overset{\text{def}}{=} (f, g_1, \ldots, g_m) \in W_p^{(2m,\{m_j\}),0}(Q_T,S_T)$, $u \in W_p^{(4m),0}(Q_T)$, а M, N — обмежені оператори у просторах $W_p^{(2m,\{m_j\}),0}(Q_T,S_T)$, $W_p^{(4m),0}(Q_T)$ відповідно і при досить малому T_0 норми операторів M, N обмежені числом 0,5.

Нехай $\lambda > 0$. Можна вибрати скінченне покриття $\overline{\Omega}$ множинами $\overline{\Omega(x^{(k)},r_k)}$, $\left|\overline{\Omega(x^{(k)},r_k)}\right| < \lambda$, $k = \overline{1,K}$, що має властивості:

ω_1) якщо $\left|\overline{\Omega(x^{(k)},r_k)}\right| \subset \Omega$, то $\Omega(x^{(k)},r_k) = \prod_{j=1}^{n}\left[x_i^{(k)} - r,\ x_i^{(k)} + r\right]$;

ω_2) якщо $\left|\overline{\Omega(x^{(k)},r_k)}\right| \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, то в локальних координатах $\{y\}$ точки $x^{(k)} \in \partial\Omega$ множину $\Omega(x^{(k)},r_k)$ можна подати у вигляді $(-5r, 5r)^{n-1} \times \{-10r + h_k(y') < y_n < h_k(y')\}$;

ω_3) існує K_3, незалежна від λ і така, що

$$\sum_{k=1}^{K} \chi\left(x, \Omega(x^{(k)},r_k)\right) \le K_3. \tag{15}$$

За рахунок вибору малого λ можна задовольнити умову $\overline{\Omega(x^{(k)}, r_k)} \cap \partial\Omega \subset \subset U_i$ для деякого $i \in 1, \ldots, I$, якщо $\overline{\Omega(x^{(k)}, r_k)} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$.

Тут $|\Omega|$ — лебегова міра множини Ω, $\chi(x, E)$ — характеристична функція множини E, покриття $\{U_i\}$ було зафіксовано при визначенні норми у просторі $W_p^{(k)}(S_T)$. Якщо $\overline{\Omega(x^{(k)}, r_k)} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, то у нових координатах $z' = y'$, $z_n = y_n - h_k(y') + 5r$ отримаємо $\Omega(x^{(k)}, r_k) = (-5r, 5r)^n$.

Побудова покриття з властивостями $\omega_1) - \omega_3)$ аналогічна описаній в [2, с. 167–170].

Розглянемо три набори функцій $\{\xi_k, \eta_k, \zeta_k\}_{k=1}^{K} \subset C_0^\infty(R^n)$ з наступними властивостями:

ξ_1) носії функцій ξ_k, η_k, ζ_k належать $\Omega\left(x^{(k)}, r_k\right)$, $k=\overline{1,K}$;

ξ_2) $\sum\limits_{k=1}^{K}\xi_k(x)=1$, $x\in\Omega$, $\xi_k(x)\eta_k(x)=\xi_k(x)$, $\eta_k(x)\zeta_k(x)=\eta_k(x)$;

ξ_3) для довільних $x\in R^n$, $k=\overline{1,K}$, виконані нерівності $0\le\xi_k(x)\le 1$, $0\le$ $\le\eta_k(x)\le 1$, $0\le\zeta_k(x)\le 1$, $|D^\alpha\xi_k|+|D^\alpha\eta_k|+|D^\alpha\zeta_k|\le K_4|\lambda|^{-|\alpha|}$, де K_4 залежить тільки від n.

Побудова функцій з перерахованими властивостями наведена у [1, с. 342, 343].

Для кожного фіксованого $k=1,\ldots,K$ розглянемо задачу

$$L^{(k),0}u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha(x^{(k)},0)D^\alpha u = f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T,$$

$$B_j^{(k,0)}u \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\beta|\le m_j}b_{j\beta}(x^{(k)},0)D^\beta u = g_j(x,t), \qquad (x,t)\in S_T, \tag{16}$$

$$u(x,0)=0, \qquad x\in\Omega.$$

За теоремою 5.4 з [3] система (16) має єдиний розв'язок $u\in W_p^{(4m),0}(Q_T)$, який задовольняє нерівність

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(4m)} \le K_5\left(\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{p,S_T}^{\left(4m-m_j-\frac{1}{p}\right)}\right). \tag{17}$$

Означимо оператор $R^{(k)}\varphi: W_p^{(2m,\{m_j\}),0}(Q_T,S_T)\to W_p^{(4m),0}(Q_T)$ як такий, що співставляє $\varphi=(f,g_1,\ldots,g_m)$ розв'язок u задачі (16), а оператор R задамо наступним чином:

$$R\varphi \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K}\xi_k u_k, \text{ де } u_k \overset{\text{def}}{=} R^{(k)}(\eta_k f, \eta_k g_1,\ldots,\eta_k g_m), \qquad k=\overline{1,K}.$$

З (14) маємо $M\varphi=PR\varphi-\varphi$. Позначимо

$$M_0\varphi \overset{\text{def}}{=} L\sum_{k=1}^{K}\xi_k u_k-f, \qquad M_j\varphi \overset{\text{def}}{=} B_j\sum_{k=1}^{K}\xi_k u_k-g_j, \qquad j=\overline{1,m}.$$

Лема 7. *Нехай виконані умови теореми. Тоді існують додатні λ_1, θ_1, залежні лише від тих же параметрів, що й K_1, K_2 в умові теореми, і такі, що для $T=\lambda^{2m}\theta$, $0<\lambda<\lambda_1$, $0<\theta<\min\{1,\theta_1\}$ виконується нерівність*

$$\left(\|M_0\varphi\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p+\sum_{j=1}^{m}\left(\|M_j\varphi\|_{p,S_T}^{\left(4m-m_j-\frac{1}{p}\right)}\right)^p \le$$

$$\le \frac{1}{2^p}\left\{\left(\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p+\sum_{j=1}^{m}\left(\|g_j\|_{p,S_T}^{\left(4m-m_j-\frac{1}{p}\right)}\right)^p\right\}. \tag{18}$$

Доведення. Оцінимо $\|M_0\varphi\|_{p,Q_T}^{(2m)}$:

$$M_0\varphi = L\sum_{k=1}^{K}\xi_k u_k-\sum_{k=1}^{K}\xi_k L^{(k),0}u_k = M_0{}'\varphi+M_0{}''\varphi,$$

де

$$M_0'\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K} \sum_{|\alpha|\le 2m} \xi_k [a_\alpha(x,t) - a_\alpha(x^{(k)},0)]\, D^\alpha u_k,$$

$$M_0''\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{|\alpha'+\alpha''|\le 2m \\ |\alpha''|>0}} a_{\alpha'+\alpha''}(x,t)\, D^{\alpha'}\xi_k\, D^{\alpha''} u_k.$$

Норму $\left(\left\|M_0'\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p$ можна оцінити так:

$$\left(\left\|M_0'\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p \le K_6 \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{2m} \left(I_1^{(k,j)} + I_2^{(k,j)} + \sum_{|\beta'+\beta''+\beta'''|\le 2m} I_3^{(k,j)}(\beta',\beta'',\beta''') \right), \tag{19}$$

де

$$I_1^{(k,j)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|=j} \int_{Q_T^{(k)}} \left| \xi_k \frac{\partial a_\alpha}{\partial t} D^\alpha u_k \right|^p dxdt,$$

$$I_2^{(k,j)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|=j} \int_{Q_T^{(k)}} \left| \xi_k [a_\alpha(x,t) - a_\alpha(x^{(k)},0)] \frac{\partial}{\partial t} D^\alpha u_k \right|^p dxdt,$$

$$I_3^{(k,j)}(\beta',\beta'',\beta''') \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|=j} \int_{Q_T^{(k)}} \left| D^{\beta'}\xi_k D^{\beta''}[a_\alpha(x,t) - a_\alpha(x^{(k)},0)] D^{\alpha+\beta'''} u_k \right|^p dxdt,$$

а через $Q_T^{(k)}$ ми позначили $\Omega\left(x^{(k)}, r_k\right) \times (0, T)$. Оцінки інтегралів $I_1^{(k,j)}$, $I_2^{(k,j)}$, $I_3^{(k,j)}$ можна отримати за допомогою лем 2–5.

З леми 3, застосованої до $u_k(x, t)$, отримуємо

$$I_1^{(k,j)} + \sum_{|\beta''|\le 2m} I_3^{(k,j)}(0,\beta'',0) \le K_7 T^{p\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)} \left(\|u_k\|_{p,Q_T}^{(4m)}\right)^p. \tag{20}$$

З умов на функції $a_\alpha(x, t)$ та леми 2 випливає, що $a_\alpha \in C^{(\rho)}\left(\overline{Q}_T^{(k)}\right)$, $\rho > 0$. Тоді

$$I_2^{(k,j)} + \sum_{|\beta'+\beta'''|\le 2m} I_3^{(k,j)}(\beta',0,\beta''') \le K_8 \lambda^{p\rho} \left(\|u_k\|_{p,Q_T}^{(4m)}\right)^p. \tag{21}$$

Нерівність

$$\sum_{\substack{|\beta'+\beta''+\beta'''|\le 2m \\ 0<|\beta''|<2m}} I_3^{(k,j)}(\beta',\beta'',\beta''') \le K_9 T^{\frac{p}{2m}\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)} \left(\|u_k\|_{p,Q_T}^{(4m)}\right)^p \tag{22}$$

отримується послідовним застосуванням нерівності Гельдера та леми 5 до функції $u_k(x, t)$.

Таким чином, з (17), (19)–(22) маємо

$$\left(\left\|M_0{}'\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p \le K_{10}\left(T^{\frac{p}{2m}\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)}+\lambda^{p\rho}\right) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{K}\left\{\|f\eta_k\|_{p,Q_T^{(k)}}^{(2m)} + \sum_{j=1}^{m}\|g_j\eta_k\|_{p,S_T^{(k)}}^{(4m-m_j-1/p)}\right\}^p, \tag{23}$$

де $S_T^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left(\partial\Omega \cap \Omega\left(x^{(k)}, r_k\right)\right) \times (0, T)$, $k = \overline{1,K}$.

Із застосування нерівності в умові $\xi_3)$, а також леми 3 до функцій $f(x, t)$ та $g_j(x, t)$ отримуємо наступні оцінки:

$$\|f\eta_k\|_{p,Q_T^{(k)}}^{(2m)} \le K_{11}\|f\|_{p,Q_T^{(k)}}^{(2m)}, \quad k = \overline{1,K},$$

$$\left\|g_j\eta_k\right\|_{p,S_T^{(k)}}^{(4m-m_j-1/p)} \le K_{12}\left\|g_j\right\|_{p,S_T^{(k)}}^{(4m-m_j-1/p)}, \quad k = \overline{1,K}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{24}$$

З (23), (24) та умови $\omega_3)$ маємо

$$\left\|M_0{}'\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)} \le K_{13}\left(T^{\frac{1}{2m}\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)}+\lambda^{\rho}\right)\left\{\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)}+\sum_{j=1}^{m}\left\|g_j\right\|_{p,S_T}^{\left(4m-m_j-\frac{1}{p}\right)}\right\}. \tag{25}$$

Для $\left(\left\|M_0{}''\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p$ буде справедливою нерівність

$$\left(\left\|M_0{}''\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)}\right)^p \le$$

$$\le K_{14}\sum_{k=1}^{K}\sum_{|\alpha'+\alpha''|\le 2m}\left(I_4^{(k)}(\alpha',\alpha'')+I_5^{(k)}(\alpha',\alpha'')+\sum_{|\beta'+\beta''+\beta'''|\le 2m}I_6^{(k)}(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'',\beta''')\right), \tag{26}$$

де

$$I_4^{(k)}(\alpha',\alpha'') \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{Q_T^{(k)}}\left|D^{\alpha'}\xi_k\frac{\partial a_{\alpha'+\alpha''}}{\partial t}D^{\alpha''}u_k\right|^p dx\,dt,$$

$$I_5^{(k)}(\alpha',\alpha'') \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{Q_T^{(k)}}\left|D^{\alpha'}\xi_k a_{\alpha'+\alpha''}\frac{\partial}{\partial t}D^{\alpha''}u_k\right|^p dx\,dt,$$

$$I_6^{(k)}(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'',\beta''') \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{Q_T^{(k)}}\left|D^{\alpha'+\beta'}\xi_k D^{\beta''}a_{\alpha'+\alpha''}D^{\alpha''+\beta'''}u_k\right|^p dx\,dt.$$

Аналогічно до нерівностей (20)–(22) можемо встановити оцінки

$$I_4^{(k)}(\alpha',\alpha'') + \sum_{|\beta''|\le 2m}I_6^{(k)}(\alpha',\alpha'',0,\beta'',0) \le K_{15}T^{p\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)}\left(\|u_k\|_{p,Q_T}^{(4m)}\right)^p, \tag{27}$$

$$I_5^{(k)}(\alpha',\alpha'') + \sum_{|\beta'+\beta''|\le 2m}I_6^{(k)}(\alpha',\alpha'',\beta',0,\beta''') \le K_{16}\theta^{\frac{p}{2m}}\left(\|u_k\|_{p,Q_T}^{(4m)}\right)^p, \tag{28}$$

$$\sum_{\substack{|\beta'+\beta''+\beta'''|\le 2m \\ 0<|\beta''|<2m}} I_6^{(k)}(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'',\beta''') \le K_{17} T^{\frac{p}{2m}\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)} \left(\|u_k\|_{p,Q_T}^{(4m)}\right)^p. \tag{29}$$

З (26)–(29), (17), (24), та ω_3) отримуємо

$$\left\|M_0''\varphi\right\|_{p,Q_T}^{(2m)} \le K_{18}\left(T^{\frac{1}{2m}\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)} + \theta^{\frac{1}{2m}}\right)\left\{\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{p,S_T}^{\left(4m-m_j-\frac{1}{p}\right)}\right\}. \tag{30}$$

З (25), (30) випливає нерівність

$$\|M_0\varphi\|_{p,Q_T}^{(2m)} \le K_{19}\left(T^{\frac{1}{2m}\left(1-\frac{n+2m}{2mp}\right)} + \lambda^\rho + \theta^{\frac{1}{2m}}\right)\left\{\|f\|_{p,Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{p,S_T}^{\left(4m-m_j-\frac{1}{p}\right)}\right\}. \tag{31}$$

Перейдемо до оцінювання норм $\left\|M_j\varphi\right\|_{p,S_T}^{(4m-m_j-1/p)}$:

$$M_j\varphi = B_j\sum_{k=1}^K \xi_k u_k - \sum_{k=1}^K \xi_k B_j u_k = M_j'\varphi + M_j''\varphi,$$

де

$$M_j'\varphi \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K \sum_{|\beta|\le m_j} \xi_k\left[b_{j\beta}(x,t) - b_{j\beta}(x^{(k)},0)\right] D^\beta u_k,$$

$$M_j''\varphi \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{|\beta'+\beta''|\le m \\ |\beta'|>0}} b_{j\beta'+\beta''}(x,t) D^{\beta'}\xi_k D^{\beta''} u_k.$$

Оцінимо деякі типові інтеграли, що виникають при розгляді норм операторів $M_j'\varphi$, $M_j''\varphi$:

$$J_1^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \int_0^T dt \iint_{([-5r,5r]^{n-1})^2} \Big| D_{z'}^{\alpha'}\xi_k(z')\frac{\partial}{\partial t} D_{z'}^{\alpha''} b_{j\beta}(z',t) D_{z'}^{\alpha'''+\delta'} u_k(z',t) -$$

$$- D_{\bar z'}^{\alpha'}\xi_k(\bar z')\frac{\partial}{\partial t} D_{\bar z'}^{\alpha''} b_{j\beta}(\bar z',t) D_{z'}^{\alpha'''+\delta'} u_k(\bar z',t)\Big|^p \frac{dz'd\bar z'}{|z'-\bar z'|^{n+p-2}},$$

$$J_2^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \int_{[-5r,5r]^{n-1}} dz' \iint_{[0,T]^2} \Big| D^{\alpha'}\xi_k(z')\frac{\partial}{\partial t} D^{\alpha''} b_{j\beta}(z',t) D^{\alpha'''+\delta'} u_k(z',t) -$$

$$- D^{\alpha'}\xi_k(\bar z')\frac{\partial}{\partial t} D^{\alpha''} b_{j\beta}(\bar z',\tau) D^{\alpha'''+\delta'} u_k(\bar z',\tau)\Big|^p \frac{dt\,d\tau}{|t-\tau|^{1+\left(\frac{m_j+|\alpha|}{2m}-\frac{1}{2mp}\right)p}},$$

$$J_3^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \int_{[-5r,5r]^{n-1}} dz' \int_0^T \left| D^{\alpha'}\xi_k(z')\frac{\partial}{\partial t} D^{\alpha''} b_{j\beta}(z',t) D^{\alpha'''+\gamma'} \frac{\partial^{\gamma_n} u_k}{\partial z_n^{\gamma_n}}\bigg|_{z_n=0}\right| dt,$$

де $|\alpha| = |\alpha' + \alpha'' + \alpha'''| \le 4m - m_j - \frac{1}{p}$, $|\gamma'| + \gamma_n \le m_j$, $|\delta'| \le m_j$, $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, δ', γ' — мультиіндекси з $n-1$ координатами.

Розглянемо інтеграл $J_1^{(k)}$. Буде справедливою нерівність

$$J_1^{(k)} \le K_{20} \left\{ \int_0^T dt \iint_{([-5r,5r]^{n-1})^2} \left| D_{z'}^{\alpha'} \xi_k(z') - D_{\bar{z}'}^{\alpha'} \xi_k(\bar{z}') \right|^p \times \right.$$

$$\times \left| \frac{\partial}{\partial t} D_{z'}^{\alpha''} b_{j\beta} D_{z'}^{\alpha'''+\delta'} u_k \right|^p \frac{dz'\, d\bar{z}'}{\left|z' - \bar{z}'\right|^{n+p-2}} +$$

$$+ \lambda^{-|\alpha'|p} \int_0^T dt \iint_{([-5r,5r]^{n-1})^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} D_{z'}^{\alpha''} b_{j\beta}(z',t) - \frac{\partial}{\partial t} D_{\bar{z}'}^{\alpha''} b_{j\beta}(\bar{z}',t) \right|^p \left| D_{z'}^{\alpha'''+\delta'} u_k \right|^p \frac{dz\, d\bar{z}'}{\left|z' - \bar{z}'\right|^{n+p-2}} +$$

$$+ \lambda^{-|\alpha'|p} \int_0^T dt \iint_{([-5r,5r]^{n-1})2} \left| \frac{\partial}{\partial t} D_{\bar{z}'}^{\alpha''} b_{j\beta} \right|^p \times$$

$$\left. \times \left| D_{z'}^{\alpha'''+\delta'} u_k(z',t) - D_{\bar{z}'}^{\alpha'''+\delta'} u_k(\bar{z}',t) \right|^p \frac{dz'\, d\bar{z}'}{\left|z' - \bar{z}'\right|^{n+p-2}} \right\},$$

після чого можна оцінити кожний із доданків. У даному випадку для отримання потрібної нерівності використовуємо умову ξ_3), лему 3 для $u_k(z',t)$ та оцінюємо інтегральний множник, який залишається. В результаті отримаємо оцінку

$$J_1^{(k)} \le K_{21} \lambda^p \left(\|u\|_{p, S_T^{(k)}}^{(4m-1/p)} \right)^p. \tag{32}$$

Аналогічним чином може бути отримана нерівність

$$J_2^{(k)} \le K_{22} \lambda^p \left(\|u\|_{p, S_T^{(k)}}^{(4m-1/p)} \right)^p. \tag{33}$$

Для її доведення, крім перерахованих тверджень, потрібно використати ще й лему 4 для оцінки $b_{j\beta}(z',t)$ в одному з доданків.

Випадок інтеграла $J_3^{(k)}$ відрізняється тим, що підінтегральна функція $\left.\dfrac{\partial^{\gamma_n} u_k}{\partial x_n^{\gamma_n}}\right|_{x_n=0}$ належить до класу $W_p^{(4m-\gamma_n-1/p)}\left(S_T^{(k)}\right)$. Тому оцінка інтеграла $J_3^{(k)}$ матиме вигляд

$$J_3^{(k)} \le K_{23} \lambda^p \left(\left\| \frac{\partial^{\gamma_n} u_k}{\partial z_n^{\gamma_n}} \right\|_{p, S_T^{(k)}}^{\left(4m - \gamma_n - \frac{1}{p}\right)} \right)^p. \tag{34}$$

Застосовуючи до (32)–(34) лему 6, одержуємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{3} J_i^{(k)} \le K_{24} \lambda^p \left(\|u_k\|_{2p, Q_T^{(k)}}^{(4m)} \right)^p, \tag{35}$$

з якої на підставі (17), (24) та ω_3) випливає оцінка

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{K} J_i^{(k)} \le K_{25} \lambda^p \left(\| f \|_{p, Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{p, S_T}^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)} \right)^p .$$

Інші інтеграли у нормах $\| M_j \varphi \|_{p, S_T}^{(4m - m_j - 1/p)}$ можуть бути оцінені аналогічно. Запишемо лише загальну оцінку:

$$\| M_j \varphi \|_{p, S_T}^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)} \le$$

$$\le K_{26} \left(T^{\frac{1}{2m}\left(1 - \frac{n+2m}{2mp}\right)} + \lambda + \theta^{\frac{1}{2m}} \right) \left\{ \| f \|_{p,Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{p, S_T}^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)} \right\}. \quad (36)$$

Доведення леми випливає з (31), (36) при належному виборі λ_1, θ_1.

Дослідимо оператор N. З (14) випливає, що $Nu = RPu - u$.

Лема 8. *Нехай виконані умови теореми. Тоді існують додатні* λ_2, θ_2, *залежні лише від тих же параметрів, що й* K_1 , K_2 *в умові теореми, і такі, що для* $T = \lambda^{2m}\theta$, $0 < \lambda < \lambda_2$, $0 < \theta < \min\{1, \theta_2\}$, *виконується нерівність*

$$\| Nu \|_{p,Q_T}^{(4m)} \le \frac{1}{2} \| u \|_{p,Q_T}^{(4m)}. \quad (37)$$

Доведення. Маємо

$$Nu = \sum_{k=1}^{K} \xi_k R^{(k)} (\eta_k L u - L(\eta_k u), \eta_k B_1 u - B_1(\eta_k u), \ldots, \eta_k B_m u - B_m(\eta_k u)).$$

Очевидно, що

$$\eta_k L u - L(\eta_k u) \overset{\text{def}}{=} - \sum_{\substack{|\alpha' + \alpha''| \le 2m \\ |\alpha'| > 0}} a_{\alpha' + \alpha''} D^{\alpha'} \eta_k D^{\alpha''} u,$$

$$\eta_k B_j u - B_j(\eta_k u) \overset{\text{def}}{=} - \sum_{\substack{|\beta' + \beta''| \le 2m \\ |\beta'| > 0}} b_{j\beta' + \beta''} D^{\beta'} \eta_k D^{\beta''} u, \quad j = \overline{1, m}.$$

Ці доданки аналогічні до вже розглянутих при доведенні леми 7. Тому

$$\| \eta_k L u - L(\eta_k u) \|_{p,Q_T}^{(2m)} + \sum_{j=1}^{m} \| \eta_k B_j u - B_j(\eta_k u) \|_{p, S_T}^{\left(4m - m_j - \frac{1}{p}\right)} \le$$

$$\le K_{27} \left(T^{\frac{1}{2m}\left(1 - \frac{n+2m}{2mp}\right)} + \lambda + \theta^{\frac{1}{2m}} \right) \| \zeta_k u \|_{p,Q_T}^{(4m)}.$$

Використавши апріорну оцінку (17), нерівності типу (24) та ω_3), будемо мати

$$\| Nu \|_{p,Q_T}^{(4m)} \le K_{31} \left(T^{\frac{1}{2m}\left(1 - \frac{n+2m}{2mp}\right)} + \lambda + \theta^{\frac{1}{2m}} \right) \| u \|_{p,Q_T}^{(4m)}. \quad (38)$$

Доведення леми випливає з (38) при належному виборі λ_2, θ_2.

Продовжимо доведення теореми. Зафіксуємо числа $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ та $k_0 = \min\{k_1, k_2\}$ таким чином, щоб задовольнялись умови лем 7 та 8. Тоді оператори $I + M$, $I + N$ матимуть обернені $(I + M)^{-1}$, $(I + N)^{-1}$. З (14), замінюючи φ на $(I + M)^{-1}\psi$ у першій рівності та діючи $(I + N)^{-1}$ на другу, отримаємо

$$PR(I + M)^{-1}\psi = \psi, \quad \psi \in W_p^{(2m,\{m_j\}),0}(Q_T, S_T),$$

$$(I+N)^{-1}RPu = u, \quad u \in W_p^{(4m)}(Q_T). \tag{39}$$

Отже, оператор P має обмежений обернений, що доводить теорему для $T = T_0$. Але, оскільки T_0 залежить лише від тих параметрів, що й K_1, K_2 в умові теореми, можемо розповсюдити доведений результат на інтервали $\left(i\frac{T_0}{2}, (i+2)\frac{T_0}{2}\right)$, $i \geq 0$, використовуючи зведення до задачі з нульовими початковими даними. Це й доводить теорему.

Зауваження 2. Апріорна оцінка, аналогічна оцінці (9), доведена також у роботі [8], але без аналізу залежності констант від даних задачі. Характер останньої залежності, який вказаний у даній роботі, є принциповим при дослідженні нелінійних задач.

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Солонников В. А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Тр. Мат. ин–та АН СССР. – 1964. – **70**. – С. 133–212.
3. *Солонников В. А* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Там же. – 1965. – **83**. – С. 1–162.
4. *Skrypnik I. V.* Topological characteristics of fully nonlinear parabolic problems // Collection „Topological and variational methods for nonlinear boundary value problems". Pitman Res. Notes in Math. Ser. – 1997. – **365**. – P. 122–155.
5. *Kartsatos A. G,.Skrypnik I. V.* A global approach to fully nonlinear parabolic problems // Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
6. *Ильин В. П.* Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1962. – **66**. – С. 227–363.
7. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1959. – **13**, №3. – P. 115–162.
8. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **102**. – С. 137–160.

Одержано 28.01.99