УДК 513.88:513.83:517

О. В. Лопотко (Львов. лесотехн. ун-т)

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЧЕТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Theorems on extension of even-positive definite functions from a finite interval onto entire axis and from a strip onto entire plane are proved.

Доведено теореми про продовження парно-додатно визначених функцій із скінченного інтервалу на всю вісь, а також із смуги на всю площину.

В работах [1 – 4] доказана возможность продолжения положительно определенных функций с интервала на всю ось и дано описание всех таких продолжений. Эти результаты были модифицированы в [5] с точки зрения теории пространств с позитивной и негативной нормами. Первый пример неоднозначного продолжения положительно определенных функций приведен в [6].

В даной работе с помощью методики, предложенной Ю. М. Березанским в [5] (гл. VIII), доказаны теоремы об однозначном продолжении четно-положительно определенных (ч.-п.о.) функций с конечного интервала на всю ось, а также с полосы на всю плоскость.

Определение. *Четную функцию* $k(x)$, $x \in R^1_{2l} = (-2l, 2l)$, *будем называть ч.-п. о., если для любой* $u(x) \in C_0^\infty(-2l, 2l)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{R^1_{2l}} \int\limits_{R^1_{2l}} \frac{1}{2}[k(x-y)+k(x+y)]\overline{u(x)}u(y)\,dx\,dy \geq 0. \tag{1}$$

Лемма 1. *Рассмотрим ч.-п. о. функцию* $k(t) \in C((-2l, 2l))$, $0 < l < \infty$, *и пусть* $k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\,d\rho(\lambda)$ *— ее интегральное представление. Если при некотором* $m = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda)^{2m}\,d\rho(\lambda) < \infty, \tag{2}$$

то $k(t) \in C^{4m}(-l, l)$. *С другой стороны, если существуют производные* $k^{(4m)}(0)$, *то интеграл* (2) *сходится.*

Доказательство. Пусть выполнено (2). Тогда

$$k^{(4m)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda}\right)^{4m} \cos\sqrt{\lambda}t\,d\rho(\lambda)$$

и

$$k^{(4m)}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda}\right)^{4m} d\rho(\lambda) < \infty.$$

Наоборот, пусть существуют производные $k^{(4m)}(0)$; имеем

$$\left(\Delta_h^{(4m)}k\right)(0) \xrightarrow[h \to 0]{} k^{(4m)}(0),$$

где $(\Delta_h f)(t) = \dfrac{1}{2h}[f(t+h) - f(t-h)]$. Вместе с тем

$$\left(\Delta_h^{(4m)} \cos\sqrt{\lambda}\cdot\right)(t) = \cos\sqrt{\lambda}t\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}h}{h}\right)^{4m}.$$

Поэтому, вычисляя от обеих сторон равенства

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\, d\rho(\lambda) \tag{3}$$

разность $\Delta_h^{(4m)}$ при $t = 0$, находим

$$\left(\Delta_h^{(4m)} k\right)(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}h}{h}\right)^{4m} d\rho(\lambda) \geq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}h}{h}\right)^{4m} d\rho(\lambda).$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ и учитывая существование предела в левой части, получаем (2).

Теорема 1. *Пусть функция* $k(t) \in C((-2l, 2l))$, $0 < l < \infty$, *ч.-п. о. и такова, что существуют все производные* $k^{(4m)}(0)$, $m = 1, 2, \ldots$. *Если*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{k^{(4m)}(0)}} = \infty, \tag{4}$$

то проблема продолжения определена, т. е. существует единственное продолжение $k(x)$ *с интервала* $(-l, l)$ *на всю ось.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что если $d\rho(\lambda)$ — некоторая мера, с помощью которой представляется ч.-п. о. функция при $t = 0$, то интегралы (2) сходятся при любом $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, выражение (3) для ч.-п. о. функции можно дифференцировать под знаком интеграла и при $t = 0$ получим

$$k^{(4m)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{4m} d\rho(\lambda), \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, числа $S_{2m} = k^{(4m)}(0)$ образуют моментную последовательность. Для определенности проблемы моментов достаточно выполнения следующего критерия:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{S_{4m}}} = \infty.$$

Из (4) следует, что это условие выполняется. Таким образом, $d\rho(\lambda)$ определяется однозначно по $k(t)$, $t \in (-2l, 2l)$, т. е. проблема продолжения определена.

Теорема 2. *Пусть* $k(t) \in C((-2l, 2l))$, $0 < l < \infty$, — *ч.-п. о. функция. Рассмотрим полный набор ортонормированных собственных функций* $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots \subset L_2((l, l))$ *ядра* $k(x, y) = \frac{1}{2}[k(x-y) + k(x+y)]$, $x, y \in ((-l, l))$, *отвечающих положительным собственным значениям*

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}[k(x-y) + k(x+y)]\omega_j(y)\, dy = \rho_j\omega_j(x),$$
$$x \in (-l, l), \quad \rho_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Для того чтобы проблема продолжения $k(t)$ была определенной, достаточно, чтобы при некотором невещественном z, и необходимо, чтобы при любом невещественном z имело место соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} \left| \int_{-l}^{l} \cos\sqrt{z}x\,\overline{\omega_j(x)}\,dx \right|^2 = \infty.$$

Доказательство проводится по схеме [5, с. 680, 681].

Пусть $L = L^{(1)} \times L^{(2)} = (-d_1, d_1) \times (-\infty, \infty)$, где $0 < d_1 < \infty$ и $k(x) = k(x_1, x_2) \in C(2L)$ — четная по каждой переменной функция, удовлетворяющая оценке

$$\left|k(x_1, x_2)\right| \le ce^{Nx_2^2}, \quad c, N > 0,$$

и такая, что ядро $k(x, y) = \frac{1}{2}[\,k(x-y)+k(x+y)\,], x, y \in L$, ч.-п. о. в смысле (1).

Обозначим

$$H_0 = H_0^{(1)} \otimes H_0^{(2)} = L_2\big((-d_1, d_1) \otimes L_2\big(R^1, p(x_2)\,dx_2\big)\big),\ \ p(x_2) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x_2^2},\ \ \alpha > N.$$

Тогда после проведения факторизации и пополнения относительно скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle_k = \iint_L \frac{1}{2}[\,k(x-y)+k(x+y)\,]p(x_2)p(y_2)\overline{u(x)}v(y)\,dx\,dy, \qquad u, v \in H_0,$$

получим пространство H_k.

Чтобы получить представление для ч.-п. о. функций, достаточно доказать существование коммутирующих самосопряженных расширений в пространстве H_k эрмитовых операторов

$$C_1 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big(u \in C_0^\infty(-d_1, d_1) \otimes L_2\big(R^1, p(x_2)\,dx_2\big)\Big)$$

и

$$C_2 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big(u \in L_2(-d_1, d_1) \otimes C_0^\infty\big(R^1\big)\Big).$$

Теорема 3. *Пусть для ч.-п. о. функции выполняется оценка* $|k(x_1, x_2)| \le c\exp\big(Nx_2^2\big)$, $c, N > 0$, *в области* L *и функция* $k(x, 0)$ *продолжается на всю ось однозначно. Тогда для функции* $k(x_1, x_2)$ *имеет место представление*

$$k(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2\, d\rho(\lambda_1, \lambda_2), \tag{5}$$

причем мера $d\rho(\lambda_1, \lambda_2)$ *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть отображение $u(x_j) \to \overline{u(-x_j)}$, $j = 1, 2,$ — инволюция O_j в $H_0^{(j)}$. Тогда $O = O_1 \otimes O_2$ имеет вид $u^0(x) = \overline{u(-x)}$ и после замыкания по непрерывности будет инволюцией в H_k, так как все требования для инволюции выполнены. Операторы C_1, C_2 вещественны относительно O в силу вещественности $k(x, y)$. Сузим C_1 на $C_0^\infty(-d_1, d_1) \otimes \omega_2$ и покажем, что при любом $\omega_2 \in H_0^{(2)}$ замыкание этого сужения будет самосопряжено в $H^{(1)}_{k;\,\omega_2}$ — пополнении $L_2(-d_1, d_1)$ относительно скалярного произведения

$$\langle u_1, v_1 \rangle_{\omega_2} = \langle u_1 \otimes \omega_2, v_1 \otimes \omega_2 \rangle =$$

$$= \int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[k(x_1 - y_1, x_2 - y_2) + k(x_1 + y_1, x_2 + y_2)]\overline{u_1(x_1)} v_1(y_1) \times$$

$$\times \overline{\omega_1(x_2)}\omega_1(y_2)p(x_2)p(y_2)\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2.$$

Введем вспомогательную функцию

$$C(R^1) \ni f(t_2) = \int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_1}^{d_1} k(x_1 - y_1, t_2)\overline{u_{12}(x_1)} u_{12}(y_1)\,dx_1\,dy_1,$$

где u_{12}, v_{12} — четные компоненты u_1, v_1.

Поскольку $f(t_2)$ — ч.-п. о. функция, то $|f(t_2)| \le c\exp(Nt^2)$ $(C, N > 0)$,

$$\left|\frac{1}{2}[f(x_2 - y_2) + f(x_2 + y_2)]\right| \le \sqrt{\frac{1}{2}[f(2x_2) + f(0)]}\sqrt{\frac{1}{2}[f(2y_2) + f(0)]} \le$$

$$\le \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{4}f(2x_2) + \frac{1}{4}f(2y_2).$$

Поэтому

$$\langle u_1, u_1 \rangle_{\omega_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2 - y_2)\overline{\omega_{r2}(x_2)}\omega_{r2}(y_2)p(x_2)p(y_2)\,dx_2\,dy_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[f(x_2 - y_2) + f(x_2 + y_2)]\overline{\omega_{r2}(x_2)}\omega_{r2}(y_2)p(x_2)p(y_2)\,dx_2\,dy_2 \le$$

$$\le \frac{f(0)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\omega_{r2}(x_2)}\omega_{r2}(y_2)|p(x_2)p(y_2)\,dx_2\,dy_2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(2x_2)|\overline{\omega_{r2}(x_2)}\omega_{r2}(y_2)|p(x_2)p(y_2)\,dx_2\,dy_2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(2y_2)|\overline{\omega_{r2}(x_2)}\omega_{r2}(y_2)|p(x_2)p(y_2)\,dx_2\,dy_2 \le C_{\omega_2} f(0) =$$

$$= C\omega_2 \int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_1}^{d_1} \frac{1}{2}[k(x_1 - y_1, 0) + k(x_1 + y_1, 0)]\overline{u_1(x_1)} u_1(y_1)\,dx_1\,dy_1,$$

$$u \in H_0^{(1)} = L_2((-d_1, d_1)).$$

Поэтому если множество функций вида $\partial^2 u / \partial x_1^2 - zu$ ($\operatorname{Im} z \ne 0$ и $u(x) \in$

$\in C_0^\infty(-d_1, d_1))$ плотно в пространстве $H_{[k(x_1-y_1,0)+k(x_1+y_1,0)]/2}$, то оно также плотно и в пространстве $H_{k;\omega_2}$. Первое утверждение следует из условия теоремы. Следовательно, имеет место второе утверждение, т. е. рассматриваемое замыкание сужения самосопряжено. Существование самосопряженного расширения оператора C_2, коммутирующего с замыканием C_1, следует из теоремы 2.6 [5] (гл. VIII). Затем воспользовавшись теоремой 4.2 [5] (гл. VIII), получим представление (5).

1. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1940. – **26**, № 1. – С. 17–21.
2. *Крейн М. Г.* Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице. I и II // Там же. – 1944. – **43**, № 8. – С. 323–326; № 4. – С. 131–134.
3. *Крейн М. Г.* Об одном замечательном классе эрмитовых операторов // Там же. – 1944. – **44**, № 5. – С. 191–195.
4. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. – 1949. – **1**, № 2. – С. 3–66.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
6. *Гнеденко В. В.* О характеристических функциях // Бюлл. Моск. ун-та (А). – 1937. – **1**, № 5. – С. 17–18.

Получено 28.07.97,
после доработки — 02.02.98