УДК 517.956

І. С. Клюс, Б. Й. Пташник
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ*

We investigate the correctness of problems with multipoint conditions in time variable for partial differential equations unsolvable relative to higher derivative with respect to time. By using metric approach, we find lower bounds of small denominators which appear when constructing solutions of the problems.

Досліджено коректність задач з багатоточковими умовами за часовою змінною для рівнянь з частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. На основі метричного підходу проведено оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

1. Диференціальні рівняння, не розв'язні відносно старшої похідної за часом, виникають в різних задачах гідродинаміки [1 – 5]. Дослідження крайових і багатоточкових задач для таких рівнянь проводились в роботах [6 – 12].

Дана стаття є розвитком робіт [10 – 12] для випадків загальніших рівнянь і умов та ідейно близька до робіт [13, 14]. В ній встановлено умови коректної розв'язності задачі з багатоточковими умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовими змінними для рівняння з частинними похідними, не розв'язного відносно старшої похідної за часом, зі сталими коефіцієнтами. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі. Надалі використовуватимемо такі позначення: $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_p|$; $(k, x) = k_1x_1 + \dots + k_px_p$; $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + s_2 + \dots + s_p$; $[a]$ — ціла частина числа a; $\operatorname{mes} G$ $(|G|)$ — міра Лебега множини G; $D = \{(t, x) \colon t \in [0, T], x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, Ω — p-вимірний тор, який отримується шляхом ототожнення протилежних граней паралелепіпеда $\{x \in \mathbb{R}^p \colon 0 \le x_r \le 2\pi;\ r = 1, \dots, p\}$;

Γ — простір всіх тригонометричних многочленів

$$P(x) = \sum_{k_1=-N}^{N} \dots \sum_{k_p=-N}^{N} C_k(P) \exp(i(k, x)), \qquad x \in [0, 2\pi]^p, \quad N = 0, 1, \dots,$$

зі збіжністю: $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\Gamma} P$, якщо степені всіх поліномів $P_n(x)$ не перевищують деякого фіксованого числа M і при $n \to \infty$ $C_k(P_n) \to C_k(P)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$;

Γ' — простір всіх антилінійних неперервних функціоналів над Γ із слабкою збіжністю (він співпадає з простором формальних тригонометричних рядів) ([15], розд. 2);

$C^n([0, T], \Gamma)$ $(C^n([0, T], \Gamma'))$ — простір функцій $u(t, x)$, n разів неперервно диференційовних по t і таких, що при кожному $t \in [0, T]$, $\dfrac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 0, 1, \dots, n$;

* Роботу підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень Міністерства України у справах науки і технологій.

$A_\delta^\gamma(\Omega)$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$, — простір 2π-періодичних по $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій $\varphi(x) = \sum_{|k|\geq 0} \varphi_k \exp(i(k, x))$, для яких

$$\|\varphi(x)\|^2_{A_\delta^\gamma} = \sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 \exp\left(2\delta |k|^\gamma\right) < +\infty;$$

$C^n([0, T], A_\delta^\gamma(\Omega))$ — простір функцій $u(t, x)$, n разів неперервно диференційовних по t і таких, що при кожному $t \in [0, T]$, $\dfrac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \in A_\delta^\gamma(\Omega)$, $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\|u(t, x)\|^2_{C^n([0,T]; A_\delta^\gamma)} = \sum_{j=0}^{n} \max_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \right\|^2_{A_\delta^\gamma}.$$

2. В області D розглянемо задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta \sum_{|s|\leq 2m} \alpha_s^\beta \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{\partial^r u(t_q, x)}{\partial t^r} = \varphi_q(x), \quad q = 1, \ldots, n, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T, \tag{2}$$

де

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \sum_{|s|\leq 2\ell} b_s \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}$$

— еліптичний диференціальний вираз із сталими коефіцієнтами; b_s, a_r, $\alpha_s^\beta \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $n \geq 2$, $\ell \geq 1$, $m > \ell$.

Вигляд області D накладає на функції $u(t, x)$, $\varphi_q(x)$, $q = 1, \ldots, n$, умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) \exp(i(k, x)). \tag{3}$$

Тоді кожен із коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є відповідно розв'язком такої n-точкової задачі:

$$L(ik) \frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{|s|\leq 2m} \alpha_s^\beta (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \frac{d^\beta u_k(t)}{dt^\beta} = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{d^r u_k(t_q)}{dt^r} = \varphi_{qk}, \quad q = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де $\varphi_{qk} = 1/(2\pi)^p \int_\Omega \varphi_q(x) \exp(-i(k, x)) dx$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Припустимо, що

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p)\ L(ik) = \sum_{|s|\leq 2\ell} b_s (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \neq 0. \tag{6}$$

Із умови (6) випливає, що коефіцієнт $b_{(0)}$ в $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ є відмінним від нуля. Легко показати, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується оцінка (див. [11], лема 1)

$$|L(ik)| \geq C_0|k|^{2\ell}, \quad C_0 > 0. \tag{7}$$

Позначимо через $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, корені рівняння $P(\lambda, k) = 0$, де

$$P(\lambda, k) \equiv L(ik)\lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{|s|\leq 2m} \alpha_s^\beta (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \lambda^\beta \equiv \sum_{\beta=0}^{n} P_\beta(k)\lambda^\beta. \tag{8}$$

Задля спрощення викладок вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $\lambda_j(k), j = 1, \ldots, n$, є різні і відмінні від нуля. Із [16, с. 102] та оцінки (7) отримуємо, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$|\lambda_j(k)| \leq 1 + \max_{0\leq\beta\leq n-1} \left|\frac{P_\beta(k)}{P_n(k)}\right| \leq A|k|^\gamma, \quad \gamma = 2(m-\ell), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

де $A = 2N_1 A_1/C_0$, $A_1 = \max\limits_{0\leq\beta\leq n-1} \max\limits_{|s|\leq 2m} \left\{\left|\alpha_s^\beta\right|\right\}$, N_1 — кількість розв'язків в цілих числах $s_1, \ldots, s_p$ нерівності $|s| \leq 2m$.

Розв'язок задачі (4), (5) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{kj} \exp\left(\lambda_j(k)t\right), \tag{10}$$

де коефіцієнти C_{kj} визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} C_{kj} \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(\lambda_j(k)\right)^r \exp\left(\lambda_j(k)t_q\right) = \varphi_{qk}, \quad q = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

визначник якої $\Delta^*(k)$ зображається формулами

$$\Delta^*(k) = \Delta(k) \prod_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(\lambda_j(k)\right)^r, \tag{12}$$

$$\Delta(k) = \det\left\|\exp(\lambda_j(k)t_q)\right\|_{q,j=1}^n. \tag{13}$$

3. Розглянемо питання існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n([0, T], \Gamma')$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p)\ \Delta(k) \neq 0, \tag{14}$$

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(\lambda_j(k)\right)^r \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [17] і базується на єдиності розвинення функції з простору Γ' в ряд Фур'є [15].

Надалі вважатимемо, що умови (14), (15) виконуються. Позначимо через $\Delta_{qj}(k)$ алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\lambda_j(k)t_q)$ у визначнику $\Delta(k)$. Тоді розв'язок задачі (1), (2) зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{qj}(k)\, \varphi_{qk} \exp\left(\lambda_j(k)t + i(k,x)\right)}{\Delta(k) \sum\limits_{r=0}^{n-1} a_r \left(\lambda_j(k)\right)^r} \tag{16}$$

і, очевидно, належить до простору $C^n([0,T],\Gamma)\,(C^n([0,T],\Gamma'))$, якщо $\varphi_q \in \in \Gamma(\Gamma')$.

В інших випадках ряд (16), взагалі, є розбіжним, тому що величини $|\Delta(k)|$ і $\left|\sum\limits_{r=0}^{n-1} a_r\left(\lambda_j(k)\right)^r\right|$, $j=1,\dots,n$, які є відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Теорема 2. *Нехай існують додатні сталі* ν, β_1 *і* β_2 *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджуються оцінки*

$$|\Delta(k)| > |k|^{-\beta_1} \exp(-\nu |k|^\gamma T), \qquad \gamma = 2(m-\ell), \tag{17}$$

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(\lambda_j(k)\right)^r\right| > |k|^{-\beta_2}, \qquad j=1,\dots,n. \tag{18}$$

Якщо $\varphi_q \in A_\delta^\gamma$, $q=1,\dots,n$, $\delta > N$, $N=(nA+\nu)T$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^n([0,T], A_{\delta_1}^\gamma)$, $\delta_1 < \delta - N$, *який зображається рядом* (16) *і неперервно залежить від функцій* φ_q, $q=1,\dots,n$.

Доведення. На основі формул (16) – (18) та нерівності

$$q^\omega \leq Q(\omega)\exp(\varepsilon q), \qquad 0 \leq q < \infty, \quad Q(\omega) > 0,$$

яка справедлива для довільних $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$, маємо

$$\|u(t,x)\|^2_{C^n([0,T],A_{\delta_1}^\gamma)} \leq C_1 \sum_{|k|\geq 0} \sum_{q=1}^{n} |\varphi_{qk}|^2\, |k|^\alpha \exp(2(N+\delta_1)|k|^\gamma) \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{|k|\geq 0} \sum_{q=1}^{n} |\varphi_{qk}|^2 \exp(2(N+\delta_1+\varepsilon)|k|^\gamma) \leq C_2 \sum_{q=1}^{n} \|\varphi_q\|^2_{A_\delta^\gamma}, \tag{19}$$

де $\varepsilon < (\delta - N - \delta_1)$, $\alpha = 2(n\gamma + \beta_1 + \beta_2)$. З нерівності (19) випливає доведення теореми.

4. З'ясуємо наскільки потужна множина задач (1), (2), для яких справджуються оцінки (17), (18). Для цього будуть потрібні допоміжні твердження. Зокрема, треба оцінити знизу величину

$$\operatorname{Re}(L(ik))^{n-1} = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} C_{n-1}^{2m} \left(\sum_{\gamma=0}^{\ell} \sum_{|s|=2\gamma} (-1)^\gamma b_s k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p} \right)^{n-1-2m} \times$$

$$\times \left(\sum_{\gamma=0}^{\ell-1} \sum_{|s|=2\gamma+1} (-1)^\gamma b_s k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p} \right)^{2m},$$

яка є многочленом степеня $2\ell(n-1)$ відносно $k_1,\dots,k_p$ з вільним членом $b_{(0)}^{n-1}$, відмінним від нуля, де C_a^b — число комбінацій з a елементів по b.

Позначимо коефіцієнти b_s рівняння (1) через P_j, $j=1,\dots,r_1$, коли $|s|$ —

парне число, і через Q_γ, $\gamma = 1, \ldots, r_2$, коли $|s|$ — непарне число. Через B позначимо вектор, компонентами якого є всі можливі добутки вигляду $P_1^{\alpha_1} \ldots \ldots P_{r_1}^{\alpha_{r_1}} Q_1^{\beta_1} \ldots Q_{r_2}^{\beta_{r_2}}$, де вектори $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}) \in \mathbb{Z}_+^{r_1}$ і $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{r_2}) \in \mathbb{Z}_+^{r_2}$, складені з показників степенів, задовольняють рівняння $|\alpha| + |\beta| = n - 1$, якщо n — непарне число і, крім цього, нерівність $|\beta| \leq n-2$, якщо число n — парне; розмірність вектора B в обох випадках позначатимемо через q.

Лема 1. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^q$) векторів B нерівність*

$$|\operatorname{Re}(L(ik))^{n-1}| > \frac{1}{|k|^{p+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \tag{20}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення аналогічне до доведення теореми 4.4 із [14] (гл.2).

Без обмеження загальності, будемо вважати, що хоч один із коефіцієнтів $h_r = \alpha^0_{\gamma(r)}$, $\gamma(r) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-1}, 2m, 0, \ldots, 0)$, $r = 1, \ldots, p$, рівняння (1) є відмінним від нуля, і позначимо $h = (h_1, \ldots, h_p)$. Далі позначимо через $\xi \in \mathbb{R}^{\omega - p}$ вектор, складений з усіх коефіцієнтів α_s^β рівняння (1), за винятком тих, що є координатами вектора h, де ω — число всіх коефіцієнтів α_s^β.

Лема 2. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів h і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^q$) векторів B нерівність*

$$\prod_{n \geq j > r \geq 1} |\lambda_j(k) - \lambda_r(k)| \geq (C_0)^{1-n} |k|^\tau, \quad \tau < (n-1)(m - 2\ell) - np/2 \tag{21}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ і для довільного фіксованого $\xi \in \mathbb{R}^{\omega-p}$, де C_0 — стала із нерівності (7).

Доведення. Для дискримінанта $D(P)$ полінома $P(\lambda, k)$, що позначається формулою (8), справедливі наступні зображення [18]:

$$D(P) = P_n^{2n-2} \prod_{n \geq j > r \geq 1} (\lambda_j(k) - \lambda_r(k))^2, \tag{22}$$

$$D(P) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{P_n} \begin{vmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} & \ldots & P_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_n & P_{n-1} & \ldots & P_1 & P_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & P_0 \\ nP_n & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & P_1 \end{vmatrix}, \tag{23}$$

де $P_\beta \equiv P_\beta(k)$, $\beta = 0, 1, \ldots, n$, $P_n = L(ik)$.

Покажемо, що для майже всіх векторів $B \in \mathbb{R}^q$ і для майже всіх векторів h, які належать деякому паралелепіпеду $\Pi_p = [\alpha, \beta] \times \Pi_{p-1} \in \mathbb{R}^p$, нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| \geq |k|^{\mu}, \quad \mu = 2m(n-1) - np - \varepsilon_1 \tag{24}$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ і довільного $\varepsilon_1 > 0$. Скористаємось схемою доведення теореми 6 з [17]. Позначимо через W множину векторів h, для яких протилежна нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| < |k|^{\mu} \tag{25}$$

справедлива для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а через W_k множину векторів h, для яких нерівність (25) вірна при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $h_1 \neq 0$ і $|k_1| = \max_{1 \leq i \leq p} |k_i|$. Із (23) отримуємо $D(P) = \pm n^n (P_0 L(ik))^{n-1} + F$, а $\operatorname{Re} D(P) = \pm n^n (\operatorname{Re} P_0)^{n-1} \operatorname{Re}(L(ik))^{n-1} + F_1$, де F і F_1 містять степені P_0 і $\operatorname{Re} P_0$ відповідно не вищі, ніж $n-2$. Враховуючи, що

$$P_0 = (-1)^m h_1 k_1^{2m} + \sum_{|s| \leq 2m}{}' \alpha_s^0 (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p},$$

де штрих при знаку суми означає, що пропущено підсумовування по $s = (2m, 0, \ldots, 0)$, отримуємо

$$\operatorname{Re} D(P) = \pm n^n h_1^{n-1} k_1^{2m(n-1)} \operatorname{Re}(L(ik))^{n-1} + F_2, \tag{26}$$

де F_2 містить степені h_1 не вищі, ніж $n-2$. Із формули (26) та леми 1 випливає, що нерівність

$$\left| \frac{\partial^{n-1} \operatorname{Re} D(P)}{\partial h_1^{n-1}} \right| \geq n^n (n-1)!\, k_1^{2m(n-1)} |k|^{-p-\varepsilon} \geq M_1(n, p) |k|^{2m(n-1)-p-\varepsilon},$$

де $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, справджується для майже всіх векторів $B \in \mathbb{R}^q$. Тоді, згідно з лемою 2.2 [14](гл.1), для міри множини $W_k(h_1)$ тих значень $h_1 \in [\alpha, \beta]$, які задовольняють нерівність (25) (при фіксованих $h_2, \ldots, h_p$) справедлива оцінка

$$|W_k(h_1)| \leq M_2(n, p) |k|^{-p-\delta}, \quad \delta = (\varepsilon - \varepsilon_1)/(n-1) > 0. \tag{27}$$

Інтегруючи оцінку (27) за змінними $h_2, \ldots, h_p$ в паралелепіпеді Π_{p-1}, маємо

$$|W_k| \leq M_3(n, p) |k|^{-p-\delta}, \quad \delta > 0.$$

Ряд $\sum_{|k| \geq 0} |W_k|$ збігається; тому на основі леми Бореля – Кантеллі[19] міра множини W дорівнює нулю. Із формули (22) та нерівностей (7), (24) отримуємо, що для майже всіх векторів $h \in \Pi_p$ і для майже всіх векторів $B \in \mathbb{R}^q$ нерівність

$$\prod_{n \geq j > r \geq 1} |\lambda_j(k) - \lambda_r(k)| \geq (C_0)^{1-n} |k|^{(n-1)(m-2\ell) - np/2 - \varepsilon_1/2}$$

вірна для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що простір $\mathbb{R}^p$ можна покрити зчисленною кількістю паралелепіпедів Π_p, отримуємо доведення леми.

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{p+n}$*) векторів* $(h, \bar{t})$, *де* $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, *і для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^q$*) векторів* B *та довільного фіксованого* $\xi \in \mathbb{R}^{\omega - p}$ *оцінка* (17) *виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\beta_1 > (n-1)(m(n-1) - \ell(n-2)) + n^2 p/2$, $\nu = A(n^2 - n + 1)$.

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 4 з [20] (див. також [21, 22]). Побудуємо послідовність функцій $\varepsilon_q(k, \bar{t})$, $q = 1, \ldots, \nu(n)$, де $\nu(n) = n(n-1)/2$, наступним чином:

$$\varepsilon_r(k, \bar{t}) = \sum_{j=r}^{n} \prod_{s=1}^{r-1} (\lambda_j(k) - \lambda_s(k)) \exp((\lambda_j(k) - \lambda_r(k)) t_n) A_{nj},$$

де $r = 1, \ldots, n-1$, A_{nj} — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\lambda_j(k) t_n)$ у визначнику $\Delta(k)$, причому

$$\varepsilon_1(k, \bar{t}) = \exp(-\lambda_1(k) t_n) \Delta(k); \tag{28}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r(k, \bar{t})}{\partial t_n} = \exp\big((\lambda_r(k) - \lambda_{r+1}(k)) t_n\big) \varepsilon_{r+1}(k, \bar{t}), \qquad r = 1, \ldots, n-2,$$

$$\varepsilon_{n-1+r}(k, \bar{t}) = \sum_{j=r}^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda_n(k) - \lambda_s(k)) \prod_{s=1}^{r-1} (\lambda_j(k) - \lambda_s(k)) \times$$
$$\times \exp((\lambda_j(k) - \lambda_r(k)) t_{n-1}) A_{n-1, j}, \qquad r = 1, \ldots, n-2,$$

де $A_{n-1, j}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\lambda_j(k) t_{n-1})$ у визначнику $A_{n,n}$,

$$\frac{\partial \varepsilon_{n-1+r}(k, \bar{t})}{\partial t_{n-1}} = \exp\big((\lambda_r(k) - \lambda_{r+1}(k)) t_{n-1}\big) \varepsilon_{n+r}(k, \bar{t}), \qquad r = 1, \ldots, n-3.$$

Продовжуючи даний процес, отримуємо

$$\varepsilon_{\nu(n)}(k, \bar{t}) =$$
$$= \prod_{\substack{n \ge s > r \ge 1 \\ s \ne 2}} (\lambda_s(k) - \lambda_r(k)) (\exp((\lambda_1(k) t_1 + (\lambda_2(k) - \lambda_1(k)) t_2) - \exp(\lambda_2(k) t_1));$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\nu(n)}(k, \bar{t})}{\partial t_2} = \prod_{n \ge s > r \ge 1} (\lambda_s(k) - \lambda_r(k)) \exp((\lambda_2(k) - \lambda_1(k)) t_2 + \lambda_1(k) t_1). \tag{29}$$

Із (9), (29) та леми 2 випливає, що для майже всіх векторів $h \in \mathbb{R}^p$ і для майже всіх векторів $B \in \mathbb{R}^q$ нерівність

$$\left| \frac{\partial \varepsilon_{\nu(n)}(k, \bar{t})}{\partial t_2} \right| \ge (C_0)^{1-n} |k|^{\tau} \exp(-2A|k|^{\gamma} T) \tag{30}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, де сталі C_0, τ, A, γ — з нерівностей (7), (9), (21). На підставі нерівності (30) та леми 2.2 з [14] (гл. 1) шляхом модифікації схеми доведення теореми 4 із [20] приходимо до оцінки

$$\operatorname{mes}\{\bar{t} \in [0, T]^n : |\varepsilon_{\nu(n)}(k, \bar{t})| < |k|^{\tau - p - \gamma - \varepsilon} \exp(-2A|k|^{\gamma} T)\} \le H(n) |k|^{-p-\varepsilon}.$$

Переходячи послідовно від оцінки для $|\varepsilon_{\nu(n)}(k,\bar t)|$ до $|\varepsilon_{\nu(n)-1}(k,\bar t)|$ і т.д., отримуємо, що для майже всіх $h \in \mathbb{R}^p$ і для майже всіх $B \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\delta > 0$ нерівність

$$|\varepsilon_1(k,\bar t)| < |k|^{\tau-(p+\gamma)n(n-1)/2-\delta} \exp(-An(n-1)|k|^\gamma T)$$

справджується для підмножини векторів $\bar t \in [0,T]^n$, міра якої не перевищує $N|k|^{-p-\sigma}$, де $0<\sigma<1$, $N>0$; при цьому доводиться та враховується той факт, що число інтервалів зміни компоненти $t_s \in [0,T]$, $s = 3,\dots,n$, на яких виконується нерівність $|\mathrm{Re}\,\partial\varepsilon_r(k,\bar t)/\partial t_s| \geq \ell(k)$ (або $|\mathrm{Im}\,\partial\varepsilon_r(k,\bar t)/\partial t_s| \geq \ell(k)$) для $r = 1,\dots,\nu(n)-1$, не перевищує $\mathrm{const}\,|k|^\gamma$, де $\ell(k) = (C_0)^{1-n}/\sqrt{2}|k|^\tau \exp(-2A|k|^\gamma T)$. На основі леми Бореля – Кантеллі [19] та збіжності ряду $\sum_{|k|\geq 0} |k|^{-p-\sigma}$, враховуючи (28), одержуємо, що для майже всіх векторів $(h,\bar t) \in \mathbb{R}^{p+n}$ та для майже всіх $B \in \mathbb{R}^q$ оцінка

$$|\Delta(k)| > |k|^{-(n-1)(m(n-1)-\ell(n-2))-n^2p/2-\delta} \exp(-A(n^2-n+1)|k|^\gamma)$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ нерівності* (18) *виконуються при $\beta_2 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.4 з [14] (гл. 2).

5. Розглянемо задачу (1), (2), коли виконуються співвідношення

$$t_j = (j-1)t_0, \quad t_0 = T/(n-1), \quad j = 1,\dots,n. \tag{31}$$

У цьому випадку визначник (13) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \prod_{n\geq r>p\geq 1} (\exp(\lambda_r(k)t_0) - \exp(\lambda_p(k)t_0))$$

і є відмінним від нуля для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ тоді та тільки тоді, коли рівняння

$$(\lambda_r(k) - \lambda_p(k))t_0 - i2\pi\ell = 0, \quad n \geq r > p \geq 1,$$

не мають розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p$, ℓ.

При виконанні співвідношень (31) формула (16) набуває вигляду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{(-1)^{q-1}\varphi_{qk} S_{n-q}^{(j)} \exp(\lambda_j(k)t + i(k,x))}{\sum_{r=0}^{n-1} a_r(\lambda_j(k))^r \prod_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{n} (\exp(\lambda_j(k)t_0) - \exp(\lambda_p(k)t_0))}, \tag{32}$$

де $S_{n-q}^{(j)}$ — сума всіх можливих добутків елементів $\exp(\lambda_r(k)t_0)$, $r = 1,\dots,n$, $r \neq j$, взятих по $n-q$ в кожному добутку, $S_0^{(j)} \equiv 1$, $j = 1,\dots,n$. Позначимо $\lambda_j^{(1)}(k) = \mathrm{Re}\,\lambda_j(k)$, $\lambda_j^{(2)}(k) = \mathrm{Im}\,\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$.

Лема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел t_0 кожна з нерівностей*

$$\left| \frac{\lambda_r^{(2)}(k) - \lambda_p^{(2)}(k)}{\pi |k|^\gamma} - \frac{\ell}{|k|^\gamma t_0} \right| < |k|^{-\alpha-\varepsilon}, \quad r, p = 1, \ldots, n, \quad r \neq p, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

де $\alpha = p + \gamma$, *має не більше, ніж скінченне число розв'язків в цілих числах* $k_1, \ldots, k_p, \ell, \ \ell \neq 0, \ |k| \neq 0$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.4 з [14] (гл. 1).

Теорема 5. *Нехай функції* $\varphi_q \in A_\delta^\gamma$, $q = 1, \ldots, n$, *де* $\delta > (2A + \nu)T$. *Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{q+p}$*) векторів* (h, B), *для майже всіх векторів* $a \in \mathbb{R}^n$ *і для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* t_0 *та довільного фіксованого вектора* $\xi \in \mathbb{R}^{\omega-p}$ *існує розв'язок задачі* (1), (2), (31) *з простору* $C^n([0, T], A_{\delta_1}^\gamma)$, $\delta_1 < \delta - (2A + \nu)T$, *який зображається рядом* (32) *і неперервно залежить від функцій* φ_q.

Доведення. З оцінок (9) та леми 2 випливає, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ нерівності

$$|\lambda_r(k) - \lambda_p(k)| > |k|^{-\eta}, \quad r, p = 1, \ldots, n, \quad r \neq p, \tag{33}$$

де $\eta > m((n-1)^2 - 2) - \ell n(n-3) + np/2$, виконуються для майже всіх векторів $(h, B) \in \mathbb{R}^{p+q}$; множину таких векторів (h, B) позначимо через D. За нерівністю (33) множина D розбивається на підмножини D_1 і D_2, $D_1 \cup D_2 = D$, такі, що

$$(\forall (h, B) \in D_1) \ \ |\lambda_r^{(1)}(k) - \lambda_p^{(1)}(k)| > (\sqrt{2})^{-1} |k|^{-\eta},$$

$$(\forall (h, B) \in D_2) \ \ |\lambda_r^{(2)}(k) - \lambda_p^{(2)}(k)| > (\sqrt{2})^{-1} |k|^{-\eta}.$$

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_r^{(1)}(k) - \lambda_p^{(1)}(k) > 0$, $n \geq r > p \geq 1$. Тоді для всіх $(h, B) \in D_1$, а також для всіх $(h, B) \in D_2$ і для майже всіх t_0 виконуються оцінки

$$|\exp(\lambda_r(k) t_0) - \exp(\lambda_p(k) t_0)| \geq (\sqrt{2})^{-1} t_0 |k|^{-\eta} \exp(-A |k|^\gamma t_0), \tag{34}$$

де $r, p = 1, \ldots, n$, $r \neq p$. Доведення оцінок (34) для всіх $(h, B) \in D_2$ базується на лемі 3. Із (32), (34) та теореми 4 випливає доведення теореми.

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 3–50.
2. *Соболев С. Л.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью // Прикл. механика и техн. физика. – 1960. – № 3. – С. 20–25.
3. *Горбачук М. Л., Слепцова Г. П., Темченко М. Е.* Об устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела с жидким наполнением // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 5. – С. 586–602.
4. *Ишлинский А. Ю., Горбачук М. Л., Темченко М. Е.* Об устойчивости вращения на струне осесимметричных твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. – М.: Машиностроение, 1986. – С. 234–247.
5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированной жидкости. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
6. *Романко В. К.* О граничных задачах для дифференциально-операторных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 5. – С. 1030–1033.

7. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. – Новосибирск: Наука, 1984. – 224 с.
8. *Горбачук М. Л., Федак И. В.* Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированных жидкостей // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 1. – С. 14–17.
9. *Кахраманов А. Ш.* Краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Числовые методы решения краевых задач. – Баку: Изд-во Азерб. ун-та. – 1989. – С. 43–48.
10. *Пташник Б. Й., Комарницька Л. І.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Допов. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 20–23.
11. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.
12. *Комарницька Л. І.* Багатоточкова задача для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 177–185.
13. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 786 с.
14. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
15. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
16. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
17. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
18. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
19. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
20. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Математичні студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 16–32.
21. *Штабалюк П. І., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 210–215.
22. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468–1476.

Одержано 14.08.98