УДК 517.5

А. А. Лигун, А. А. Шумейко (Днепродзержин. техн. ун-т)

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

For functions such that an integral of the function in degree $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$ is convergent, we obtain asymptotically exact lower bounds of the approximation by local splines of degree r and defect $k \geq r/2$ in the metric L_p.

Для функцій таких, що інтеграл від функції в степені $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$ збігається, отримано асимптотично точні оцінки знизу наближення локальними сплайнами степеня r дефекту $k \geq r/2$ в метриці L_p.

Пусть $\{\Delta_{n[a,b]}\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность разбиений отрезка $[a,b]$:

$$\Delta_{n[a,b]} = \{a = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = b\}.$$

Через $h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$, $i = 0, \ldots, n-1$, обозначим переменный шаг разбиения $\Delta_{n[a,b]}$ с наибольшим значением $h_n = \max\{h_{i+1/2,n} \mid i = 0, \ldots, n-1\}$.

Функцию $s(t)$, имеющую $r-k$ непрерывных производных на отрезке $[a,b]$ и совпадающую на каждом из интервалов $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$, $i = 0, \ldots, n-1$, с алгебраическим многочленом степени не выше r, будем называть сплайн-функцией порядка r дефекта k по разбиению $\Delta_{n[a,b]}$. При фиксированных r, k и $\Delta_{n[a,b]}$ множество таких сплайнов будем обозначать через $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n[a,b]})$.

Как обычно, через $L_{p[a,b]}$ $(p \in (0,\infty))$ обозначим множество всех измеримых суммируемых в p-й степени на отрезке $[a,b]$ функций и положим

$$\|f\|_{p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p},$$

а через $L_{\infty[a,b]}$ — пространство всех существенно ограниченных на $[a,b]$ функций с конечной нормой $\|f\|_{\infty[a,b]} = \sup \mathrm{vrai}\,\{\,|f(t)| \mid t \in [a,b]\,\}$. Кроме того, через $V_{[a,b]}^r$ обозначим множество функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и полная вариация r-й производной ограничена, т. е. $V_a^b(f^{(r)}) < \infty$.

Пусть $\{P_{r,k}(\cdot, \Delta_{n[a,b]})\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность операторов, отображающих множество $C_{[a,b]}^k$ в пространство $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n[a,b]})$. В частности, $P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]})$ может быть интерполяционным сплайном, сплайном, интерполирующим $f(t)$ в среднем, сплайном наилучшего приближения и пр.

При фиксированных r, k и p последовательность разбиений $\{\Delta_{n[a,b]}^*\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной для функции $f \in C_{[a,b]}^{r+1}$ и последовательности операторов $\{P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]})\}_{n=1}^{\infty}$, если при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\|f - P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]}^*)\|_{p[a,b]} = \sup_{\Delta_{n[a,b]}} \|f - P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]})\|_{p[a,b]}(1 + o(1)).$$

Рассмотрим один вид широко используемых интерполяционных сплайнов — локальных эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами.

Пусть $\delta_\mu = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\mu = 1\}$ — фиксированное разбиение отрезка $[0, 1]$ такое, что $\tau_j = 1 - \tau_{\mu-j}$, $j = 0, 1, \ldots, \mu$, и $\Delta_{n,\mu[a,b]}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_{i,j,n} = t_{i-1,n} + h_{i-1/2,n}\tau_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, \mu$. Положим $\mu = |r + 1 - 2k| + 1$.

Пусть $k \geq (r+1)/2$ и функция $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$. Интерполяционным локальным эрмитовым сплайном назовем сплайн $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}) \in \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n[a,b]})$, однозначно определяющийся интерполяционными условиями

$$s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t_{i,j,n}) = f(t_{i,j,n}), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, \mu,$$

и

$$s^{(\nu)}_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t_{i,n}) = f^{(\nu)}(t_{i,n}), \quad \nu = 0, 1, \ldots, r-k.$$

Если r нечетно и $k = (r-1)/2$, такие сплайны называют эрмитовыми. Если же $k = 1$, описанные сплайны называют сплайнами Субботина – Черных.

Пусть $k \leq (r+1)/2$ и функция $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$. Интерполяционным локальным эрмитовым сплайном назовем функцию $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}) \in C^{r-k}_{[a,b]}$, однозначно определяющуюся условиями:

1) на каждом из интервалов $(t_{i,j-1,n}, t_{i,j,n})$ это алгебраический многочлен степени не выше r;

2) на каждом из интервалов $(t_{i-1,n}, t_{i,n})$, $i = 1, \ldots, n$, функция $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t)$ имеет $r-1$ непрерывную производную;

3) в узлах разбиения $\Delta_{n[a,b]}$ выполняются интерполяционные условия

$$s^{(\nu)}_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t_{i,n}) = f^{(\nu)}(t_{i,n}), \quad \nu = 0, 1, \ldots, r-k.$$

В работе [1] установлено, что для функций $f, z \in V^r_{[a,b]}$ справедливо равенство

$$\int_a^b (f(u) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u))\, d(z^{(r)}(u)) =$$

$$= (-1)^{r+1} \int_a^b (z(u) - s_{r,r-k+1}(z, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u))\, d(f^{(r)}(u)). \tag{1}$$

Сплайны $s_{r,r-k+1}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]})$ и $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]})$ называются двойственными.

Полагая в равенстве (1)

$$z(u) = (-1)^r \frac{(u-t)^r_+}{r!},$$

для любой функции $f \in V^r_{[a,b]}$ получаем

$$f(t) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t) =$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^1 ((u-t)^r_+ - s_{r,r-k+1}((\cdot - t)^r_+, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u))\, d(f^{(r)}(u)). \tag{2}$$

Таким образом, если $t, u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и

$$\mathcal{K}_{r,k\,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[a,b]}) =$$
$$= -\frac{1}{r}\left((u-t)_+^r - s_{r,r-k+1}\left((\cdot - t)_+^r, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u\right)\right), \tag{3}$$

то для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, получаем равенство

$$f(t) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[a,b]})\, d\left(f^{(r)}(u)\right). \tag{4}$$

Пусть

$$\mathcal{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu[0,1]}) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[a,b]})\, du$$

и

$$\mathbb{K}_{r,k,p} = \| \mathcal{K}_{r,k,1}(\Delta_{1,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]}.$$

В работе [2] установлен следующий результат.

Теорема А. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty]$, $\beta = (r + 1 + 1/p)^{-1}$, $\gamma \in (0, 1/(r+1))$, *функция* $f \in C_{[0,1]}^{r+1}$ *и* $\{\Phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность неотрицательных кусочно-непрерывных функций такая, что*

$$\| \Phi_n - |f^{(r+1)}| \|_{\infty[0,1]} \le \omega_n^{\gamma}, \tag{5}$$

где $\omega_n = \omega(\Phi, 1/n)$ *(*$\omega(z, t)$ *— модуль непрерывности функции* z*).*

Тогда последовательность разбиений $\{\Delta_{n[0,1]}^*\}_{n=1}^{\infty}$, *определяемая равенствами*

$$\int_0^{t_{k,n}^*} (\Phi_n(t) + \omega_n^{\gamma})^{\beta}\, dt = \frac{k}{n}\int_0^1 (\Phi_n(t) + \omega_n^{\gamma})^{\beta}\, dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{6}$$

асимптотически оптимальна для функции $f(t)$ *и при* $n \to \infty$ *выполняются соотношения*

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}^*)\|_{p[0,1]} = \inf_{\Delta_{n[0,1]}} \|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|_{p[0,1]}(1 + o(1)) =$$
$$= \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \|f^{(r+1)}\|_{\beta[0,1]}(1 + o(1)). \tag{7}$$

Для нечетных r, $k = (r+1)/2$ и функций $f \in C_{[0,1]}^{r+2}$ таких, что $|f^{(r+1)}(t)| > 0$, $t \in [0, 1]$, этот результат получен в работах [3 – 5].

Затем условие непрерывности $(r+2)$-й производной удалось снять и получить результат для всех k и r (см. [6]), а в работе [2] снято условие на знакопостоянство $(r+1)$-й производной (за счет этого и появилась добавка ω_n^{γ}).

В данной работе мы покажем, что оценка снизу (7) верна не только для функций, у которых $(r+1)$-я производная непрерывная, но и для функций из гораздо более широкого класса.

Перейдем к точным формулировкам.

Для функций, ν-я производная которой в каждой точке $t \in (a, b)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$, положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2}\left(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0)\right)$$

и $f^{((\nu))}(t)$ будем называть ν-й „формальной производной” функции $f(t)$. Ясно, что если в точке t функция $f^{(\nu-1)}(t)$ дифференцируема, то $f^{((\nu))}(t) = f^{(\nu)}(t)$.

Пусть $L^{r,k}_{p[a,b]}$, $p \in (0, \infty]$, $k = 1, 2, \ldots, r+1$, — множество всех функций $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$ таких, что в каждой точке $t \in (a, b)$ существуют односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$, $\nu = r-k+1, \ldots, r+1$, производная $f^{((r-1))}(t)$ кусочно абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$, множество точек разрывов $f^{((r))}(t)$ имеет конечное число предельных точек и $f^{((r))}(t) \in L_{p[a,b]}$.

Теорема. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $\beta = (r+1+p^{-1})^{-1}$, $p \in (0, \infty]$ *при* $k = [(r+1)/2], \ldots, r+1$ ($[\cdot]$ — *целая часть числа*) *и* $p \in [1, \infty]$ *при четных* r *и* $k = r/2$. *Тогда для любой функции* $f \in L^{r+1,k}_{\beta[0,1]}$ *и любой последовательности разбиений* $\{\Delta_{n[0,1]}\}_{n=1}^{\infty}$ *при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]} \geq \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \| f^{((r+1))} \|_{\beta[0,1]} (1 + o(1)). \tag{8}$$

Доказательству теоремы предпошлем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $k = [(r+1)/2], \ldots, r+1$. *Тогда для любого* $t \in (t_{i,n}, t_{i+1,n})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *функция* $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ (*как функция от* u) *на интервале* $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ *не имеет нулей.*

Для $k = 1, 2, \ldots, [r/2]$ *и для* $t \in (t_{i,n}, t_{i+1,n})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *функция* $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ (*как функция от* u) *на интервале* $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ *имеет простые нули в точках* $t_{i,j,n}$, $j = 1, 2, \ldots, \mu-1$, *и только в них.*

Доказательство леммы. Пусть вначале $k = [(r+1)/2], \ldots, r+1$. Покажем, что ядро $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ при любом $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ не меняет знак. По построению, при каждом $i = 1, \ldots, n$ на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ функция $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ является сплайном минимального дефекта порядка r с узлами в точках t и $t_{i,j,n}$, $j = 0, \ldots, \mu$, который удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \Big|_{u = t_{i,n}} =$$

$$= \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \Big|_{u = t_{i+1,n}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, r-k. \tag{9}$$

Таким образом, функция $\dfrac{\partial^r}{\partial u^r} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ кусочно-постоянна и имеет на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ не более $\mu = r - 2k + 2$ перемен знака.

Если ядро $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ меняет знак на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, то ядро имеет хотя бы один нуль на интервале $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ и на концах промежутка имеет нули кратности не менее $r-k$.

Согласно теореме Ролля, $(r-k+1)$-я производная по переменной u функции $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ будет иметь на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ не менее чем $r-k+2$ различных нуля, и, следовательно, $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ будет иметь не менее чем $r-2k+3$ перемены знака на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, что противоречит предыдущему.

Пусть теперь $k = 1, 2, \ldots, [r/2]$, тогда на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ функция $s_{r,r-k+1}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}, u)$ представляет собой алгебраический полином степени r, совпадающий со значениями функции $f(t)$ в точках $t_{i,j,n}$, и $(r-k)$-кратно интерполирующий ее на концах промежутка. Следовательно, в силу (3) при каждом $i = 1, \ldots, n$ на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ ядро $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ (как функция от u) является сплайном минимального дефекта порядка r с одним узлом в точке t. При этом ядро обращается в нуль в точках $t_{i,j,n}$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \mu-1$, и имеет нули кратности не менее $r-k$ на концах промежутка.

Следовательно, $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ является кусочно-постоянной функцией и имеет на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ не более одной перемены знака.

Пусть ядро $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ хотя бы в одной точке $t_{i,j,n}$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \mu-1$, имеет нуль кратности больше чем единица или на интервале $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ имеет хотя бы один нуль в точке, отличной от $t_{i,j,n}$. Тогда производная по u функции $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ имеет на интервале $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ не менее чем $\mu+1$ различных нулей, и, согласно теореме Ролля, $(r-k+1)$-я производная по u функции $\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ будет иметь на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ не менее чем $r-k+\mu$ различных нулей, и, следовательно, $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ будет иметь не менее чем $r-2k+2+\mu = 2$ перемены знака на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, что противоречит предыдущему.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $\mathbb{E}$ — множество всех точек из $[0, 1]$, в которых функция $f^{(r+1)}(t)$ непрерывна и не обращается в нуль. Меру этого множества обозначим $\operatorname{mes}\mathbb{E}$. Ясно, что множество $\mathbb{E}$ открыто и, следовательно, состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов. Для любого $\delta > 0$ найдется множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}_\delta$, состоящее из конечного числа открытых интервалов с мерой

$$\operatorname{mes}\mathbb{E} \le \operatorname{mes}\mathbb{E}_\delta - \frac{\delta}{2}.$$

Положим

$$\mathbb{E}_\delta^* = \bigcup_{i=0}^{n-1}\{\overline{\mathbb{E}}_\delta \cap [t_{i,n}, t_{i+1,n}]\},$$

где $\overline{\mathbb{E}}_\delta$ – замыкание множества $\mathbb{E}_\delta$. Понятно, что множество $\mathbb{E}_\delta^*$ состоит из конечного числа замкнутых непересекающихся интервалов. Длину наибольшего из этих интервалов обозначим через $h_n^\delta = h_n^\delta(f, \Delta_n)$.

Кроме того, пусть

$$\mathbb{E}_\delta^n = \bigcup_{i:\,[t_{i,n}, t_{i+1,n}] \subset \mathbb{E}_\delta^*} [t_{i,n}, t_{i+1,n}].$$

Ясно, что если последовательность разбиений $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} h_n^{\delta} \neq \neq 0$, то при $n \to \infty$

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|_{p[0,1]} \nrightarrow 0.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность разбиений такова, что $h_n^{\delta} \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда для любого $\delta > 0$ найдется $N = N(\delta) > 0$ такое, что при $n > N$ будет выполняться условие

$$\operatorname{mes} \mathbb{E} \leq \operatorname{mes} \mathbb{E}_{\delta}^{n} - \delta.$$

Рассмотрим фиксированный промежуток $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ из множества $\mathbb{E}_{\delta}^{n}$. По предположению, функция $f^{(r+1)}(t)$ непрерывна и не имеет нулей на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$.

В силу (4) для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ выполняется равенство

$$\sigma_{i+1/2,n}(f, t) = f(t) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}, t) =$$

$$= \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]}) f^{(r+1)}(u)\, du. \tag{10}$$

Пусть вначале $k = [(r+1)/2], \ldots, r+1$. Из (10) и из леммы следует, что для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ выполняется неравенство

$$m_{i+1/2,n}^{-} |\mathcal{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu[0,1]})| \leq |\sigma_{i+1/2,n}(f, t)| \leq$$

$$\leq m_{i+1/2,n}^{+} |\mathcal{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu[0,1]})|, \tag{11}$$

где

$$m_{i+1/2,n}^{+} = \max_{t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} |f^{(r+1)}(t)|$$

и

$$m_{i+1/2,n}^{-} = \min_{t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} |f^{(r+1)}(t)|.$$

Используя замену переменных $z = t - t_{i,n}$, получаем

$$\|\mathcal{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} = h_{i+1/2,n}^{(r+1)+p^{-1}} \mathbb{K}_{r,k,p} =$$

$$= h_{i+1/2,n}^{1/\beta} \mathbb{K}_{r,k,p}.$$

Таким образом, для $p \in (0, \infty]$ выполняются равенства

$$m_{i+1/2,n}^{-} \mathbb{K}_{r,k,p} h_{i+1/2,n}^{1/\beta} \leq \|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \leq$$

$$\leq m_{i+1/2,n}^{+} \mathbb{K}_{r,k,p} h_{i+1/2,n}^{1/\beta}. \tag{12}$$

Пусть вначале $p < \infty$, тогда

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|_{p\mathbb{E}_{\delta}^{n}}^{p} = \sum_{i:\, [t_{i,n}, t_{i+1,n}] \subset \mathbb{E}_{\delta}^{n}} \|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \geq$$

$$\geq \mathbb{K}^p_{r,k,p} \sum_{i:\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}^n_\delta} |m^-_{i+1/2,n}|^p h^{p/\beta}_{i+1/2,n} =$$

$$= \mathbb{K}^p_{r,k,p} \sum_{i:\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}^n_\delta} \left(\int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} |m^-_{i+1/2,n}|^\beta \, dt \right)^{p/\beta}.$$

Из неравенства Йенсена следует, что для любого $\gamma > 0$

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^n C_i^\gamma \;\middle|\; C_i \geq 0; \;\; \sum_{i=1}^n C_i = C \right\} = C^\gamma n^{1-\gamma}$$

и минимум достигается тогда и только тогда, когда $C_i = C/n$, $i = 1, \ldots, n$.

Отсюда и из предыдущего сразу получаем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|^p_{p\mathbb{E}^n_\delta} \geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{M^{p(r+1)}} \left(\int\limits_{\mathbb{E}^n_\delta} |f_{n,\delta}(t)|^\beta \, dt \right)^{p/\beta}, \tag{13}$$

где

$$f_{n,\delta}(t) = \{ m^-_{i+1/2,n} \mid t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]\colon [t_{i,n}, t_{i+1,n}] \in \mathbb{E}^n_\delta \}$$

и M — число составных промежутков множества $\mathbb{E}^n_\delta$.

Множество $\mathbb{E}^n_\delta$ замкнуто и состоит из конечного числа интервалов, максимальная длина которых стремится к нулю при $n \to \infty$. Учитывая этот факт и строение функции $f_{n,\delta}$, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\mathbb{E}^n_\delta} |f_{n,\delta}(t)|^\beta \, dt - \int\limits_{\mathbb{E}^*_\delta} |f^{(r+1)}(t)|^\beta \, dt \right| = 0.$$

Отсюда и из очевидного неравенства $M < n$, получаем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|^p_{p\mathbb{E}^n_\delta} \geq$$

$$\geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{n^{p(r+1)}} \left(\int\limits_{\mathbb{E}^*_\delta} |f^{(r+1)}(t)|^\beta \, dt \right)^{p/\beta} + o\left(\frac{1}{n^{p(r+1)}} \right),$$

и поскольку

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}} \operatorname{mes} \mathbb{E}^*_\delta = \operatorname{mes} \mathbb{E}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{E}} |f^{(r+1)}(t)|^\beta \, dt = \int\limits_{\mathbb{E}} |f^{((r+1))}(t)|^\beta \, dt = \int\limits_{[0,1]} |f^{((r+1))}(t)|^\beta \, dt,$$

то

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|^p_p \geq$$

$$\geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{n^{p(r+1)}} \left(\int\limits_{[0,1]} |f^{((r+1))}(t)|^\beta \, dt \right)^{p/\beta} + o\left(\frac{1}{n^{p(r+1)}} \right), \tag{14}$$

что и завершает доказательство теоремы при $p < \infty$.

Пусть теперь $p = \infty$. Тогда из (12) имеем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|^p_{\infty \mathbb{E}^n_\delta} = \max_{i:\,[t_{i,n}, t_{i+1,n}] \in \mathbb{E}^n_\delta} \|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{\infty [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \geq$$

$$\geq \mathbb{K}_{r,k,\infty} \max_{i:\,[t_{i,n}, t_{i+1,n}] \in \mathbb{E}^n_\delta} |m^-_{i+1/2,n}| \, h^{r+1}_{i+1/2,n} =$$

$$= \mathbb{K}_{r,k,\infty} \max_{i:\,[t_{i,n}, t_{i+1,n}] \in \mathbb{E}^n_\delta} \left(\int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} |m^-_{i+1/2,n}(f)|^\beta \, dt \right)^{1/\beta}.$$

Для любого $\gamma > 0$

$$\min \left\{ \max_{i=1,\ldots,n} C_i^\gamma \;\middle|\; C_i \geq 0; \;\; \sum_{i=1}^n C_i = C \right\} = C^\gamma n^{-\gamma},$$

причем минимум достигается тогда и только тогда, когда $C_i = C/n$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$.

Таким образом, имеем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|_{\infty \mathbb{E}^n_\delta} \geq \frac{\mathbb{K}_{r,k,\infty}}{n^{r+1}} \left(\int\limits_{\mathbb{E}^n_\delta} |f_{n,\delta}(t)|^\beta \, dt \right)^{1/\beta}.$$

Отсюда, как и ранее, получаем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})\|_\infty \geq \frac{\mathbb{K}_{r,k,\infty}}{n^{r+1}} \left(\int\limits_{[0,1]} |f^{((r+1))}(t)|^\beta \, dt - \varepsilon \right)^{1/\beta},$$

для любого $\varepsilon > 0$. Это и завершает доказательство первой части теоремы.

Пусть теперь r четное и $k = r/2$. Рассмотрим фиксированный промежуток $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ из множества $\mathbb{E}^n_\delta$. Функция $f^{(r+1)}(t)$ на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ непрерывна и не имеет нулей. Пусть, для определенности, на этом промежутке она положительна.

Как следует из леммы, на интервале $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ ядро $\mathcal{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2[0,1]})$, как функция от u, имеет только одну перемену знака — в точке $t_{i+1/2,n} = t_{i,n} + 0{,}5\, h_{i+1/2,n}$. Для определенности будем считать, что ядро положительно при $u \in (t_{i+1/2,n}, t_{i+1,n})$ и отрицательно при $u \in (t_{i,n}, t_{i+1/2,n})$.

Пусть

$$M^-_{i+1/2,n} = \min_{u \in [t_{i,n}, t_{i+1/2,n}]} f^{(r+1)}(u)$$

и

$$M^+_{i+1/2,n} = \max_{u \in [t_{i+1/2,n}, t_{i+1,n}]} f^{(r+1)}(u).$$

Тогда, как видно из (10),

$$\sigma_{i+1/2,n}(f, t) = \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2[0,1]}) \, f^{(r+1)}(u) \, du \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1/2,n}} \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2[0,1]}) \, M^-_{i+1/2,n} \, du +$$

$$+\int\limits_{t_{i+1/2,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2[0,1]})\, M^{+}_{i+1/2,n}\, du =$$

$$= \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} (A_{i+1/2,n} + B_{i+1/2,n}\operatorname{sign}(u - t_{i+1/2,n}))\, \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2[0,1]})\, du,$$

где

$$A_{i+1/2,n} = \frac{1}{2}(M^{+}_{i+1/2,n} + M^{-}_{i+1/2,n})$$

и

$$B_{i+1/2,n} = \frac{1}{2}(M^{+}_{i+1/2,n} - M^{-}_{i+1/2,n}).$$

Следовательно,

$$\sigma_{i+1/2,n}(f,t) \geq A_{i+1/2,n}\, \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2[0,1]}) + \\ + B_{i+1/2,n}\, \mathcal{P}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2[0,1]}), \tag{15}$$

где

$$\mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2[0,1]}) = \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2[0,1]},u)\, du$$

и

$$\mathcal{P}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2[0,1]}) = \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} |\mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2[0,1]})|\, du.$$

Полагая в равенстве (4) $f(t) = \dfrac{(t - t_{i+1/2,n})^{r+1}}{(r+1)!}$, получаем

$$\frac{(t - t_{i+1/2,n})^{r+1}}{(r+1)!} - s_{r,r/2}\left(\frac{(\cdot - t_{i+1/2,n})^{r+1}}{(r+1)!}, \Delta_{n,2[0,1]}, t\right) = \\ = \mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2[0,1]}).$$

Отсюда и из четности r непосредственно следует, что функция $\mathcal{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2[0,1]})$ нечетная относительно точки $t_{i+1/2,n}$, а $\mathcal{P}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2[0,1]})$ — четная относительно прямой $t = t_{i+1/2,n}$.

Нетрудно видеть, что если функция φ нечетная, а ψ четная на промежутке $[-a,a]$, то для $p \geq 1$

$$\|\varphi + \psi\|_{p[-a,a]} \geq \min\{\|\varphi\|_{p[-a,a]}, \|\psi\|_{p[-a,a]}\}. \tag{16}$$

Таким образом, имеем

$$\|\varphi + \psi\|_{p[-a,a]} = \frac{1}{2}(\|\varphi + \psi\|_{p[-a,a]} + \|\varphi - \psi\|_{p[-a,a]}) \geq \\ \geq \frac{1}{2}(\|\varphi + \psi + \varphi - \psi\|_{p[-a,a]}) = \|\varphi\|_{p[-a,a]}.$$

Аналогично получаем неравенство

$$\| \varphi + \psi \|_{p[-a,a]} \geq \| \psi \|_{p[-a,a]}.$$

Из (15) и (16) следует

$$\| \sigma_{i+1/2,n}(f) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \geq A_{i+1/2,n} \mathbb{K}_{r,r/2,p} h_{i+1/2,n}^{1/\beta} \geq$$

$$\geq m_{i+1/2,n}^{-} \mathbb{K}_{r,r/2,p} h_{i+1/2,n}^{1/\beta} = \mathbb{K}_{r,k,p} \left(\int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} |m_{i+1/2,n}^{-}|^{\beta} dt \right)^{1/\beta}.$$

Дальнейшее доказательство повторяет ход рассуждений, приведенный выше.

Замечание. Доказательство первой части теоремы существенно опирается на тот факт, что ядро (3) не меняет знак на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, а доказательство второй части использует то, что ядро имеет ровно одну перемену знака на этом промежутке. Поэтому предложенное доказательство к сплайнам дефекта $k < r/2$ неприменимо.

Как следует из теоремы А, для многих функций, к примеру, имеющих непрерывную $(r+1)$-ю производную, существует набор узлов, дающий ту же оценку приближения (асимптотически), что и в теореме. Мы предполагаем, что на самом деле выбор узлов (6) является асимптотически оптимальным для более широкого класса функций, а может быть, и для всех функций, фигурирующих в теореме. Однако доказательство этого факта, на наш взгляд, является довольно трудным. Даже доказательство неравенства

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_p \leq \frac{C_{r,k,p}}{n^{r+1}} \| f^{((r+1))} \|_{\beta[0,1]} (1 + o(1))$$

с некоторой константой $C_{r,k,p}$, зависящей лишь от r, k и p, нетривиально.

1. *Лигун А. А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 507–514.
2. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 6. – С. 18–22.
3. *Азарин И. С., Бармин В. И.* Аппроксимация кусочно-линейными функциями // Мат. сб. – 1976. – С. 25-26.
4. *Гребенников А. И.* О выборе узлов при аппроксимации функций сплайнами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. - 1976. - **16**, № 1. – С. 219–223.
5. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами // Anal. math. – 1976. – **2**. – С. 267–275.
6. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 824–830.

Получено 10.07.97,
после доработки — 15.05.98