УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ НА МНОЖЕСТВАХ $\bar{\psi}$-ИНТЕГРАЛОВ

We study functionals characterizing the strong summation of Fourier series on sets of $\bar{\psi}$-integrals in the uniform and integral metrics. As a consequence, we obtain estimates exact in order for the best approximations of functions of these sets by trigonometric polynomials.

Вивчаються функціонали, що характеризують сильне підсумовування рядів Фур'є на множинах $\bar{\psi}$-інтегралів в рівномірній та інтегральній метриках. Як наслідок, одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень тригонометричними поліномами функцій із таких множин.

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть $f(\cdot)$ — 2π-периодическая интегрируемая на периоде функция $(f\in L)$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x)$$

— ее ряд Фурье, $S_n(f,x)$ — частная сумма порядка n ряда $S[f]$ — сумма Фурье порядка n функции $f(\cdot)$. Пусть $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара произвольных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k=0, 1, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$ и $\psi_2(0) = 0$.

Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi_1(k)A_k(f;x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f;x), \qquad \tilde{A}_k(f;x) = a_k\sin kx - b_k\cos kx$$

является рядом Фурье некоторой функции $F\in L$, то F называется $\bar{\psi}$-интегралом функции $f(\cdot)$ и записывается $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\bar{\psi}}(f;\cdot)$. При этом функцию $f(\cdot)$ называют $\bar{\psi}$-производной функции $F(\cdot)$ $(F^{\bar{\psi}}(\cdot) = f(\cdot))$. Множество $\bar{\psi}$-интегралов всех функций из L обозначается через $L^{\bar{\psi}}$; если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L, то $L^{\psi}\mathfrak{N}$ обозначает множество всех $\bar{\psi}$-интегралов функций из $\mathfrak{N}$. В частности, если C — множество непрерывных функций f из L с нормой $\|f\|_C = \max_t|f(t)|$, то $L^{\bar{\psi}}C$ — множество $\bar{\psi}$-интегралов функций $f(\cdot)$ из C; $C^{\bar{\psi}}C = C\cap L^{\bar{\psi}}C$. Понятия $\bar{\psi}$-интеграла и $\bar{\psi}$-производной данной функции $f(\cdot)$ введены в [1]. Там же (см. также [2, 3]) изучается поведение величин

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

на различных подмножествах из $L^{\bar{\psi}}$ в равномерной и интегральной метриках.

Здесь продолжаются исследования величин (1), только на этот раз в качестве меры скорости сходимости ряда $S[f]$ к $f(\cdot)$ рассматриваются величины

$$R_n^p(f;x) = \left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{n+\gamma_n-1}|\rho_k(f;x)|^p\right)^{1/p}, \qquad p>0,$$

где γ_n — некоторая последовательность натуральных чисел.

Будем придерживаться обозначений, принятых в [1 – 3], однако некоторые из них все же напомним.

Системы чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, удобно считать значениями при $v = k$ непрерывных при всех $v\ge 1$ функций $\psi_1(v)$ и соответственно

$\psi_2(v)$. Множество всех непрерывных выпуклых вниз при всех $v \geq 1$ функций $\psi(\cdot)$ и таких, что

$$\lim_{v \to \infty} \psi(v) = 0 \tag{2}$$

обозначается через $\mathfrak{M}$; через $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, подчиненных условию

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt \leq K < \infty.$$

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставляются две функции $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t)$ посредством равенств

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \qquad \mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \qquad t \geq 1. \tag{3}$$

Тогда через $\mathfrak{M}_0$ обозначается подмножество из $\mathfrak{M}$, определяющееся равенством

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi\colon \psi \in \mathfrak{M},\ 0 < \mu(\psi; t) \leq K < \infty\},$$

где K — некоторая положительная константа; через F — подмножество из $\mathfrak{M}$, задающееся формулой

$$F = \{\psi\colon \psi \in \mathfrak{M},\ \eta'(t) = \eta'(\psi; t) \leq K\}. \tag{4}$$

Если A — некоторое множество, то обозначение $\pm\psi \in A$ означает, что либо $\psi \in A$, либо $-\psi \in A$; $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{M}'$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ и при каждом $p > 0$*

$$R_n^p(f; x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(f; x)|^p\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Тогда для любой функции $f(\cdot)$ из множества $C^{\overline{\psi}}C$ в каждой точке x справедливо неравенство

$$R_n^p(f; x) \leq C_p\left(\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \overline{\psi}(n)\right)E_n(f^{\overline{\psi}}), \tag{6}$$

в котором $\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$, $E_n(\varphi)$ — величина наилучшего приближения функции $\varphi(\cdot)$ в равномерной метрике посредством тригонометрических полиномов $t_{n-1}(\cdot)$ степени $\leq n-1$:

$$E_n(\varphi) = \inf_{t_{n-1}} \|\varphi(x) - t_{n-1}(x)\|_C$$

и C_p — величина, равномерно ограниченная по $n \in N$ и по $f \in C^{\overline{\psi}}C$.

Теорема 2. *Пусть $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ и при каждом $p > 0$*

$$R_n^p(f; x) = \left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\rho_k(f; x)|^p\right)^{1/p}, \qquad \eta(n) = \eta(\psi_1; n), \tag{7}$$

где $\gamma_n = [\eta(\psi_1; n)] - n + 1$, $[\alpha]$ — целая часть числа α. Тогда если можно указать такие константы K_1 и K_2, что

$$0 < K_1 \leq \frac{\eta(\psi_1; t) - t}{\eta(\psi_2; t) - t} \leq K_2 < \infty \quad \forall\, t \geq 1, \tag{8}$$

то для любой функции $f \in C^{\overline{\Psi}} C$ *в каждой точке* x

$$R_n^p(f;x) \le C_p \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{9}$$

Если же выполняется условие

$$|\psi_2(n)| \ln^+(\eta(\psi_1;n) - n) \le O(1)|\psi_1(n)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8′}$$

то для любой функции $f \in C^{\overline{\Psi}} C$ *в каждой точке* x

$$R_n^p(f;x) \le C_p |\psi_1(n)| E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{9′}$$

Величины $\overline{\psi}(n)$, $E_n(\varphi)$ *и* C_p *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

Утверждения, подобные теореме 2, для более узких множеств функций, устанавливались ранее в [4–6]. Доказательства теорем 1 и 2 во многом напоминают доказательства соответствующих утверждений из названных работ.

***Доказательство теоремы* 1.** Будем отталкиваться от леммы 2 из [2], согласно которой справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ *и* a — *произвольное положительное число. Тогда если* $f \in C^{\overline{\Psi}} C$, *то для каждого* $n \in N$ *и для любого тригонометрического полинома* $t_{n-1}(\cdot)$ *степени* $n-1$ *в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x) = \int\limits_{|t| \le \alpha/n} \Delta_n(x;t)\, \mathcal{J}_2(\psi_2;n;t)_1\, dt +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{a/n \le |t| \le \pi/2} \Delta_n(x;t) \frac{\sin(nt+\theta_n)}{t}\, dt + O(1)\overline{\psi}(n) \|\Delta_n(x;t)\|_C, \tag{10}$$

в котором $\Delta_n(x;t) = f^{\overline{\Psi}}(x-t) - t_{n-1}(x-t)$,

$$\mathcal{J}_2(\psi_2;n;t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi_2(v) \sin vt\, dv,$$

$$\cos\theta_n = \frac{\psi_1(n)}{\overline{\psi}(n)}, \quad \sin\theta_n = \frac{\psi_2(n)}{\overline{\psi}(n)} \tag{11}$$

и $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Пусть сначала $p \ge 2$. Учитывая, что для любых двух чисел a и b

$$|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p), \quad \text{если} \quad p \ge 1, \tag{12}$$

и

$$|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p, \quad \text{если} \quad 0 \le p < 1, \tag{12′}$$

из (5) и (10) находим

$$R_n^p(f;x) \le 4\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\int\limits_{|t|\le a/k} \Delta_n(x;t)\, \mathcal{J}_2(\psi_2;n;t)_1\, dt\right|^p\right)^{1/p} +$$

$$+ 4\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{\overline{\psi}(k)}{\pi}\int\limits_{a/k\le|t|\le\pi/2} \Delta_n(x;t)\frac{\sin(kt+\theta_k)}{t}\, dt\right|^p\right)^{1/p} +$$

$$+ O(1)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\overline{\psi}^p(k)\|\Delta_n(u)\|_C^p\right)^{1/p} \stackrel{\text{df}}{=} 4(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3). \tag{13}$$

В дальнейшем в качестве полинома $t_{n-1}(\cdot)$ будем выбирать полином $t^*_{n-1}(\cdot)$, осуществляющий наилучшее приближение функции $f^{\overline{\Psi}}$:

$$\|f^{\overline{\Psi}}(\cdot) - t^*_{n-1}(\cdot)\|_C = E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{14}$$

В [2, с. 389] показано, что для каждого $a > 0$ при любом $n \in N$

$$\int\limits_{|t| \le a/n} |\mathcal{J}_2(\psi_2; n; t)_1|\, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt + O(1)\, \overline{\Psi}(n).$$

Поэтому с учетом (14) получаем

$$\sigma_1 \le \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \int\limits_{|t| \le a/k} \Delta_n(x;t)\, \mathcal{J}_2(\psi_2; k; t)_1\, dt \right|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} E_n^p(f^{\overline{\Psi}}) \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_k^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt \right)^p \right)^{1/p} +$$

$$+ O(1) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-2} E_n^p(f^{\overline{\Psi}})\, \overline{\Psi}^p(k) \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2E_n(f^{\overline{\Psi}}) \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt + O(1)\, \overline{\Psi}(n) \right). \tag{15}$$

Ясно, что

$$\sigma_3 \le O(1) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \overline{\Psi}^p(k)\, E_n^p(f^{\overline{\Psi}}) \right)^{1/p} \le O(1)\, \overline{\Psi}(n)\, E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{16}$$

Остается показать, что так же

$$\sigma_2 \le C_p\, \overline{\Psi}(n)\, E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{17}$$

Имеем

$$\sigma_2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{\overline{\Psi}(k)}{\pi} \int\limits_{a/k \le |t| \le \pi/2} \frac{\Delta_n(x;t)}{t} \sin(kt + \theta_k)\, dt \right|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \overline{\Psi}(k) \int\limits_{a/2n \le |t| \le \pi/2} \frac{\Delta_n(x;t)}{t} \sin(kt + \theta_k)\, dt \right|^p \right)^{1/p} +$$

$$+ \frac{2\overline{\Psi}(n)}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \int\limits_{a/2n \le |t| \le a/n} \frac{dt}{t} \right|^p \right)^{1/p} E_n(f^{\overline{\Psi}}).$$

Учитывая равенства (11), получаем

$$\sigma_2 \le \frac{4}{\pi} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\psi_1(k)|^p \left| \int\limits_{a/2n \le |t| \le \pi/2} \frac{\Delta_n(x;t)}{t} \sin kt\, dt \right|^p \right)^{1/p} + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\psi_2(k)|^p\left|\int\limits_{a/2n\le|t|\le\pi/2}\frac{\Delta_n(x;t)}{t}\cos kt\,dt\right|^p\right)^{1/p}\Bigg]+$$

$$+\ \frac{4\ln 2}{\pi}\,\overline{\Psi}(n)\,E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{18}$$

Поскольку при $k\in[\,n,2n-1\,]$ $|\psi_i(k)|\le\overline{\Psi}(n)$, $i=1,2$, то из (18) находим

$$\sigma_2\le C_p\overline{\Psi}(n)\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\int\limits_{a/2n\le|t|\le\pi/2}\Delta_n(x;t)\,t\sin kt\,dt\right|^p\right)^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\int\limits_{a/2n\le t\le\pi/2}\frac{\Delta_n(x;t)}{t}\cos kt\,dt\right|^p\right)^{1/p}+O(1)\,E_n(f^{\overline{\Psi}})\right]. \tag{19}$$

При каждых фиксированных x и n положим

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_n(x;t)}{t}, & \dfrac{a}{2n}\le|t|\le\dfrac{\pi}{2};\\[2mm] 0, & \left[|t|\le\dfrac{a}{2n}\right]\bigcup\left[\dfrac{\pi}{2}\le|t|\le\pi\right],\end{cases}$$

и через $\alpha_k=\alpha_k(\varphi_n)$ и $\beta_k=\beta_k(\varphi_n)$ обозначим коэффициенты Фурье этой функции. Тогда вследствие (19)

$$\sigma_2\le C_p\overline{\Psi}(n)\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\alpha_k|^p\right)^{1/p}+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\beta_k|^p\right)^{1/p}+O(1)\,E_n(f^{\overline{\Psi}})\right]. \tag{20}$$

Теперь воспользуемся известным утверждением Хаусдорфа – Юнга: если функция $f\in L_r$, $1<r\le 2$, и

$$c_k=c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-int}\,dt\,,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

— ее коэффициенты Фурье, то

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^{r'}\right)^{1/r'}\le(2\pi)^{-1}\|f\|_r,\qquad\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1. \tag{21}$$

Поскольку

$$\frac{\alpha_0}{2}\le c_0(\varphi_n),$$

$$\alpha_k=c_k(\varphi_n)+c_{-k}(\varphi_n),\qquad i\beta_k=c_{-k}(\varphi_n)-c_k(\varphi_n),$$

и в рассматриваемом случае $p\ge2$, то в силу (21) имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^p\right)^{1/p}\le 2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^p\right)^{1/p}\le$$

$$\le\pi^{-1}\|\varphi_n\|_{p'}=\pi\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(t)|^{p'}\,dt\right)^{1/p'}\le$$

$$\leq \frac{2^{1/p'}}{\pi}\left(\int\limits_{a/2n}^{\pi/2} \frac{\|\Delta_n(x;t)\|_C^{p'}}{t^{p'}}\,dt\right)^{1/p'} = \frac{2^{1/p'}}{\pi} E_n(f^{\Psi})\left(\int\limits_{a/2n}^{\pi/2}\frac{dt}{t^{p'}}\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq C_p E_n(f^{\overline{\Psi}})\, n^{(p'-1)/p'} = C_p E(f^{\overline{\Psi}})\, n^{1/p}. \tag{22}$$

Аналогично находим

$$\left(\sum_{k=\nu}^{\infty} |\beta_k|^p\right)^{1/p} \leq C_p E_n(f^{\overline{\Psi}})\, n^{1/p}. \tag{23}$$

Подставляя оценки (22) и (23) в (20), получаем (17).

Объединяя соотношения (15)–(17), получаем оценку (6) при всех $p \geq 2$. Если $0 < p < 2$, то (6) вытекает из уже доказанного, так как для любых $a_k \geq 0$, p и s таких, что $0 < p \leq s$, вследствие неравенства Гельдера справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{\gamma_n+1}\sum_{k=n}^{n+\gamma_n} a_k^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{\gamma_n+1}\sum_{k=n}^{n+\gamma_n} a_k^s\right)^{1/s}, \tag{24}$$

в котором γ_n — любое натуральное число. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Отправным моментом при доказательстве оценки (9) будет утверждение следствия 3 из [1], в силу которого с учетом леммы 7 из [2] справедливо такое утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (8). *Тогда если* $f \in C^{\overline{\Psi}} C$, *то для каждого* $n \in N$ *и для любого тригонометрического полинома* $t_{n-1}(\cdot)$ *степени* $n-1$ *в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x) = -\frac{\overline{\Psi}(n)}{\pi}\int\limits_{a_n \leq |t| \leq \pi/2} \Delta_n(x;t)\frac{\sin(nt+\theta_n)}{t}\,dt +$$

$$+ O(1)\overline{\Psi}(n)\|\Delta_n(x;t)\|_C, \tag{25}$$

в котором величины $\overline{\Psi}(n)$, $\Delta_n(x;t)$, θ_n *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в лемме* 1, *а* $a_n = \dfrac{1}{\eta(\psi_1;n)-n}$ *либо* $a_n = \dfrac{1}{\eta(\psi_2;n)-n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если $\eta(\psi_1;n) < n+1$, то сумма в (7) содержит единственное слагаемое, отвечающее значению $k = n$. В этом случае (9) следует из теоремы 5, приведенной в [1], согласно которой

$$\|\rho_n(t;x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(\psi_1;n)-n) + O(1)\right)\overline{\Psi}(n) E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{26}$$

Поэтому в дальнейшем достаточно считать, что $\eta(\psi_1;n) \geq n+1$. Кроме того, если окажется, что все числа $a_k < \pi/2$, то и тогда (14) доказано, так как согласно упомянутой лемме 7 из [2] для любого $b > 0$

$$\int\limits_{|t|>b} \Delta(x;t)\frac{\sin(nt+\theta_n)}{t}\,dt = O(1) E_n(f^{\overline{\Psi}}). \tag{27}$$

Принимая это во внимание и поступая так, как при доказательстве теоремы 1, считая сначала $p \geq 2$, получаем аналог соотношения (13), который с учетом оценки (16) запишется следующим образом:

$$R_n^p(f;x) \le 2\left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left|\frac{\overline{\psi}(k)}{\pi}\int\limits_{a_k\le|t|\le\pi/2}\Delta_n(x;t)\frac{\sin(kt+\theta_k)}{t}\,dt\right|^p\right)^{1/p} + $$

$$+ O(1)\,\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}}), \tag{28}$$

и для доказательства (9) остается показать, что

$$\sigma_2' = \left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left|\frac{\overline{\psi}(k)}{\pi}\int\limits_{a_k\le|t|\le\pi/2}\Delta_n(x;t)\frac{\sin(kt+\theta_k)}{t}\,dt\right|^p\right)^{1/p} \le$$

$$\le C_p\,\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}}). \tag{29}$$

Положим

$$\overline{a}_n = \max\left(a_k:\ a_k<\pi/2,\quad k\in[n,n+\gamma_n]\right).$$

Тогда

$$\sigma_2' \le C_p\left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left|\overline{\psi}(k)\int\limits_{\overline{a}_n\le|t|\le\pi/2}\Delta(x;t)\frac{\sin(kt+\theta_k)}{t}\,dt\right|^p\right)^{1/p} +$$

$$+ C_p\,\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}})\left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left(\int\limits_{a_k\le|t|\le\overline{a}_n}\frac{dt}{|t|}\right)^p\right)^{1/p}.$$

В [4, с. 510, 511] показано, что если $\psi_1 \in F$, то

$$\left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left(\int\limits_{a_k\le|t|\le\overline{a}_n}\frac{dt}{|t|}\right)^p\right)^{1/p} \le C_p. \tag{30}$$

Поэтому с учетом (11)

$$\sigma_2' \le C_p\,\overline{\psi}(n)\left[\left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left|\int\limits_{\overline{a}_n\le|t|\le\pi/2}\frac{\Delta(x;t)}{t}\sin kt\,dt\right|^p\right)^{1/p} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}\left|\int\limits_{\overline{a}_n\le|t|\le\pi/2}\frac{\Delta(x;t)}{t}\cos kt\,dt\right|^p\right)^{1/p}\right] + C_p\,\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}}). \tag{31}$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 1, положим

$$\varphi_n(t) = \begin{cases}\Delta_n(x;t), & \overline{a}_n\le|t|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & [|t|\le\overline{a}_n]\cup[\overline{a}_n\le|t|\le\pi],\end{cases}$$

и через α_k и β_k обозначим коэффициенты Фурье функции $\varphi_n(t)$. Тогда выражение (31) перепишется следующим образом:

$$\sigma_2' \le C_p \overline{\psi}(n) \left[\left(\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\alpha_k|^p \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\beta_k|^p \right)^{1/p} \right] + C_p \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}}). \tag{32}$$

Пользуясь оценкой (21), получаем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^p \right)^{1/p} \le C_p E_n(f^{\overline{\psi}}) \left(\int_{\overline{a}_n}^{\pi/2} \frac{dt}{t^{p'}} \right)^{1/p'} \le$$

$$\le C_p E_n(f^{\psi})(\eta(\psi; k') - k')^{1/p},$$

но если $\psi_1 \in F$, то, как показано в [4, с. 11],

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(k) - k}{\eta(k') - k'} \le K_2 < \infty \tag{33}$$

$$\forall\, k, k_1 \in [n, \eta(n)], \quad \eta(n) = \eta(\psi_1; n),$$

т. е.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^p \right)^{1/p} \le C_p E_n(f^{\overline{\psi}})(\eta(n) - n)^{1/p}.$$

Аналогично заключаем, что и

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^p \right)^{1/p} \le C_p E_n(f^{\overline{\psi}})(\eta(n) - n)^{1/p}.$$

Подставляя эти оценки в (32), получаем (26), а значит, и (9). Если $0 < p < 2$, то (9) следует из доказанного вследствие оценки (24).

***Замечание* 1.** Поскольку лемма 2 справедлива также в случае, когда $a_n = (\eta(\psi_2) - n)$, то при условии (8) оценка (9) будет выполняться и для величины

$$\overline{R}_n^p(f; x) = \left(\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\rho_k(f; x)|^p \right)^{1/p}, \tag{34}$$

в которой $\eta(n) = \eta(\psi_2; n)$ и $\gamma_n = [\eta(\psi_2; n)] - n + 1$, т. е.

$$\overline{R}_n^p(f; x) \le C_p \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}}). \tag{35}$$

***Замечание* 2.** Непосредственная проверка показывает, что если $\pm\psi_1 \in F$ и $\pm\psi_2 \in F$, то функция $\overline{\psi}(t) = (\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t))^{1/2}$ принадлежит к множеству $\mathfrak{M}$. Поэтому для нее имеют смысл функции $\eta(\overline{\psi}; t)$ и $\mu(\overline{\psi}; t)$, задающиеся формулами (3). Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$ *и* $\pm\psi_2 \in F$. *Тогда если в данной точке* t, $t \ge 1$, *справедливо неравенство* $\eta(\psi_1; n) < \eta(\psi_2; t)$, *то величина* $\eta(\overline{\psi}; t)$ *удовлетворяет условию*

$$\eta(\psi_1; t) \le \eta(\overline{\psi}; t) \le \eta(\psi_2; t). \tag{36}$$

Действительно, так как $\psi_2^2(\eta(\psi_1; t)) \ge \frac{1}{4}\psi_2^2(t)$, то

$$\overline{\psi}(\eta(\psi_1;t)) = \sqrt{\psi_1^2(\eta(\psi_1;t)) + \psi_2^2(\eta(\psi_1;t))} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}\psi_1^2(t) + \psi_2^2(\eta(\psi_1;t))} > \frac{1}{2}\overline{\psi}(t),$$

а значит, $\eta(\psi_1;t) \le \eta(\overline{\psi};t)$. Аналогично, так как $\psi_1^2(\eta(\psi_2;t)) < \frac{1}{4}\psi_1^2(t)$, то $\overline{\psi}(\eta(\psi_2;t)) < \frac{1}{2}\overline{\psi}(t)$ и, следовательно, $\eta(\overline{\psi};t) \le \eta(\psi_2;t)$. Из предложения 1 вытекает следующее.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (8). *Тогда существуют такие константы* K_1 *и* K_2, *что*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\overline{\psi};t) - t}{\eta(\psi_1;t) - t} \le K_2,$$
$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\overline{\psi};t) - t}{\eta(\psi_2;t) - t} \le K_2 \qquad \forall\, t \ge 1. \tag{37}$$

Из (37) следует, что равенство (25) будет выполняться и тогда, когда $a_n = (\eta(\overline{\psi};t) - n)^{-1}$. Отсюда приходим к выводу, что справедливо такое утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и при каждом* $p > 0$

$$R_n^p(f;x) = \left(\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\rho_k(f;x)|^p\right)^{1/p}, \tag{38}$$

где $\eta(v) = \eta(\overline{\psi};v)$ *и* $\gamma_n = [\eta(\overline{\psi};n)] - n + 1$. *Тогда если выполнено условие* (8), *то для любого* $f \in C^{\overline{\psi}}C$ *в каждой точке* x

$$R_n^p(f;x) \le C_p\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}}), \tag{39}$$

где C_p — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и по* $f \in C^{\overline{\psi}}C$.

Продолжим доказательство теоремы 2.

Докажем, что при выполнении условия (8′) справедливо (9′). В силу следствия 2 и оценок (102) из [1], а также леммы 7 из [2], получаем такое утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$ *и* $\pm\psi_2 \in F$. *Тогда если* $f \in C^{\overline{\psi}}C$, *то для любого* $n \in N$ *и для каждого тригонометрического полинома* $t_{n-1}(\cdot)$ *степени* $n-1$ *в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{a_n \le |t| \le \pi/2} \Delta_n(x;t)\frac{\sin nt}{t}\,dt +$$
$$+ \frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{a_n' \le |t| \le \pi/2} \Delta_n(x;t)\frac{\cos nt}{t}\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)\|\Delta_n(x;t)\|_C, \tag{40}$$

в котором величины $\overline{\psi}(n)$, $\Delta_n(x;t)$, a_n *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в леммах* 1 *и* 2, *а* $a_n' = (\eta(\psi_2;n) - n)^{-1}$.

Поскольку для каждого $f \in C^{\overline{\psi}}C$

$$\left|\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{a_n'\le|t|\le\pi/2}\Delta_n(x;t)\frac{\cos nt}{t}\,dt\right| \le 2\frac{|\psi_2(n)|}{\pi}\|\Delta_n(x;t)\|_C\int\limits_{a_n'}^{\pi/2}\frac{dt}{t} \le$$

$$\le O(1)|\psi_2(n)|\,\|\Delta_n(x;t)\|_C \ln^+(\eta(\psi_2;n)-n) \qquad (41)$$

и $\|\Delta_n(x;t)\|_C \le E_n(f^{\overline{\psi}})$, то вследствие (40) и (41), учитывая (8′), находим

$$\rho_n(f;x) = -\frac{|\psi_1(n)|}{\pi}\int\limits_{a_n\le|t|\le\pi/2}\Delta_n(x;t)\frac{\sin nt}{t}\,dt + O(1)|\psi_1(n)|E_n(f^{\overline{\psi}}).$$

Это равенство совпадает с (25), если в последнем положить $\overline{\psi}(n) = |\psi_1(n)|$ и $\theta_n = 0$. Поэтому, повторяя рассуждения из доказательства оценки (9), приходим к неравенству (9′).

2. Следствия из теорем 1 и 2. Порядки наилучших приближений. Выражения

$$V_{m-p}^m(f;x) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=m-p}^{m} S_k(f;x) \qquad (42)$$

называются суммами Валле Пуссена функции $f(\cdot)$. Это тригонометрические полиномы порядка $m-1$. В таком случае

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f;x) = V_n^{2n-1}(f;x)$$

и

$$\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]} S_k(f;x) = V_n^{[\eta(n)]}(f;x),$$

$$\eta(n) = \eta(\psi_1;n) \quad (\text{или}\ \ \eta(n) = \eta(\psi_2;n),$$

$$\text{или}\ \ \eta(n) = \eta(\overline{\psi};n)), \ \ \text{а}\ \ \gamma_n = [\eta(n)] - n + 1.$$

Поскольку $V_n^{2n-1}(1;x) \equiv 1$, то из неравенства (6) при $p=1$ следует

$$|f(x) - V_n^{2n-1}(f;x)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\rho_n(f;x)\right| \le$$

$$\le R_n^1(f;x) \le O(1)\left(\int\limits_n^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \psi(n)\right)E_n(f^{\overline{\psi}}) \qquad (43)$$

$$\forall f\in C^{\overline{\psi}}C, \quad \pm\psi_1\in\mathfrak{M}_0, \quad \pm\psi_2\in\mathfrak{M}_0'.$$

Аналогично с учетом (14), (45) и (48) заключаем, что если $\pm\psi_1\in F$, $\pm\psi_2\in F$ и выполнено условие (8), то для любого $f\in C^{\overline{\psi}}C$ в каждой точке x

$$|f(x) - V_n^{[\eta(n)]}(f;x)| \le O(1)\overline{\psi}(n)E_n(f^{\overline{\psi}}), \qquad \eta(n) = \eta(\overline{\psi};n). \qquad (44)$$

Если $\pm\psi_1\in F$, $\pm\psi_2\in F$ и выполняется условие (8′), то для любого $f\in C^{\overline{\psi}}C$ в каждой точке x

$$|f(x) - V_n^{[\eta_1(n)]}(f;x)| \le O(1)|\psi_1(n)|E_n(f^{\overline{\psi}}), \qquad \eta_1(n) = \eta(\psi_1;n). \qquad (44')$$

Если $\pm\psi_2\in\mathfrak{M}_0'$, то для каждого $n\in N$

$$\int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt = \int_{2n}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + r_n(\psi_2), \tag{45}$$

причем

$$r_n(\psi_2) = \int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt \le |\psi_2(n)|\ln 2. \tag{46}$$

Кроме того, если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то согласно определению для каждого $t \ge 1$ выполняется неравенство $t(\eta(\psi;t)-t)^{-1} \le K$ или же $\eta(\psi;t) \ge (K+1)t$, где $K > 0$. Поэтому с учетом равенства $\psi(\eta(\psi;t)) = \frac{1}{2}\psi(t)$ приходим к заключению, что для каждого $q > 0$ и $m \in N$ найдется постоянная C_q, зависящая только от q, и такая, что будет справедливо неравенство

$$\psi(m) \le C_q^{\psi}(mq). \tag{47}$$

Поэтому в силу (43) и (45) – (47) заключаем, что если $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то для любой функции $f \in C^{\overline{\psi}}C$ в каждой точке x

$$|f(x) - V_n^{2n-1}(f;x)| \le O(1)\left(\int_{2n-1}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \overline{\psi}(2n-1)\right)E_n(f^{\overline{\psi}}). \tag{48}$$

Отсюда, полагая $C_{\infty}^{\overline{\psi}} = \{\, f\colon f \in C^{\overline{\psi}}C,\ \ \|f^{\overline{\psi}}\|_C \le 1 \}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ *и* $f \in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$. *Тогда для каждого* $n \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *степени* $\le n-1$ *такой, что*

$$E_n(f) \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C \le O(1)\left(\int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \overline{\psi}(n)\right), \tag{49}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и* $f \in C_{\infty}^{\psi}$.

Если $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ и $f \in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$, то при выполнении (8) в силу (44) имеем

$$\|f(x) - V_n^{[\eta(n)]}(f;x)\|_C \le O(1)\,\overline{\psi}(n), \tag{50}$$

а при выполнении (8′) в силу (44′) получим

$$\|f(x) - V_n^{[\eta_1(n)]}(f;x)\|_C \le O(1)|\psi_1(n)|. \tag{50′}$$

Поскольку для каждого $\psi \in \mathfrak{M}$ и для любого $t > 1$ $\psi(\eta(\psi;t)) = \frac{1}{2}\psi(t)$, то в правых частях (50) и (50′) вместо $\overline{\psi}(n)$ и $|\psi_1(n)|$ можно поставить соответственно $\overline{\psi}([\eta(\overline{\psi};n)])$ и $|\psi_1([\eta(\psi_1;n)])|$. Поэтому вследствие неравенств (50) и (50′) получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и* $f \in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$. *Тогда для каждого* $n \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *степени* $n-1$ *такой, что если выполнено условие* (8), *то*

$$E_n(f) \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C \le O(1)\,\overline{\psi}(n), \tag{51}$$

а если выполнено условие (8′), *то*

$$E_n(f) \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C \le O(1)|\psi_1(n)|. \tag{51′}$$

В равенствах (51) *и* (51′) $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in \in N$ *и по* $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$.

Пусть H_ω — класс 2π-периодических непрерывных функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$|f(t) - f(t')| \le \omega(|t-t'|), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0, \tag{52}$$

$$C^{\overline{\psi}} H_\omega = \{ f \colon f \in C^{\overline{\psi}},\ \ f^{\overline{\psi}} \in H_\omega \}.$$

Хорошо известно (см., например, [7, с. 204]), что

$$E_n(H_\omega) \le O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{53}$$

Поэтому вследствие соотношений (44), (44′) и (48) получаем следующий аналог теорем 3 и 4 для классов $C^{\overline{\psi}} H_\omega$.

Теорема 5. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega$. *Тогда для каждого* $n \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *степени* $n-1$ *такой, что*

$$E_n(f) \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C \le O(1)\left(\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \overline{\psi}(n)\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{54}$$

Если $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega$, *то для каждого* $n \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *степени* $n-1$ *такой, что если выполнено условие* (8), *то*

$$E_n(f) \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C \le O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{55}$$

а если выполнено условие (13′), *то*

$$E_n(f) \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C \le O(1)\,|\psi_1(n)|\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{55′}$$

В равенствах (54) – (55′) $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in N$ *и по* $f \in C^{\overline{\psi}} H_\omega$.

Как следует из утверждений § 6.5 в [6], порядки приближений в классах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ и $C^{\overline{\psi}} H_\omega$, установленные в теоремах 3 – 5, являются точными.

3. О сильной суммируемости рядов Фурье. В качестве другого примера приложения утверждений теорем 1 и 2 рассмотрим поведение величины

$$H_n^p(f;x;\lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k\,|\rho_k(f;x)|^p, \tag{56}$$

где λ_k — некоторая числовая последовательность и p — фиксированное положительное число. Такие величины впервые изучались в работах Харди и Литтлвуда [8, 9], где были заложены основы теории сильной суммируемости рядов Фурье.

Установим сначала следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, $p > 0$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \ge 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k \alpha_k^p$, *где*

$$\alpha_k = \int_k^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \overline{\psi}(k), \tag{57}$$

не возрастают при всех $k \geq n$. *Тогда при каждой* $f \in C^{\overline{\psi}} C$ *в каждой точке* x

$$H_n^p(f; x; \lambda) \leq$$

$$\leq C_p \left(n\lambda_n \alpha_n^p E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58}$$

где C_p *— величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и по* $f \in C^{\overline{\psi}} C$.

Доказательство. Положим $n_0 = n$, $n_1 = 2n_0, \ldots, n_i = 2n_{i-1}$. Тогда в силу неравенства (6) получим

$$H_n^p(f; x; \lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{2n_i - 1} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\lambda}_i \sum_{k=n_i}^{2n_i-1} |\rho_k(f; x)|^p \leq$$

$$\leq C_p \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\lambda}_i n_i \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}), \qquad \overline{\lambda}_i = \max\{\lambda_k : n_i \leq k \leq 2n_i - 1\}. \tag{59}$$

Заметим, что можно указать такую постоянную A, что при всех $k \in N$

$$\alpha_k \leq A\, \alpha_{2k}. \tag{60}$$

Действительно, учитывая (47) (при $q = 2$), имеем

$$\alpha_k = \int_k^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \overline{\psi}(k) = \int_{2k}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \int_k^{2k} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \overline{\psi}(k) \leq$$

$$\leq \int_{2k}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \overline{\psi}(k)(1 + \ln 2) \leq \int_{2k}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + A\overline{\psi}(2k) \leq A\, \alpha_{2k}.$$

Пусть теперь k_i — число, для которого $\overline{\lambda}_i \equiv \lambda_{k_i}$. По условию числа $\beta_k = \lambda_k \alpha_k^p$ не возрастают. Поэтому, учитывая (60), получаем

$$\overline{\lambda}_i \alpha_{n_i}^p \leq C_p \lambda_{k_i} \alpha_{n_i}^p \leq C_p \lambda_{k_i} \alpha_{k_i}^p \leq C_p \lambda_{n_i} \alpha_{n_i}^p. \tag{61}$$

Подставляя эту оценку в (59), находим

$$H_n^p(f; x; \lambda) \leq C_p \sum_{i=0}^{\infty} n_i \lambda_{n_i} \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \leq$$

$$\leq C_p \left(n_0 \lambda_{n_0} \alpha_{n_0}^p E_{n_0}^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{n_{i-1}} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right) \leq$$

$$\leq C_p \left(n\lambda_n \alpha_n^p E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right).$$

Теорема 6 доказана.

Заметим, что при $n = 1$ из (58) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p \leq C_p \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\int_k^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \overline{\psi}(k) \right)^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}). \tag{58'}$$

Отсюда, в частности, следует, что λ-средние величин $|\rho_k(f; x)|^p$ ведут себя подобно λ-средним величин наилучших приближений данной функции $f \in \in C^{\overline{\psi}} C$.

Теорема 7. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$, $p > 0$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \geq 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k \overline{\psi}^p(k)$ *не возрастают при всех* $k \geq n$. *Тогда если выполнено условие* (8), *то для каждой* $f \in C^{\overline{\psi}} C$ *при любом* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$H_n^p(f; x; \lambda) \leq$$

$$\leq C_p \left(\lambda_n (\eta(\overline{\psi}; n) - n) \overline{\psi}^p(n) E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \overline{\psi}^p(k) E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right). \qquad (62)$$

Если $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$, $p > 0$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \geq 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k |\psi_1(k)|^p$ *не возрастают при всех* $k \geq n$, *то при условии* (8′) *и* $f \in C^{\overline{\psi}} C$ *при любых* $n \in N$ *в каждой точке* x

$$H_n^p(f; x; \lambda) \leq$$

$$\leq C_p \left(\lambda_n (\eta(\psi_1; n) - n) |\psi_1(n)|^p E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\psi_1(k)|^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right). \qquad (62')$$

В неравенствах (62) *и* (62′) C_p *— величины, равномерно ограниченные по* $n \in \in N$ *и по* $f \in C^{\overline{\psi}} C$.

Доказательство. Положим $n_0 = n$, $n_i = [\eta(n_{i-1})] + 1$, $i \in N$, где $\eta(t) = \eta(\overline{\psi}; t)$. Тогда

$$H_n^p(f; x; \lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\lambda}_i \sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]} |\rho_k(f; x)|^p, \qquad \overline{\lambda}_i = \max\{\lambda_k : n_i \leq k \leq [\eta(n_i)]\}. \qquad (63)$$

Если выполнено условие (8), то в силу (9) имеем

$$\sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]} |\rho_k(f; x)|^p \leq C_p \overline{\psi}^p(n_i) \gamma_{n_i}, \qquad \gamma_{n_i} = [\eta(n_i)] - n_i + 1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Delta_i(\overline{\psi}). \qquad (64)$$

Поэтому

$$H_n^p(f; x; \lambda) \leq C_p \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\lambda}_i \overline{\psi}_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \Delta_i(\overline{\psi}) =$$

$$= C_p \Bigg(\overline{\lambda}_{n_0} \overline{\psi}^p(n_0) E_{n_0}^p(f^{\overline{\psi}}) \Delta_0(\overline{\psi}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}_i \overline{\psi}^p(n_i) E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \Delta_{i-1}(\overline{\psi}) \frac{\Delta_i(\overline{\psi})}{\Delta_{i-1}(\overline{\psi})} \Bigg). \qquad (65)$$

Далее покажем, что

$$\frac{\Delta_i(\overline{\psi})}{\Delta_{i-1}(\overline{\psi})} \leq K < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots. \qquad (66)$$

Эту оценку получим в качестве следствия из такого утверждения.

Предложение 3. *Если* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (8), *то* *функция* $\overline{\psi}(t) = (\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t))^{1/2}$ *также принадлежит к* F.

Доказательство. Как показано в [10, с. 695], если $\psi \in \mathfrak{M}$, то условие

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \le K_2 < \infty, \quad \eta(t) = \eta(\psi; t), \quad t \ge 1, \tag{67}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $\psi(\cdot)$ принадлежала к F. Согласно замечанию 2, $\overline{\psi} \in \mathfrak{M}$. Поэтому остается показать, что для $\overline{\psi}(\cdot)$ выполняется условие (67).

Положим $\eta_1(t) = \eta(\psi_1; t)$, $\eta_2(t) = \eta(\psi_2; t)$ и $\eta(t) = \eta(\overline{\psi}; t)$. Согласно предложению 1, при любом $t \ge 1$ значение $\eta(t)$ находится между значениями $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$. Покажем, что и значение $\eta(\eta(t))$ также лежит между $\eta_1(\eta_1(t))$ и $\eta_2(\eta_2(t))$. Пусть, например,

$$\eta_1(\eta_1(t)) \le \eta_2(\eta_2(t)), \tag{68}$$

тогда, принимая во внимание, что $\forall\ \varphi \in \mathfrak{M} \quad \varphi(\eta(\eta(t))) = \frac{1}{4}\varphi(t)$, $\eta(t) = \eta(\varphi; t)$, получаем

$$\overline{\psi}(\eta_1(\eta_1(t))) = \left(\psi_1^2(\eta_1(\eta_1(t))) + \psi_2^2(\eta_1(\eta_1(t)))\right)^{1/2} \ge$$

$$\ge \frac{1}{4}(\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t))^{1/2} = \overline{\psi}(\eta(\eta(t)))$$

и, значит, $\eta_1(\eta_1(t)) \le \eta(\eta(t))$. Аналогично убеждаемся и в том, что для каждого $t \ge 1$ $\eta(\eta(t)) \le \eta_2(\eta_2(t))$. Следовательно, $\eta(\eta(t))$ действительно находится между значениями $\eta_1(\eta_1(t))$ и $\eta_2(\eta_2(t))$.

Пусть и далее в данной точке t выполняется условие (68) и, например, условие

$$\eta_2(t) \le \eta(t) \le \eta_1(t). \tag{69}$$

Тогда, так как функция $\pm\psi_2 \in F$ и, следовательно, для нее справедливо (67), имеем

$$\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \le \frac{\eta_2(\eta_2(t)) - t}{\eta_2(t) - t} = \frac{\eta_2(\eta_2(t)) - \eta_2(t)}{\eta_2(t) - t} + 1 \le K_2 + 1. \tag{70}$$

С другой стороны, в силу (68), (69), (67) и (8)

$$\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \ge \frac{\eta_1(\eta_1(t)) - \eta_1(t)}{\eta_1(t) - t}\frac{\eta_1(t) - t}{\eta(t) - t} \ge$$

$$\ge K_1 \frac{\eta_1(t) - t}{\eta_2(t) - t} \ge \alpha > 0. \tag{70$'$}$$

Объединяя (70) и (70′), заключаем, что для функции $\overline{\psi}(t)$ выполняется (67), следовательно, она принадлежит к F.

Продолжим доказательство теоремы. В [6, с. 193] показано, что при $\psi \in F$ величина $\dfrac{\Delta_i(\psi)}{\Delta_{i-1}(\psi)}$ является равномерно ограниченной. Поэтому из предложения 3 следует неравенство (66).

Обозначим через k_i число, для которого $\overline{\lambda}_i = \lambda_{k_i}$, $k_i \in [n_i, [\eta(n_i)]]$. Поскольку числа $\lambda_k \overline{\psi}^p(k)$ не возрастают, то

$$\overline{\lambda}_i \overline{\psi}^p(n_i) = \lambda_{k_i} 2^p \overline{\psi}^p(\eta(n_i)) \le 2^p \lambda_{k_i} \overline{\psi}^p(k_i) \le 2^p \lambda_{n_i} \overline{\psi}^p(n_i). \tag{71}$$

Подставляя оценки (66) и (71) в (65), получаем

$$H_n^p(f;x;\lambda) \le C_p\left(\lambda_n \overline{\psi}^p(n) E_n^p(f^{\overline{\psi}})(\eta(n)-n) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n_i} \overline{\psi}^p(n_i) E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \Delta_{i-1}(\overline{\psi})\right) \le$$

$$\le C_p\left(\lambda_n \overline{\psi}^p(n) E_n^p(f^{\overline{\psi}})(\eta(n)-n) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]} \lambda_k \overline{\psi}^p(k) E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}})\right) =$$

$$= C_p\left(\lambda_n \overline{\psi}^p(n) E_n^p(f^{\overline{\psi}}(\eta(n)-n)) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \overline{\psi}^p(k) E_k^p(f^{\overline{\psi}})\right). \tag{72}$$

Неравенство (62) доказано. Ясно, что полагая $n_0 = n$, $n_i = [\eta(n_{i-1})] + 1$, $i \in N$, где $\eta(t) = \eta(\psi_1; t)$, и повторяя рассуждения, используемые при доказательстве оценки (62), получаем неравенство (62′). Теорема 7 доказана.

4. Аналоги теорем 1 и 2 в интегральной метрике.

Теорема 1′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$ *и*

$$R_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \rho_k(f;x). \tag{73}$$

Тогда для любой $f \in L^{\overline{\psi}}$

$$\| R_n(f;x)\|_1 \le O(1)\left(\int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \overline{\psi}(n)\right) E_n(f^{\overline{\psi}})_1, \tag{74}$$

где $\|\varphi\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\,dt$, $\overline{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$ *и* $E_n(\varphi)_1$ *— величина наилучшего приближения функции* $\varphi(\cdot)$ *в пространстве* L_1 *посредством тригонометрических полиномов* $t_{n-1}(\cdot)$ *степени* $\le n-1$:

$$E_n(\varphi)_1 = \inf_{t_{n-1}} \|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1, \tag{75}$$

а $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n *и по* $f \in L^{\overline{\psi}}$.

Доказательство. В [3, с. 396] получен аналог леммы 2 из [2], согласно которому справедливо следующее утверждение.

Лемма 1′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$ *и* a *— произвольное положительное число. Тогда если* $f \in L^{\overline{\psi}}$, *то при любом* $n \in N$ *почти всюду выполняется равенство* (10), *если в нем вместо* $\|\Delta_n(x;t)\|_C$ *использовать величину* $\|\Delta_n(x;t)\|_1$.

Принимая во внимание эту лемму, имеем

$$\| R_n(f;x)\|_1 = \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \lambda_k \rho_k(f;x)\right\|_1 \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \int\limits_{|t|\le \alpha/k} \Delta_n(x;t)\, \mathcal{J}_2(\psi_2;n;t)_1\,dt\right\|_1 +$$

$$+ \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\overline{\psi}(k)}{\pi} \int\limits_{a/k \le |t| \le \pi/2}^{\infty} \Delta_n(x;t) \frac{\sin(kt+\theta_k)}{t} dt \right\|_1 +$$

$$+ O(1) \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \overline{\psi}(k) \|\Delta_n(x;t)\|_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'. \tag{76}$$

Поступая так, как и при получении оценок (15) и (16), получаем

$$\sigma_1' \le 2E_n(f^{\overline{\psi}})_1 \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + O(1)\,\overline{\psi}(n) \right) \tag{77}$$

и

$$\sigma_3' \le O(1)\,\overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1. \tag{78}$$

Покажем, что и

$$\sigma_2' \le O(1)\,\overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1. \tag{79}$$

Имеем

$$\sigma_2' \le \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\overline{\psi}(n)}{\pi} \int\limits_{a/2n \le |t| \le \pi/2} \frac{\Delta_n(x;t)}{t} \sin(kt+\theta_k)\, dt \right\|_1 +$$

$$+ O(1)\,\overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1.$$

Отсюда, учитывая равенства (11), получаем

$$\sigma_2' \le \left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_{a/2n \le |t| \le \pi/2} \frac{\Delta_n(x;t)}{t} \sum_{k=n}^{2n} \left(\psi_1(k)\sin kt - \psi_2(k)\cos kt\right) dt \right\|_1 +$$

$$+ O(1)\,\overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1. \tag{80}$$

Выполняя преобразование Абеля, в силу монотонности функций ψ_1 и ψ_2 убеждаемся, что

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \sin kt \right| \le O(1)\, \psi_1(n) |t|^{-1},$$
$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \cos kt \right| \le O(1)\, \psi_2(n) |t|^{-1}. \tag{81}$$

Поэтому

$$\sigma_2' \le O(1) E_n(f^{\overline{\psi}})_1 \overline{\psi}(n) \left(\frac{1}{n} \int\limits_{a/2n \le |t| \le \pi/2} \frac{dt}{t^2} + 1 \right),$$

откуда сразу следует (79). Объединяя оценки (76) – (79), получаем (74).

Теорема 2′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \ge 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k \overline{\psi}(k)$ *не возрастают. Пусть, далее,*

$$R_n(f;x;\lambda) = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \lambda_k \rho_k(f;x), \tag{82}$$

где $\eta(t) = \eta(\overline{\psi}; t)$ *и* $\gamma_n = [\eta(n)] - n + 1$, $[\alpha]$ *— целая часть числа* α.

Тогда если выполнено условие (8), *то для каждой* $f \in L^{\overline{\psi}}$

$$\| R_n(f; x; \lambda) \|_1 \le C_\lambda \overline{\psi}(n) \lambda_n E_n(f^{\overline{\psi}})_1, \tag{83}$$

где C_λ *— величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и* $f \in L^{\overline{\psi}}$.

Доказательство. В [1, с. 1111] доказана лемма 5, согласно которой с учетом леммы 7 из [2] справедливо такое утверждение.

Лемма 2′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и выполнено соотношение* (8). *Тогда для каждой* $f \in L^{\overline{\psi}}$ *при любом* $n \in N$ *почти всюду выполняется равенство* (25), *если в нем вместо* $\| \Delta_n(x; t) \|_C$ *использована величина* $\| \Delta_n(x; t) \|_1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\eta(n) \ge n + 1$, так как в противном случае оценка (83) следует из теоремы 9, приведенной в [1], согласно которой в рассматриваемом случае

$$\| \rho_n(f; x) \|_1 \le \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1.$$

Учитывая утверждение леммы 2′, имеем

$$\| R_n(f; x; \lambda) \|_1 = \left\| \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \lambda_k \rho_k(f; x) \right\|_1 \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{\pi \gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \lambda_k \overline{\psi}(k) \int\limits_{a_k \le |t| \le \pi/2} \Delta_n(x; t) \frac{\sin(kt + \theta_k)}{t} dt \right\|_1 +$$

$$+ O(1) \overline{\psi}(n) \lambda_n E_n(f^{\overline{\psi}})_1. \tag{84}$$

Полагая, как и при доказательстве теоремы 2, $\overline{a}_n = \max(a_k\colon a_k < \pi/2,\ k \in [n, [\eta(n)]])$ и принимая во внимание оценку (30), находим

$$\| R_n(f; x; \lambda) \|_1 \le$$

$$\le O(1) \left(\left\| \int\limits_{\overline{a}_n \le |t| \le \pi/2} \frac{\Delta_n(x; t)}{t} \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \lambda_k \overline{\psi}(k) \sin(kt + \theta_k)\, dt \right\|_1 + \right.$$

$$\left. + \overline{\psi}(n) \lambda_n E_n(f^{\overline{\psi}})_1 \right). \tag{85}$$

Отсюда с учетом монотонности чисел $\beta_k = \lambda_k \overline{\psi}(k)$ и соотношений (81) имеем

$$\| R_n(f; x; \lambda) \|_1 \le O(1) E_n(f^{\overline{\psi}})_1 \lambda_n \overline{\psi}(n) \left(\frac{1}{\gamma_n} \int\limits_{\overline{a}_n \le t \le \pi/2} \frac{dt}{t^2} + 1 \right), \tag{86}$$

и чтобы получить (83), остается показать, что

$$\frac{1}{\gamma_n \overline{a}_n} \le O(1). \tag{87}$$

В [6, с. 186] показано, что если $\psi \in F$, то

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi; k) - k}{\eta(\psi; n) - n} \le K_2 \qquad \forall k \in [n, \eta(\psi; n)], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{88}$$

Поэтому

$$\frac{1}{\gamma_n \overline{a}_n} \le K_2 \frac{\eta(n) - n}{[\eta(n)] - n + 1} < K_2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{89}$$

и (87) доказано.

Теорема 2″. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \ge 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k \psi_1(k)$ *не возрастают. Пусть, далее,*

$$R_n(f; x; \lambda) = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \lambda_k \rho_k(f; x), \tag{90}$$

где $\eta(t) = \eta(\psi_1; t)$ *и* $\gamma_n = [\eta(n)] - n + 1$. *Тогда если выполнено условие* (8′), *то для каждой* $f \in L^{\overline{\Psi}}$

$$\| R_n(f; x; \lambda) \|_1 \le C_\lambda |\psi_1(n)| E_n(f^{\overline{\Psi}})_1, \tag{91}$$

где C_λ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и* $f \in L^{\overline{\Psi}}$.

Эта теорема является аналогом второй части теоремы 2 и ее доказательство получается путем повторения рассуждений из доказательства теоремы 2′ с использованием вместо леммы 2′ следующего утверждения, фактически доказанного в [1].

Лемма 2″. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и выполнено условие* (8′). *Тогда если* $f \in L^{\overline{\Psi}}$, *то для любого* $n \in N$ *и для любого тригонометрического полинома* $t_{n-1}(\cdot)$ *степени* $n-1$ *почти в каждой точке* x

$$\rho_n(f; x) = -\frac{\psi_1(n)}{n} \int\limits_{a_n \le |t| \le \pi/2} \Delta_n(a; t) \frac{\sin nt}{t} dt +$$

$$+ O(1) |\psi_1(n)| E_n(f^{\overline{\Psi}})_1. \tag{92}$$

где $a_n = \eta(\psi_1; t) - n$ *и* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \in N$ *и по* $f \in L^{\overline{\Psi}}$.

Из теоремы 1′, повторением рассуждений, приводящих к оценке (48), убеждаемся в справедливости того факта, что если $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то для любой функции $f \in L^{\overline{\Psi}}$

$$\|f(x) - V_n^{2n-1}(f; x)\|_1 \le$$

$$\le O(1) \left(\int\limits_{2n-1}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \overline{\psi}(2n-1) \right) E_n(f^{\overline{\Psi}})_1. \tag{93}$$

Отсюда, полагая $L_1^{\overline{\Psi}} = \{ f \colon f \in L^{\overline{\Psi}}, \|f^{\overline{\Psi}}\|_1 \le 1 \}$, получаем аналог теоремы 3.

Теорема 3′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$ *и* $f \in L_1^{\overline{\Psi}}$. *Тогда для каждого* $n \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *такой, что*

$$E_n(f)_1 \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_1 \le O(1) \left(\int\limits_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \overline{\psi}(n) \right), \tag{94}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и по* $f \in L_1^{\overline{\Psi}}$.

Из теорем 2′ и 2″ получаются следующие аналоги теорем 4 и 5.

Теорема 4′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и* $f \in L_1^{\overline{\Psi}}$. *Тогда для каждого* $n \in \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *степени* $n-1$ *такой, что если выполнено условие* (8), *то*

$$E_n(f)_1 \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_1 \le O(1)\,\overline{\psi}(n), \tag{95}$$

а если выполнено условие (8′), *то*

$$E_n(f)_1 \le \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_1 \le O(1)\,|\psi_1(n)|. \tag{95′}$$

В равенствах (95) *и* (95′) $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in \in N$ *и по* $f \in L_1^{\overline{\psi}}$.

Теорема 5′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и* $f \in L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}$, *где*

$$H_{\omega_1} = \{\varphi\colon \varphi \in L,\ \|\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)\|_1 \le \omega(t)\},$$

$\omega(t)$ — *заданный модуль непрерывности. Тогда для каждого* $n \in N$ *найдется тригонометрический полином* $t_{n-1}(\cdot)$ *вида* (42) *степени* $n-1$ *такой, что если выполнено условие* (8), *то*

$$E_n(f)_1 \le \|f(x) - t_{n-1}(f;x)\|_1 \le O(1)\,\overline{\psi}(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{96}$$

а если выполнено условие (8′), *то*

$$E_n(f)_1 \le \|f(x) - t_{n-1}(f;x)\|_1 \le O(1)\,|\psi_1(n)|\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{96′}$$

В равенствах (96) *и* (96′) $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in \in N$ *и по* $f \in L^{\overline{\psi}} H_{\omega_1}$.

Заметим, что, как следует из результатов, установленных в § 6.5 из [6], оценки наилучших приближений в теоремах 3′–5′ на соответствующих классах точны по порядку.

5. О сильной суммируемости рядов Фурье в интегральной метрике. Докажем аналог теоремы 7 в интегральной метрике.

Теорема 7′. *Пусть* $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \ge 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k \overline{\psi}(k)$ *не возрастают при всех* $k \ge n$. *Пусть, далее,*

$$H_n(f;x;\lambda)_1 = \left\|\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \rho_k(f;x)\right\|_1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{97}$$

Тогда если выполнено условие (8), *то для каждой* $f \in L^{\overline{\psi}}$

$$H_n(f;x;\lambda)_1 \le$$

$$\le C_\lambda\left(\lambda_n(\eta(\overline{\psi};n) - n)\,\overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1 + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k\,\overline{\psi}(k) E_k(f^{\overline{\psi}})_1\right). \tag{98}$$

Пусть $\pm\psi_1 \in F$, $\pm\psi_2 \in F$ *и последовательность* λ_k, $k \in N$, *такова, что* $\lambda_k \ge 0$ *и числа* $\beta_k = \lambda_k |\psi_1(k)|$ *не возрастают при всех* $k \ge n$. *Тогда если выполняется условие* (8′), *то для каждой* $f \in L^{\overline{\psi}}$

$$H_n(f;x;\lambda)_1 \le$$

$$\le C_\lambda\left(\lambda_n(\eta(\psi_1;n) - n)\,|\psi_1(n)|\,E_n(f^{\overline{\psi}})_1 + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k\,|\psi_1(k)|\,E_k(f^{\overline{\psi}})_1\right). \tag{98′}$$

В неравенствах (98) *и* (98′) C_λ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in \in N$ *и по* $f \in L^{\overline{\psi}}$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 7, положим $n_0 = n$, $n_i = [\eta(n_{i-1})] + 1$, $i \in N$, где $\eta(t) = \eta(\overline{\psi};t)$. Тогда с учетом (83) находим

$$H_n(f;x;\lambda)_1 \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]} \lambda_k \rho_k(f;x) \right\|_1 \le C_\lambda \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{n_i} \overline{\psi}(n_i) E_{n_i}(f_1^{\overline{\psi}} \Delta_i(\overline{\psi})).$$

Отсюда, учитывая (66) и монотонность чисел $\beta_k = \lambda_k \overline{\psi}(k)$, получаем

$$H_n(f;x;\lambda)_1 \le$$
$$\le C_\lambda \left(\gamma_n \lambda_n \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{i-1} \lambda_{n_i} \overline{\psi}(n_i) E_{n_i}(f^{\overline{\psi}})_1 \right) \le$$
$$\le C_\lambda \left(\gamma_n \lambda_n \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_{i-1}}^{[\eta(n_{i-1})]} \lambda_k \overline{\psi}(k) E_k(f^{\overline{\psi}})_1 \right) \le$$
$$\le C_\lambda \left(\lambda_n (\eta(n) - n) \overline{\psi}(n) E_n(f^{\overline{\psi}})_1 + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \overline{\psi}(k) E_k(f^{\overline{\psi}})_1 \right).$$

Оценка (98) получена. Понятно, что таким же способом получается и оценка (98′).

В заключение отметим, что в случае, когда $\psi_1(t) = \psi(t) \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right)$, $\psi_2(t) = \psi(t) \sin\left(\beta \frac{\pi}{2}\right)$, где β — некоторое фиксированное число, а $\psi(t)$ — функция из данного подмножества из $\mathfrak{M}$, все результаты данной работы совпадают с известными ранее, большинство из которых изложены в [6].

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
2. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274–291.
3. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Там же. – № 3. – С. 338–400.
4. *Пачулиа Н. А., Степанец А. И.* Сильная суммируемость рядов Фурье на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1988. – **44**, № 4. – С. 506–516.
5. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* О поведении группы уклонений на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 101–105.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
8. *Hardy G. N., Littlewood J. E.* Sur la série de Fourier d'une fonction à carré summable // C. r. Acad. sci. A. – 1913. – **153**. – P. 1307–1309.
9. *Hardy G. N., Littlewood J. E.* On the strong summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. – 1926. – **26**. – P. 273–286.
10. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688–702.

Получено *10.03.99*