УДК 517.9

В. А. Добрынский (Ин-т гидробиологии НАН Украины, Киев)

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА НЕБЛУЖДАЮЩИХ ТОЧЕК ПАРЫ СЦЕПЛЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

In the plane of parameters, we indicate the values for which plane endomorphisms constructed by the coupling of two same one-dimensional unimodal quadratic maps have an absorbing domain containing an attractor and nontrivial invariant subset of a nonwandering set.

У площині параметрів вказані значення, при яких ендоморфізми площини, які побудовані зчепленням двох однакових одновимірних унімодальних квадратичних відображень, мають поглинаючу область, де є атрактор та нетривіальна інваріантна підмножина множини неблукаючих точок.

В последнее время в литературе широко обсуждаются эффекты, возникающие при сцеплении ряда идентичных одномерных отображений [1, 2].

Пусть $f_a\colon \tau \to f_a(\tau)$ — однопараметрическое семейство отображений прямой R^1 в себя. Сцепление пары таких отображений может быть проведено различными способами. Чаще всего рассматриваются отображения вида

$$(x, y) \to \big(f_a(x) + \zeta(f_a(y) - f_a(x)),\, f_a(y) + \zeta(f_a(x) - f_a(y))\big), \tag{1}$$

где $(x, y) \in R^2$ [1, 2]. Очевидно, они имеют свойство симметрии (относительно замен $x \to y$, $y \to x$), вследствие чего при любых значениях параметров a и ζ имеют одномерное инвариантное многообразие в виде главной диагонали $x = y$, на которой они совпадают с f_a.

Одним из наиболее изученных классов гладких одномерных систем является семейство отображений вида $\tau \to 1 - a\tau^2$. Ниже исследуются отображения (1) с $f_a(\tau) = 1 - a\tau^2$, т. е. рассматривается двупараметрическое семейство эндоморфизмов плоскости вида

$$\Phi\colon (x, y) \to \big(1 - a(1 - \zeta)x^2 - a\zeta y^2,\, 1 - a(1 - \zeta)y^2 - a\zeta x^2\big), \tag{2}$$

где a и ζ — параметры такие, что $0 < a < 2$ и $0 < \zeta < 1$.

Толчком для изучения свойств этого класса отображений послужила статья [2], содержащая ряд результатов численного анализа свойств семейства отображений, которое (с точностью до замены координат) совпадает с (2).

Обозначим через $\mathrm{NW}(\Phi)$ и $\mathrm{Per}(\Phi)$ соответственно множества неблуждающих и периодических точек Φ, Γ — множество значений параметра a, при которых f_a — топологически перемешивающее на $[f_a^2(0), f_a(0)]$ отображение. (Как известно [3 – 6], мера Лебега множества Γ больше нуля.)

Отображение Φ имеет четыре неподвижные точки: P с координатами $x_P = y_P = (\sqrt{4a+1}-1)/(2a)$, Q с координатами $x_Q = y_Q = -2/(\sqrt{4a+1}-1)$, T с координатами $x_T = -y_T - \dfrac{1}{a(1-2\zeta)} = -\dfrac{1}{2a(1-2\zeta)} + \sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1-4\zeta}{4a^2(1-2\zeta)^2}}$ и Z с координатами $x_Z = -y_Z - \dfrac{1}{a(1-2\zeta)} = -\dfrac{1}{2a(1-2\zeta)} - \sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1-4\zeta}{4a^2(1-2\zeta)^2}}$. Собственные числа дифференциала $D\Phi$ в P и Q равны соответственно $-2a$ и $-2a(1-2\zeta)$. Таким образом, если $a \in (1, 2)$, а $\zeta \in \left(0, \dfrac{2a-1}{4a}\right)$, то оба они по модулю больше 1 и, следовательно, обе эти точки — репеллеры (неустойчивые узлы). Что же касается собственных чисел $D\Phi$ в точках T и Z, то они равны $-\dfrac{1-\zeta}{1-2\zeta} \pm \sqrt{\left(\dfrac{1-\zeta}{1-2\zeta}\right)^2 - 4\zeta + 4a(1-2\zeta)}$. При $\zeta \to 0$ эти величины сходятся к $-1 \pm \sqrt{1+4a}$. Поскольку $\left|-1 \pm \sqrt{1+4a}\right| > 1$ при $a \in (1, 2)$, то для достаточно малых $\zeta > 0$ точки T и Z — репеллеры.

Обозначим через $K_\Phi := K_x \cup K_y$, где $K_x := \{(x, y) \colon x = 0\}$, $K_y := \{(x, y) \colon y = 0\}$, критическое множество отображения Φ. (Напомним, что критическим для отображения Ψ называется множество точек, в которых якобиан $D\Psi$ обращается в нуль или же вообще не существует [7, 8].) Поскольку $\Phi\colon (t, 0) \to (1 - a(1-\zeta)t^2,\ 1 - a\zeta t^2)$ и $\Phi\colon (0, t) \to (1 - a\zeta t^2, 1 - a(1-\zeta)t^2)$, то $\Phi(\{(x, y)\colon y = 0\}) = \{(x, y)\colon y = 1 + \dfrac{\zeta}{1-\zeta}(x-1), x \le 1\}$, $\Phi(\{(x, y)\colon x = 0\}) = \{(x, y)\colon y = 1 + \dfrac{1-\zeta}{\zeta}(x-1), x \le 1\}$. Объединение этих множеств дает $\Phi(K_\Phi)$. Нетрудно показать, что $\Phi(R^2) = \left\{ (x, y)\colon 1 + \dfrac{1-\zeta}{\zeta}(x-1) \le y \le 1 + \dfrac{\zeta}{1-\zeta}(x-1), x \le 1 \right\}$.

Обозначим через $O = (0, 0)$ начало координат и рассмотрим ромб $BDEF$, где $B = (1, 1)$, $D = (1-2\zeta, -1+2\zeta)$, $E = (-1, -1)$, $F = (-1+2\zeta, 1-2\zeta)$. Оси координат делят ромб на четыре части. Пусть $A = \left(0, 1 - \dfrac{\zeta}{1-\zeta}\right)$, $C = \left(1 - \dfrac{\zeta}{1-\zeta}, 0\right)$, $H = \left(0, -1 + \dfrac{\zeta}{1-\zeta}\right)$, $G = \left(-1 + \dfrac{\zeta}{1-\zeta}, 0\right)$ — точки пересечения осей координат со сторонами ромба. Рассмотрим образы четырехугольников $OABC$, $OCDH$, $OHEG$ и $OAGF$. Поскольку Φ — диффеоморфизм каждого из четырехугольников на его образ, достаточно найти координаты образов их вершин. Вычисляя, находим

$$\Phi(O) = B = (1, 1),$$

$$\Phi(A) = \Phi(H) = \left(1 - a\zeta\left[1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}\right]^2, 1 - a(1-\zeta)\left[1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}\right]^2\right),$$

$$\Phi(B) = \Phi(E) = (1-a, 1-a),$$

$$\Phi(C) = \Phi(G) = \left(1 - a(1-\zeta)\left[1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}\right]^2, 1 - a\zeta\left[1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}\right]^2\right),$$

$$\Phi(D) = \Phi(F) = (1 - a(1-2\zeta)^2, 1 - a(1-2\zeta)^2),$$

и так как $1-a(1-2\zeta)>1-a$, то на диагонали $y=x$ точка $\Phi(B)=\Phi(E)$ лежит левее и ниже точки $\Phi(D)=\Phi(F)$.

Покажем, что на прямой $y = 1+\frac{\zeta}{1-\zeta}(x-1)$ точка $\Phi(C)=\Phi(G)$ лежит правее и выше точки F, т. е. выполняется неравенство $-1+2\zeta<1-a(1-\zeta)\left[1-\frac{\zeta}{1-\zeta}\right]^2$. Действительно, так как $0<1-\frac{\zeta}{1-\zeta}<1$ при $0<\zeta<\frac{1}{2}$, то $1-a(1-\zeta)\left[1-\frac{\zeta}{1-\zeta}\right]^2>1-a(1-\zeta)\left[1-\frac{\zeta}{1-\zeta}\right]=1-a(1-2\zeta)$, что больше $-1+2\zeta$ при $\zeta>\frac{2-a}{2(1-a)}$. Однако последняя величина меньше 0 при $1<a<2$. Следовательно, указанное выше неравенство и в самом деле выполняется при $a\in(1,2)$ и $\zeta\in\left(0,\frac{2a-1}{4a}\right)$. Таким образом, $\Phi(OABC)=\Phi(OHEG)\supset\Phi(OCDH)=\Phi(AOGF)$. Как следствие получаем $\Phi(BDEF)=\Phi(OABC)\subset BDEF$.

Обратим внимание, что ромбоид $\Phi(OABC)$ образован парами отрезков, принадлежащих $\Phi(K_\Phi)$ и $\Phi^2(K_\Phi)$.

Пусть $V\subset R^2$. Обозначим через $\operatorname{Int}V$ и $\overline{V}$ внутренность и замыкание V.

Лемма. *Для произвольных* $a\in(1,2)$ *и* $\zeta\in\left(0,\frac{2a-1}{4a}\right)$ *существует* $U\subset R^2$ *такая, что* $U\supset BDEF$, $\Phi(\overline{U})\subset\operatorname{Int}U$ *и* $\bigcap_{j=0}^{\infty}\Phi^j(\overline{U})=\Phi(BDEF)$.

Доказательство. Выбирая U в виде γ-окрестности ромба $BDEF$, где $\gamma=\gamma(a,\zeta)>0$ — достаточно малая величина, и принимая во внимание изложенные выше рассуждения, нетрудно убедиться в том, что $\Phi(\overline{U})\subset\operatorname{Int}U$. Это означает также, что $\Phi^j(\overline{U})\subset\Phi^{j-1}(\overline{U})$ для любого натурального j. Более того, вычисленне нескольких последовательных итераций $\overline{U}$ показывает, что существует натуральное Ω такое, что $\Phi^\Omega(\overline{U})\subset BDEF$.

Теорема 1. *Для произвольных* $a\in(1,2)$ *и* $\zeta\in\left(0,\frac{2a-1}{4a}\right)$ *отображение* Φ *имеет аттрактор внутри ромбоида* $\Phi(OABC)$.

Доказательство. Теорема является прямым следствием леммы и изложенных выше рассуждений.

Рассмотрим отображения, обратные к Φ. Имеем четыре таких отображения, а именно:

$$\Phi_{(1)}^{-1}:\ (x,y)\to\big(g(x,y),h(x,y)\big),\qquad \Phi_{(2)}^{-1}:\ (x,y)\to\big(g(x,y),-h(x,y)\big),$$

$$\Phi_{(3)}^{-1}:\ (x,y)\to\big(-g(x,y),-h(x,y)\big),\qquad \Phi_{(4)}^{-1}:\ (x,y)\to\big(-g(x,y),h(x,y)\big),$$

где

$$g(x,y):=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{\zeta y-(1-\zeta)x}{a(1-2\zeta)}},\qquad h(x,y):=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{\zeta x-(1-\zeta)y}{a(1-2\zeta)}}.$$

Определены они на $\Phi(R^2)$ и отображают его на разные квадранты R^2. Точнее

$$\Phi_{(1)}^{-1}(\Phi(R^2)) = Q_1, \quad \Phi_{(2)}^{-1}(\Phi(R^2)) = Q_2,$$

$$\Phi_{(3)}^{-1}(\Phi(R^2)) = Q_3, \quad \Phi_{(4)}^{-1}(\Phi(R^2)) = Q_4,$$

где $Q_1 := \{(x, y):\ x \geq 0, y \geq 0\}$, $Q_2 := \{(x, y):\ x \geq 0, y \leq 0\}$, $Q_3 := \{(x, y):\ x \leq 0, y \leq 0\}$, $Q_4 := \{(x, y):\ x \leq 0, y \geq 0\}$. Очевидно также, что $\Phi_{(1)}^{-1}(\Phi(OABC)) = OABC$, $\Phi_{(2)}^{-1}(\Phi(OCDH)) = OCDH$, $\Phi_{(3)}^{-1}(\Phi(OABC)) = OHEG$ и $\Phi_{(4)}^{-1}(\Phi(OCDH)) = AOGF$.

Обозначим $\Lambda = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{-j}((0,0))} \cap \Phi(OABC)$.

Теорема 2. *Для произвольного* $a \in \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, 2\right) \cap \Gamma$ *существует* $\zeta_a > 0$ *такое, что для любого* $\zeta \in (0, \zeta_a)$ $\Lambda = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{-j}(\Phi(B)B)} \cap \Phi(OABC)$ *— нетривиальное подмножество множества* $\mathrm{NW}(\Phi)$.

Доказательство. Обозначим через $\hat{\Phi} = \Phi|_{\Phi(B)B}$ ограничение Φ на отрезок $\Phi(B)B$. Очевидно, $\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{-j}((0,0)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}^{-m}((0,0))\right)$. Покажем, что $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{-j}((0,0))} \supset \Phi(B)B$. В самом деле, как уже отмечалось, при $a \in \Gamma$ действие f_a на $[f_a^2(0), f_a(0)]$ является топологически перемешивающим [3 – 6] и, таким образом, $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} f_a^{-j}(0)} \supset [f_a^2(0), f_a(0)]$. Замечая, что действие $\hat{\Phi}$ на $\Phi(B)B$ топологически эквивалентно действию f_a на $[f_a^2(0), f_a(0)]$, находим $\overline{\bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}^{-m}((0,0))} \supset \Phi(B)B$. Следовательно, при $a \in (1, 2) \cap \Gamma$ $\Lambda = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{-j}(\Phi(B)B)} \cap \Phi(OABC)$ — нетривиальное инвариантное подмножество ромбоида $\Phi(OABC)$. Докажем, что $\Lambda \subset \mathrm{NW}(\Phi)$.

Пусть $\{U_j\}_{j=1}^{J}$ — произвольное конечное покрытие Λ открытыми в $R^2 \cap \Phi(OABC)$ окрестностями такими, что $\Lambda \cap U_j \neq \varnothing$ для всех j. Зафиксируем некоторое j. Согласно определению существует $M = M(j)$ такое, что $\Phi^M(U_j) \ni (0, 0)$. А так как $\hat{\Phi}$ — топологически перемешивающее на $\Phi(B)B$ отображение, то найдется $L = L(j)$ такое, что $\Phi^{M+L}(U_j) \supset \Phi(B)B$. Докажем, что существует $N = N(j)$ такое, что $\Phi^{M+L+N}(U_j) \supset OABC$. Заметим, прежде всего, что в целом (т. е. глобально) $\Phi_{(1)}^{-1}$ является сжатием $OABC$ в $\Phi_{(1)}^{-1}(OABC)$, $\Phi_{(1)}^{-1}(OABC)$ в $\Phi_{(1)}^{-2}(OABC)$ и при этом $\Phi_{(1)}^{-2}(OABC) \subset \mathrm{Int}(OABC)$. Покажем, что для любого $a \in \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, 2\right) \cap \Gamma$ найдется $\zeta_a > 0$ такое, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_{(1)}^{-n}(OABC) = S$ — точка отрезка OB при $0 < \zeta < \zeta_a$.

Действительно, вычисляя значения координат точек границы множества $\Phi_{(1)}^{-2}(OABC)$, нетрудно убедиться в том, что

$$\Phi_{(1)}^{-2}(OABC) \subset \left\{(x, y)\colon x \geq \sqrt{\frac{1}{a} - \left(\frac{1-\zeta}{a(1-2\zeta)}\right)^{3/2}},\ y \geq \sqrt{\frac{1}{a} - \left(\frac{1-\zeta}{a(1-2\zeta)}\right)^{3/2}}\right\}.$$

Оценивая затем величину якобиана $\|D\Phi\|$, находим, что на $\Phi_{(1)}^{-2}(OABC)$ $\|D\Phi(\zeta)\| \overset{\text{df}}{=} 4a^2(1-2\zeta)xy \geq 4a^2(1-2\zeta)\left[\frac{1}{a} - \left(\frac{1-\zeta}{a(1-2\zeta)}\right)^{3/2}\right]$. Поскольку $\|D\Phi(0)\| = 4a - 4\sqrt{a} > 1$ при $a > \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$, то (вследствие непрерывности) для всех $a \in \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, 2\right)$ существуют $\tilde{\zeta}_a > 0$ такие, что $\|D\Phi(\zeta)\| > 1$ при $0 < \zeta < \tilde{\zeta}_a$. Ясно, что при таких ζ площадь $S = 0$. Докажем, что S — точка. Очевидно это так, если $\Phi_{(1)}^{-1}$ — сжатие по всем направлениям. Последнее действительно имеет место, когда в произвольной точке множества $\Phi_{(1)}^{-2}(OABC)$ оба собственных числа γ_1, γ_2 дифференциала $D\Phi$ по модулю больше 1. Вычисляя, находим

$$\gamma_i(\zeta) = -a(1-\zeta)(x+y) \pm \sqrt{a^2(1-\zeta)^2(x-y)^2 + 4a^2\zeta^2 xy}.$$

Поскольку $\gamma_i(0) = -a(x+y) \pm a(x-y)$ при $\zeta = 0$ и $|\gamma_i(0)| > 2\sqrt{a - \sqrt{a}} > 1$ при $a \in \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, 2\right)$, то существует $\hat{\zeta}_a > 0$ такое, что $|\gamma_i(\zeta)| > 1$ для любого $\zeta \in (0, \hat{\zeta}_a)$ в произвольной точке множества $\Phi_{(1)}^{-2}(OABC)$. Полагая $\zeta_a = \min(\tilde{\zeta}_a, \hat{\zeta}_a)$, видим, что S — точка при $0 < \zeta < \zeta_a$. Последнее означает, что имеется $N = N(j)$ такое, что $\Phi_{(1)}^{-N}(OABC) \subset \Phi^{M+L}(U_j)$. Следовательно, $\Phi^{M+L+N+1}(U_j) = \Phi(OABC) \supset \overline{U}_k$ для всех k.

Пусть $\Omega = \max\{M(j) + L(j) + N(j) + 1\}$ по j. Тогда для любых U_i, $U_k \in \{U_j\}_{j=1}^J$ и произвольного натурального $\omega \geq \Omega$ справедливо соотношение $\Phi^{\omega}(U_j) = \Phi(OABC) \supset \overline{U}_k$ и, в частности, $\Phi^{\omega}(U_j) \supset \overline{U}_j$. Отсюда (в силу произвольности покрытия $\{U_j\}$) вытекает, что $\Lambda \subset \mathrm{NW}(\Phi)$.

Теорема 3. *Если a и ζ такие, как в теореме 2, то* $\Lambda \subset \overline{\mathrm{Per}(\Phi)}$.

Доказательство. Заметим, что выше фактически доказано больше, чем неблуждаемость Λ. В самом деле, пусть точка $z \in \Lambda \cap U_j$. Обозначим через $\hat{\Phi}^{-\omega}$ такую ветвь отображения, обратного к Φ^{ω}, что $\hat{\Phi}^{-\omega}(\overline{U}_j) \subset U_j$. Поскольку $\Phi^{\omega}(U_j) \supset \overline{U}_j$, то такое $\hat{\Phi}^{-\omega}$ существует и является нелинейным сжатием U_j. Тогда согласно теореме Брауэра о неподвижной точке [9, с. 361 – 370] найдется точка $\hat{z} \in U_j$ такая, что $\hat{\Phi}^{-\omega}(\hat{z}_j) = \hat{z}_j$, т. е. $\hat{z} \in \mathrm{Per}(\Phi) \cap U_j$. Аналогично показывается, что существуют периодические траектории, проходящие через любой набор окрестностей U_j. В силу произвольности покрытия, это значит, что $\overline{\mathrm{Per}(\Phi)} \supset \Lambda$.

В [10] доказано, что при $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cap \Gamma$ и достаточно малых $\zeta > 0$ отображение Φ в окрестности отрезка $\Phi(B)B$ имеет область с хаосом по Ли – Йорку [11], причем в этой области есть принадлежащие $\mathrm{Per}(\Phi) \setminus \Phi(B)B$ периодические точки со сколь-угодно большим периодом. Сказанное выше о структуре множества Λ позволяет предполагать, что данный хаос, по-видимому, принадлежит Λ.

1. *Pikovsky A. S., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J.

Phys. A: Math. Gen. – 1991. – **24**. – P. 4587 – 4597.
2. *Losson J., Mackey M.* Coupling induced statistical cycling in two diffusively coupled maps // Phys. D. – 1994. – **72**. – P. 324 – 342.
3. *Jacobson M.* Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps // Communs Math. Phys. – 1981. – **81**, № 1. – P. 39 – 88.
4. *Benedicks M., Carleson L.* On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$ // Ann. Math. – 1985. – **122**. – P. 1 – 25.
5. *Benedicks M., Carleson L.* Dynamics of the Hénon map // Ibid. – 1991. – **133**. – P. 73 – 169.
6. *Yong L.-S.*, Decay of correlations for certain quadratic maps // Communs Math. Phys. – 1992. – **146**. – P. 123 – 138.
7. *Добрынский В. А.* Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Докл. РАН. – 1995. – **341**, № 4. – С. 442 – 445.
8. *Добрынский В. А.* Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Мат. заметки. – 1995. – **58**, вып. 5 – С. 669 – 680.
9. *Неймарк Ю. И.* Методы точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
10. *Dobrynskiy V. A.* On properties of coupled quadratic mappings // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl.– 1999. – **35**. – P. 247 – 267.
11. *Li T.-Y., Yorke J. A.* Period three imply chaos // Amer. Math. Monthly. – 1975. – **82**. – P. 985 – 992.

Получено 31.10.97