УДК 517.5

В. Л. Мельник (Чернігів. пед. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВИ ГЛАДКОСТІ МЕЖІ ДЛЯ СИЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ ОПУКЛОСТІ ОБЛАСТІ

We construct a counter-example for a hypothesis which states that the strong linear convexity of a domain follows from the linear convexity if a set of singularities does not split a boundary.

Побудовано контрприклад до гіпотези, що сильна лінійна опуклість області випливає з лінійної опуклості, якщо множина особливостей не розбиває межу.

А. П. Южаков та В. П. Кривоколеско [1] показали достатність гладкості межі, щоб з локальної лінійної опуклості області можна було встановити глобальну лінійну опуклість. Виникає питання можливості зняття умови на гладкість межі в усіх її точках. Л. Я. Макарова допускала негладкість межі на деяких зліченних її підмножинах [2]. Ю. Б. Зелінський розглянув більш загальні множини особливостей [3].

Метою даної роботи є дослідження гіпотези, що лінійно опукла область буде сильно лінійно опуклою, якщо множина особливостей на межі не розбиває межу і множина точок гладкості скрізь щільна на межі. Побудований контрприклад показує, що ця гіпотеза не має місця.

Означення 1. *Область $D \subset \mathbb{C}^n$ називається лінійно опуклою (локально лінійно опуклою), якщо для кожної точки z_0 межі ∂D області D існує гіперплощина L, яка проходить через точку z_0 і не перетинає область $D: L \cap D = \varnothing$ (в деякому околі $U(z_0)$ точки $z_0: L \cap D \cap U(z_0) = \varnothing$).*

Означення 2. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ називається сильно лінійно опуклою, якщо для будь-якої прямої γ множини $\gamma \cap E$ і $\mathring{\gamma} \backslash \gamma \cap E$ зв'язні (через $\mathring{\gamma}$ позначено пряму γ, доповнену нескінченно віддаленою точкою $\mathring{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$).*

Нехай D — лінійно опукла область зі зв'язною межею, причому межа ∂D гладка в усіх її точках за винятком множини A такої, що A локально не розбиває ∂D і множина $\partial D \backslash A$ скрізь щільна в ∂D. Тоді всі перерізи D комплексними прямими зв'язні та однозв'язні [3]. Перевіримо гіпотезу про можливість заміни умови, щоб A локально не розбивало межу, глобальною умовою зв'язності $\partial D \backslash A$. Для цього побудуємо поверхні.

***Приклад* 1.** Задамо поверхню $S \subset \mathbb{R}^3$ рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де

$$F = \begin{cases} \sqrt{1-z^4} - \max(|x|, |y|) = 0, & \text{якщо } |x| \text{ або } |y| < \sqrt{1-z^2}; \\ \left(|x| - \sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(|y| - \sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}\right)^2 = 0, & \\ & \text{якщо } |x| \text{ або } |y| \geq \sqrt{1-z^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Ця поверхня симетрична відносно гіперплощин $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, тому достатньо дослідити її гладкість при обмеженнях $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$. При таких обмеженнях перше рівняння з (1) має вигляд

$$\sqrt{1-z^4} - x = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{4z^3}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2z^3}{\sqrt{1-z^4}}, \quad \text{якщо } x > y, \ z > 0.$$

Якщо $z = 0$, то в точці $z = 0$, $x = y = 1$ границі похідних справа і зліва від точки (1, 1, 0) не співпадають, а саме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \ x > y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -1 \quad \text{при} \quad z = 0, \ x < y. \tag{2}$$

Для другого рівняння з (1) одержимо

$$\left(x-\sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\right)^2 = 0,$$

$$\text{якщо} \quad x \geq \sqrt{1-z^2} \quad \text{і} \quad y \geq \sqrt{1-z^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\left(x - \sqrt{1-z^2}\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\left(y - \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\left(x - \sqrt{1-z^2}\right)\left(\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} + 2\left(y-\sqrt{1-z^2}\right)\right)\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} -$$
$$- 2\left(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\right)\left(\frac{-4z^3}{2\sqrt{1-z^4}}+\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\times$$
$$\times\left(x-\sqrt{1-z^2}+y-\sqrt{1-z^2}\right) - \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\left(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\right)\left(1-\frac{2z^2}{1+z^2}\right) =$$
$$= \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\left(\left(x-\sqrt{1-z^2}+y-\sqrt{1-z^2}\right) + \left(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\right)\left(1-\frac{2z^2}{1+z^2}\right)\right) =$$
$$= \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\left(x+y-2\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-z^4}+2z^2\sqrt{1-z^2}-\frac{2z^2\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Тут $\frac{\partial F}{\partial z}$ існує для довільного значення $z \neq \pm 1$. Якщо $z = \pm 1$, то $x = y = 0$ і $\frac{\partial F}{\partial z}$ також існує з геометричних міркувань, тому що існує єдина горизонтальна дотична площина до поверхні.

Із обчислення градієнта видно, що він існує і відмінний від нуля для всіх точок поверхонь, які задаються двома рівняннями, при $x > y$. Отже, гладкість може порушуватись тільки по лінії A склеювання поверхонь. А саме, при $x = \sqrt{1-z^4}$, $y = \sqrt{1-z^2}$. Зрозуміло, що гладкість в цих точках буде зберігатися, якщо градієнти обох поверхонь, які визначаються рівняннями, в точках склеювання будуть колінеарні.

Для другого рівняння з (1) в точках склеювання маємо

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x,y,z)\in A} = 2\left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x,y,z)\in A} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x,y,z)\in A} = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\Big(\sqrt{1-z^4} + \sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-z^4} +$$

$$+2z^2\sqrt{1-z^2} - 2z^2\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\Big) = \frac{4z^3\sqrt{1+z^2}-1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Перевіримо колінеарність градієнтів

$$z_1 = \left(-1, 0, \frac{-2z^3}{\sqrt{1-z^4}}\right)$$

і

$$z_2 = \left(2\left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}, 0, \frac{4z^3\left(\sqrt{1+z^2}-1\right)}{\sqrt{1+z^2}}\right)\right).$$

Рівність

$$-2\left(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\right) = -\frac{4z^3\left(\sqrt{1+z^2}-1\right)\sqrt{1-z^4}}{2z^3\sqrt{1+z^2}}$$

очевидна, тому поверхня S гладка для всіх точок, крім чотирьох $|x|=|y|=1$, $z=0$.

Зробивши в рівнянні поверхні $F(x, y, z)=0$ заміну змінної y на $\sqrt{y^2+u^2}$, одержимо поверхню обертання Q, яка також буде гладкою для всіх точок, за винятком двох кіл $|x|=\sqrt{y^2+u^2}=1$.

***Приклад* 2.** Задамо поверхню $Q\subset\mathbb{R}^3$ рівнянням $F(x, y, z)=0$, де

$$F(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{1+z^2} - \max\left(|x|, \left|\sqrt{y^2+u^2}\right|\right) = 0, \\ \qquad\qquad \text{якщо } |x| < \sqrt{1+z^2} \text{ або } \left|\sqrt{y^2+u^2}\right| < \sqrt{1+z^2}; \\ \left(|x|-\sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+u^2}-\sqrt{1-z^2}\right)^2 - \left(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\right)^2 = 0, \\ \qquad\qquad \text{якщо } |x| \ge \sqrt{1-z^2} \text{ або } \left|\sqrt{y^2+u^2}\right| \ge \sqrt{1-z^2}. \end{cases}$$

***Приклад* 3.** Нехай $D_1\subset\mathbb{C}^2$ — область, обмежена півколом $\{(x, z) : x^2 + z^2 = 1, z\ge 0\}$ і дугами

$$\left\{(x,z): \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + z^2 = \frac{4}{9}, z\le 0, x\le 0\right\}$$

та

$$\left\{(x,z): \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + z^2 = \frac{4}{9}, z\le 0, x\ge 0\right\}.$$

Легко бачити, що область D_1 локально опукла у всіх точках межі, за винятком точки $a=\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Нехай $G = D_1\times D_2 \subset \mathbb{C}^2$, де $D_2 = \{(y, u) : y^2+u^2\le 1\}$.

Згідно з теоремою 11.1, наведеною в [3], область G не буде сильно лінійно опуклою. Легко перевірити, що точками негладкості межі ∂G будуть точки множини $A = (\partial D_1 \times \partial D_2) \cup (a \times \partial D_2) \subset \partial G$.

Тепер розглянемо лінійно опуклу область D з особливостями на межі, яку побудуємо, використовуючи попередні приклади.

***Приклад* 4**. Нехай $D \subset \mathbb{C}^2$ — область, межа якої складається з двох частин: з поверхні Q з прикладу 2 і частини межі області G з прикладу 3, а саме її частини, заданої при $z \le 0$. Точками негладкості межі ∂D буде підмножина множини A, $A \supset A_1 = \{(x, y, z, u) : (x, y, z, u) \in A,\ z \le 0\}$.

Ця підмножина: 1) зв'язна, 2) не розбиває ∂G, 3) доповнення $\partial D \backslash A_1$ — скрізь щільна в ∂D множина.

Цей приклад ілюструє, які перешкоди виникають на шляху підсилення леми 7.5 в [3], де для встановлення сильної лінійної опуклості області вимагалося, щоб множина особливостей локально не розбивала межу. Було незрозуміло, чи можна замість локальної умови обмежитись глобальною зв'язністю $\partial D \backslash A$.

Наведений приклад показує, що зв'язності $\partial D \backslash A$ недостатньо для сильної лінійної опуклості області, тому що коли б область D була сильно лінійно опуклою, то такою ж була б і область G, адже ми змінили лише її опуклу частину.

1. *Южаков А.П., Кривоколеско В.П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, № 2. – С. 452 – 458.
2. *Макарова Л.Я.* Достаточные условия линейной выпуклости областей с почти гладкой границей // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976. – С.87 – 96.
2. *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 263 с.

Одержано 04.08.98