УДК 04.11

Т. В. Скрипник (Ін-т теорет. фізики НАН України, Київ)

КОПРИЄДНАНІ ОРБІТИ КОМПАКТНИХ ГРУП ЛІ ТА УЗАГАЛЬНЕНА СТЕРЕОГРАФІЧНА ПРОЕКЦІЯ

We generalize a notion of stereographic projection to the case of arbitrary compact Lie algebra and find an explicit form of the local complex parametrization of orbit of the corresponding group.

Поняття стереографічної проекції узагальнено на випадок довільної компактної алгебри Лі та знайдено явну форму локальної комплексної параметризації орбіти відповідної групи.

Вступ. Стереографічна проекція зі сфери S^2, вкладеної в простір $\mathbb{R}^3$ на одновимірний комплексний простір є добре відомою [1–3]. Якщо S^2 описується рівнянням $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = l^2$, то тоді можливо визначити майже скрізь регулярне відображення $R^3 \to \mathbf{C}$:

$$z_{\pm} = \frac{x_1 + ix_2}{x_3 \pm l}, \tag{1}$$

яке після обмеження на сферу S^2 стає координатним дифеоморфізмом, що дозволяє сконструювати локальну комплексну параметризацію сфери, вкладеної в евклідів простір: якщо $\vec{x} \in S_l^2$, то

$$x_1 = l\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad x_2 = l\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad x_3 = l\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{2}$$

Якщо врахувати, що $R^3 = \mathrm{su}(2)$, $S^2 = U(1)\backslash SU(2)$ — приєднана орбіта групи $SU(2)$, z — параметр нільпотентної підгрупи $Z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset SU^c(2)$, то отримаємо наступне узагальнення цієї конструкції. Нехай $\mathfrak{g}$ — компактна алгебра Лі, G — відповідна група Лі, G^C — її комплексифікація, H — її максимальний тор, K — централізатор деякого його підтору, $P = K^C N$ — параболічна підгрупа G^C з редуктивною частиною K^C і нільпотентним радикалом N. Нехай Z — контрградієнтна підгрупа до N. Під стереографічною проекцією будемо розуміти майже скрізь визначене відображення

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} Z,$$

що після обмеження на відповідну орбіту: $O_\Lambda \simeq K \backslash G$ (тут K — стабілізатор елемента $\Lambda \in \mathfrak{h}$, де $\mathfrak{h}$ — підалгебра Картана) стає координатним дифеоморфізмом.

Можна отримати прості аналоги формули (1) і формули локальної параметризації орбіти (2). Аналіз формули (1) показує, що визначення стереографічної проекції залежить від вибору підалгебри Картана $\mathfrak{h}$. Крім цього, формула (1) залежить від вибору „полюса" — точки перетину підалгебри Картана з фіксованою орбітою. Тому це відображення визначене не єдиним чином і може бути записане за допомогою $|W_K \backslash W_G|$ різних способів (W_G, W_K — групи Вейля груп G і K відповідно). Геометрично це означає, що стереографічна проекція є відображенням з алгебри $\mathfrak{g}$ у дотичний простір до орбіти в одному із полюсів.

Необхідність узагальнення поняття стереографічної проекції на коприєднані орбіти груп Лі пов'язана з теорією зображень, а саме, з геометричним квантуванням [2]. Дійсно, комплексні координати стереографічної проекції задаватимуть келерову поляризацію на відповідній орбіті і явне знання залежності координат алгебри від них необхідне для конструювання зображень цієї алгебри (та її комплексифікації) методом геометричного квантування [3].

Параметризація орбіти. Загальний випадок. Нехай $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, G, H, Λ, K, P, N, Z, W_G, W_K та орбіта O_Λ будуть визначені, як і у вступі. Легко бачити, що

$$O_\Lambda \simeq K \backslash G.$$

Згідно з теоремою Монтгомері

$$K \backslash G \simeq P \backslash G^C.$$

Використаємо цей дифеоморфізм для конструювання систем локальних комплексних карт на O_Λ. Може бути показано [4], що для групи G^C існує наступний розклад, що є наслідком розкладу Брюа [5]:

$$G^C = \bigcup_{w \in W_K \backslash W_G} PZw, \tag{3}$$

який дає систему локальних карт на $O_\Lambda \simeq M = K \backslash G$ [4]:

$$M \simeq P \backslash G^C \simeq \bigcup_{w \in W_K \backslash W_G} Zw.$$

Для класичних груп Лі приєднана дія співпадає з „обкладками": $Ad_g X = gXg^{-1}$. Тому можемо записати

$$O_\Lambda \simeq K \backslash G = \bigcup_{w \in W_K \backslash W_G} \bigcup_{z \in Z} (pzw)^{-1} \Lambda pzw = \bigcup_{w \in W_K \backslash W_G} w^{-1} X(z) w, \tag{4}$$

де $X(z) = (pz)^{-1} \Lambda pz$.

Оскільки G — компактна група Лі, то існує інволютивний антиавтоморфізм σ групи G^C такий, що G — множина його нерухомих точок. Тому $gg^\sigma = 1$, якщо $g \in G$. Має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Орбіта O_Λ може бути локально параметризована комплексними координатами підгрупи Z:*

$$X(z) = w^{-1} (n((zz^\sigma)^{-1}) a((zz^\sigma)^{-1}) z)^{-1} \Lambda n((zz^\sigma)^{-1}) a((zz^\sigma)^{-1}) zw, \tag{5}$$

де $z \in Z$.

Доведення. Це випливає з розкладу (3), застосованого до елемента g, формули (4) і умови „унітарності": $gg^\sigma = 1$, якщо $g \in G$. Дійсно, $g^\sigma g = w^\sigma z^\sigma p^\sigma pzw = 1$. Звідси $p^\sigma p = (zz^\sigma)^{-1}$. Нехай $p = n_p a_p$, $a \in K^C$, $n \in N$, — розклад елемента p, що відповідає розкладу Лендгленса параболічної підгрупи P. Майже для всіх елементів $g \in G^C$ визначено трикутний (узагальнений гауссів) розклад $g = n(g)a(g)z(g)$, $a(g) \in K^C$, $n(g) \in N$, $z(g) \in Z$. Можна показати, що елемент $(zz^\sigma)^{-1}$ завжди є розкладним, тому отримуємо $n_P = n((zz^\sigma)^{-1})$, $a_P = a((zz^\sigma)^{-1})$; підставляючи його в (4), маємо

$$X(z) = (pz)^{-1} \Lambda pz = (n((zz^\sigma)^{-1}) a((zz^\sigma)^{-1}) z)^{-1} \Lambda n((zz^\sigma)^{-1}) a((zz^\sigma)^{-1}) z,$$

що й доводить твердження.

Параметризація орбіти. Випадок унітарних груп. Щоб отримати локальну параметризацію орбіти в більш конкретному вигляді, будемо розглядати випадок $G = (S)U(n)$. Тоді $G^C = (S)Gl(n, \mathbb{C})$, інволюція σ стає просто ермітовим спряженням. Використаємо фіксовану підгрупу Картана H і впорядкування коренів таке, що Z буде підгрупою групи строго верхніх трикутних матриць. Тепер можемо параметризувати довільний елемент X алгебри $(s)u(n)$, що належить орбіті O_Λ, локальними комплексними келеровими координатами, за які ми вибрали параметри групи Z. Має місце наступна лема.

Лема. *Нехай* $X \in O_\Lambda \to \mathfrak{g}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\sqrt{-1}\lambda_1, \sqrt{-1}\lambda_2, \ldots, \sqrt{-1}\lambda_n)$ *(серед параметрів* λ_k *можуть бути рівні), тоді справедлива формула*

$$X_{i,j} = \sum_{l,m,k} \sqrt{-1}(-1)^{m+l}\lambda_l (z^{-1})_{ik} \frac{zz^\dagger\begin{pmatrix}1 & \ldots & l-1 & k\\ 1 & \ldots & l-1 & l\end{pmatrix}(zz^\dagger)\begin{pmatrix}1 & \ldots & l-1\\ 1 & \ldots\breve{m}\ldots & l\end{pmatrix}}{(zz^\dagger)\begin{pmatrix}1 & \ldots & l-1 & l\\ 1 & \ldots & l-1 & l\end{pmatrix}(zz^\dagger)\begin{pmatrix}1 & \ldots & l-1\\ 1 & \ldots & l-1\end{pmatrix}} (z)_{mj}, \quad (6)$$

що дає локальну комплексну параметризацію елемента алгебри, який належить відповідній орбіті.

Доведення. Перша формула — наслідок твердження 1. Використовуючи стандартні формули для розкладу Гаусса, отримуємо

$$n_{lm} = \frac{(zz^\dagger)^{-1}\begin{pmatrix}l & l+1 & \ldots & n\\ m & l+1 & \ldots & n\end{pmatrix}}{(zz^\dagger)^{-1}\begin{pmatrix}l & l+1 & \ldots & n\\ l & l+1 & \ldots & n\end{pmatrix}} = (-1)^{l+m}\frac{(zz^\dagger)\begin{pmatrix}1 & \ldots & l-1\\ 1 & \ldots\breve{m}\ldots & l\end{pmatrix}}{(zz^\dagger)\begin{pmatrix}1 & \ldots & l-1 & l\\ 1 & \ldots & l-1 & l\end{pmatrix}}.$$

Враховуючи, що K^C — централізатор Λ в G^C, маємо $X = z^{-1}n^{-1}\Lambda n z$. Звідси отримуємо формулу (6).

Приклад. Нехай $G = U(n)$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1 1_{n1}, \lambda_2 1_{n2})$, тоді $O_\Lambda = (U(n_1) \times \times U(n_2)) \setminus U(n)$. Підгрупа Z, що параметризує орбіту, складається з матриць вигляду $Z = \begin{pmatrix}1 & \hat{z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, де $\hat{z}$ — $n_1 \times n_2$-матриця. Підставляючи в загальну формулу (5), маємо

$$X(z) = \begin{pmatrix}(\lambda_1 1_{n1} + \lambda_2\hat{z}\hat{z}^\dagger)(1+\hat{z}\hat{z}^\dagger)^{-1} & (\lambda_1-\lambda_2)(1+\hat{z}\hat{z}^\dagger)^{-1}\hat{z}\\ (\lambda_1-\lambda_2)\hat{z}^\dagger(1+\hat{z}\hat{z}^\dagger)^{-1} & (\lambda_2 1_{n1} + \lambda_1\hat{z}^\dagger\hat{z})(1+\hat{z}^\dagger\hat{z})^{-1}\end{pmatrix}.$$

У цій формулі можна легко розпізнати пряме узагальнення формули (2). Дійсно, якщо покладемо $n=2$, $n_1 = n_2 = 1$ і будемо вимагати додатково $\operatorname{Tr} X = \lambda_1 + + \lambda_2 = 0$, $l = \lambda_1 = -\lambda_2$, то отримаємо

$$\begin{pmatrix}ix_3 & x_1 + ix_2\\ -x_1 + ix_2 & -ix_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l(1-z\bar{z})(1+z\bar{z})^{-1} & 2lz(1+z\bar{z})^{-1}\\ 2l\bar{z}(1+z\bar{z})^{-1} & -l(1-z\bar{z})(1+z\bar{z})^{-1}\end{pmatrix}.$$

Стереографічна проекція. У цьому пункті обернемо відображення (6) і отримаємо аналог формули (1) у випадку $G = (S)U(n)$. Щоб зробити це, деталізуємо структуру вироджених орбіт коприєднаного зображення. Нехай $n = = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ — розбиття числа n в суму цілих чисел. Кожному розбиттю відповідає певний тип початкової точки — характеру Λ і певний тип орбіти — стягового многовиду

$$O_\Lambda \simeq (U(n_1) \times U(n_2) \times \ldots \times U(n_r)) \setminus U(n).$$

Наприклад, грасманів многовид $(U(n_1) \times U(n_2)) \setminus U(n)$ відповідає розбиттю з $r = 2: \ n = n_1 + n_2$, невироджена орбіта — повний стяговий многовид $(U(1))^n \setminus U(n)$ — розбиттю з $r = n: \ n = 1 + 1 + \ldots + 1$. Нехай $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_1,$

$\lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r)$. У цьому випадку

$$z = \begin{pmatrix} \hat{1}_{11} & \hat{z}_{12} & \cdots & \cdots & \hat{z}_{1r} \\ 0 & \hat{1}_{22} & \hat{z}_{23} & \cdots & \hat{z}_{2r} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \hat{z}_{r-1r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \hat{1}_{nr} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \hat{p}_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hat{p}_{21} & \hat{p}_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \hat{p}_{r-1r} & 0 \\ \hat{p}_{r1} & \cdots & \cdots & \hat{p}_{rr-1} & \hat{p}_{rr} \end{pmatrix},$$

де $\hat{z}_{pq}$ та $\hat{p}_{pq}$ — $n_p \times n_q$-матриці.

Нехай $A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ j_1 & \ldots & j_k \end{pmatrix}$ — детермінант матриці, що утворена перетином i_1-, … …, i_k-го рядка та j_1-, …, j_k-го стовпця, $A\overline{\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ j_1 & \ldots & j_k \end{pmatrix}}$ — детермінант матриці, що утворена викреслюванням i_1-, …, i_k-го рядка та j_1-, …, j_k-го стовпця матриці A.

Справедливе наступне твердження, що зв'язує матричні елементи матриці $\hat{z}_{pq}$ з мінорами вищого порядку всієї матриці z.

Твердження 2. *Має місце наступна тотожність:*

$$(\hat{z}_{pq})_{(\alpha\beta)} = z\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \sum_{i=1}^{p} n_i & \ldots \\ 1 & \ldots & \sum_{i=1}^{p-1} n_i & \ldots & \widetilde{\sum_{i=1}^{p-1} n_i + \alpha} & \ldots & \sum_{i=1}^{p} n_i & \ldots & \sum_{i=1}^{q} n_i + \beta \end{pmatrix},$$

де ~ *над матричним індексом означає, що він опускається.*

Сформулюємо тепер теорему.

Теорема. *Нехай* $X \in \mathfrak{g}$, $z \in Z$, $\Lambda \in \mathfrak{h}$ *визначені так, як вище. Тоді формула*

$$z\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \sum_{i=1}^{k} n_i \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{\sum_{i=1}^{k} n_i} \end{pmatrix} = \frac{\displaystyle\sum_{\{i_1,\ldots,i_{\sum_{i=1}^{k} n_i}\} = \bigcup_{j=1}^{k} (\alpha_1^{(j)},\ldots,\alpha_{nj}^{(j)})} \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_l I)\overline{\begin{pmatrix} \alpha_1^{(l)} & \ldots & \alpha_{nl}^{(l)} \\ \sum_{s=1}^{l-1} n_s & \ldots & \sum_{s=1}^{l} n_s \end{pmatrix}}}{\displaystyle\sum_{\{i_1,\ldots,\sum_{i=1}^{k} n_i\} = \bigcup_{j=1}^{k} (\beta_1^{(j)},\ldots,\beta_{nj}^{(j)})} \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_l I)\overline{\begin{pmatrix} \beta_1^{(l)} & \ldots & \beta_{nl}^{(l)} \\ \sum_{s=1}^{l-1} n_s & \ldots & \sum_{s=1}^{l} n_s \end{pmatrix}}} \tag{7}$$

задає відображення з алгебри Лі $\mathfrak{g}$ *у нільпотентну підгрупу* Z, *дифеоморфну дотичному простору до орбіти* O_Λ *у полюсі* $\Lambda: \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} Z$, *що є еквіваріантним по відношенню до дії групи* G.

Ідея доведення теореми базується на тому, що для кожного $X \in O_\Lambda$ має місце зображення $(X - \lambda_i 1_n) = g^{-1}(\Lambda - \lambda_i 1_n)g$, яке дозволяє з точністю до множника, незалежного від „мінорних" індексів $j_1, \ldots, j_{n_k}$, виразити мінори

$$g\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{k-1} n_s + 1 & \ldots & \sum_{s=1}^{k} n_s \\ j_1 & \ldots & j_{n_k} \end{pmatrix}$$

матриці g через доповняльні мінори матриці $(X - \lambda_i 1_n)$. Скориставшись формулами Лапласа для розкладу мінорів матриці g [6] та тим фактом, що мінори матриці z виражаються дробово-лінійно через мінори матриці g [4], отримаємо твердження теореми. Оскільки, згідно з твердженням 2, матричні елементи матриці z виражаються через мінори вищого порядку матриці z, то теорема дає шукані формули для координат стереографічної проекції.

Зауваження. Щоб отримати стереографічну проекцію, асоційовану з іншими полюсами Λ^{w}, де $w \in W_K \backslash W_G$, потрібно у формулі (7) зробити заміну $X \to X^{w} = wXw^{-1}$.

У деяких випадках громіздка формула (7) може бути суттєво спрощена, якщо її записати у матричній формі. Найбільш просто вона виглядає для грасманових многовидів.

Наслідок. *Нехай* $\Lambda = (\lambda_1 1_{n1}, \lambda_2 1_{n2})$, *так що* $O_\Lambda = (U(n_1) \times \times U(n_2)) \backslash U(n)$, $z = \begin{pmatrix} 1_{n1} & \hat{z} \\ 0 & 1_{n2} \end{pmatrix}$. *Зобразимо матрицю* X *у блочній формі* $X = \begin{pmatrix} \hat{X}_{11} & \hat{X}_{12} \\ \hat{X}_{21} & \hat{X}_{22} \end{pmatrix}$. *Тоді*

$$\hat{z} = \hat{X}_{12}(\hat{X}_{22} - \lambda_1 \hat{1})^{-1}. \tag{8}$$

Легко бачити, що формула (8) є прямим узагальненням формули (1). Дійсно, у випадку $G = SU(2)$ маємо

$$X = \begin{pmatrix} \hat{X}_{11} & \hat{X}_{12} \\ \hat{X}_{21} & \hat{X}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $z = i(x_1 + ix_2)(x_3 - l)^{-1}$, тобто одержали формулу (1) для звичайної стереографічної проекції.

Зауваження. У випадку інших класичних компактних груп Лі стереографічна проекція задається аналогічними формулами. Для доведення цього достатньо відзначити, що вони можуть бути реалізовані як підгрупи в $SU(n)$, так що картанівські підгрупи є підгрупами групи діагональних матриць, а відповідні нільпотентні підгрупи Z є підгрупами групи верхньо-трикутних матриць [1].

1. *Голод П. І., Клімик А. У.* Математичні основи теорії симетрії. – Київ: Наук. думка, 1992. – 367 с.
2. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. – М. : Мир, 1985. – 327 с.
3. *Кириллов А. А.* Геометрическое квантование // Динамические системы. – 1985. – 4. – С. 141 – 176.
4. *Голод П. І., Скрипник Т. В.* Явна реалізація незвідних зображень компактних груп Лі у просторах січних лінійних розшарувань // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 895 – 905.
5. *Warner G.*. Harmonic analysis on semisimple Lie groups. – Berlin etc. : Springer, 1972. – 530 p.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 548 с.

Одержано 07.06.99