УДК 517.5

А. В. Бондар (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ВІДКРИТИХ ВІДОБРАЖЕНЬ *

The well-known Men'shov and Gehring – Lehto theorems on the differentiability of topological maps of plane domains are generalized to the case of continuous open maps of many-dimensional domains.

Загальновідомі теореми Меньшова і Герінга – Лехто про диференційовність топологічних відображень плоских областей узагальнюються на випадок неперервних відкритих відображень багатовимірних областей.

1. Вступ. Нехай топологічне відображення $f\colon D \to \boldsymbol{R}^2$ області $D \subset \boldsymbol{R}^2$ має частинні похідні майже скрізь в D. Прийнято вважати, що теорема, яка стверджує, що у цьому випадку f диференційовне майже скрізь в D, належить Герінгу і Лехто. При цьому посилаються [1] на результат [2], опублікований ними у 1959 році. Але ще у 1931 році Д. Є. Меньшов довів значно сильнішу **теорему** [3]: *нехай з кожної точки z вимірної множини $E \subset D \subset \boldsymbol{R}^2$ виходять два промені $t_1(z)$, $t_2(z)$, що лежать на різних прямих; якщо для топологічного відображення $f\colon D \to \boldsymbol{R}^2$ виконується умова*

$$\varlimsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < \infty, \tag{1}$$

де $z + h \in t_k(z) \cap D$, то f диференційовна майже скрізь в D.

Як відзначено в [4], ця теорема та її доведення залишаються вірними для неперервних відкритих відображень.

У багатовимірному випадку ні теорема Д. Є. Меньшова, ні більш слабкий результат Герінга і Лехто не вірні, якщо в основу їх формулювання покласти вимогу існування частинних похідних, або скінченність верхньої границі, подібної до 1, вздовж n променів, що виходять з точки $x \in D \subset \boldsymbol{R}^n$.

Метою даної роботи є доведення теорем, які „правильно" узагальнюють на багатовимірний випадок теореми Герінга – Лехто та Меньшова. Так, теорема Герінга – Лехто виявляється вірною для довільного $n \geq 2$, коли в її формулюванні частинні похідні в точці $x \in D$ замінити на похідні вздовж $(n-1)$-вимірних площин, що проходять через цю точку та паралельних до координатних площин (теорема 1). Очевидно, що при $n = 2$ ці похідні співпадають із звичайними частинними похідними.

У багатовимірному аналогу теореми Меньшова (теорема 2) верхня границя, аналогічна до (1), береться вздовж деякого $(n-1)$-вимірного конуса $V(x)$ з вершиною в точці $x \in D \subset \boldsymbol{R}^n$. Оскільки при $n = 2$ конус $V(x)$ зводиться до двох променів, що виходять з точки x, то в цьому випадку теорема 2 збігається з класичною теоремою Д. Є. Меньшова, і, отже, є узагальненням останньої.

Суттєвою відмінністю багатовимірного випадку є те, що аналог теореми Ге-

---

* Виконана при частковій підтримці фонду INTAS (грант 94-1474).

рінга – Лехто не є прямим наслідком аналога теореми Меньшова у наведеному вище формулюванні. З метою усунення такого дисбалансу та отримання більш загального результату введено поняття конусоподібної множини, з допомогою якого сформульовано та доведено сильніший варіант теореми типу Меньшова (теорема 3), яка є новою і у двовимірному випадку і з якої багатовимірна теорема типу Герінга – Лехто випливає з очевидністю.

2. Основні результати. Нехай $f\colon D \to \boldsymbol{R}^m$ — відображення області $D \subset \subset \boldsymbol{R}^n$. Лінійний оператор $f'(a)\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ називається похідною (за Фреше) відображення f в точці $a \in D$, якщо виконується співвідношення

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\|}{\|h\|} = 0, \tag{2}$$

де $a + h \in D$.

Для $n \geq 2$ лінійний оператор $D_i^{n-1} f(a)\colon \boldsymbol{R}^{n-1} \to \boldsymbol{R}^m$ будемо називати i-ю, $i = 1, 2, \ldots, n$, частинною $(n-1)$-похідною відображення f в точці a, якщо співвідношення (2), в якому $f'(a)$ замінене на $D_i^{n-1} f(a)$, виконується за умови, що $h = (h_1, \ldots, h_{i-1}, 0, h_{i+1}, \ldots, h_n)$ і $a + h \in D$.

2.1. В цих позначеннях багатовимірний аналог теореми Герінга – Лехто формулюється так.

Теорема 1. *Нехай $f\colon D \to \boldsymbol{R}^m$ — неперервне і відкрите відображення області $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$. Припустимо, що майже в кожній точці $a \in D$, відображення f має частинні $(n-1)$-похідні $D_i^{n-1} f(a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді f має похідну $f'(a)$ майже в кожній точці $a \in D$.*

2.2. Нехай e — одиничний вектор в $\boldsymbol{R}^n$, $n > 1$, тобто елемент одиничної сфери $S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n\colon \|x\| = 1\}$, і $0 < \alpha < \pi/2$. Для довільної точки $x \in \boldsymbol{R}^n$ символом $V(x, e, \alpha)$ будемо позначати $(n-1)$-вимірний конус в $\boldsymbol{R}^n$ з вершиною в точці x і бісектрисою $b(x) = \{y \in \boldsymbol{R}^n\colon y = x + \lambda e,\ 0 \leq \lambda < \infty\}$, який складається з усіх променів l з початком в точці x, для яких кут $\angle(l, b(x))$ між l і $b(x)$ дорівнює α. Символами $\hat{V}(x, e, \alpha)$ і $\mathring{V}(x, e, \alpha)$ будемо позначати відповідно замкнений і відкритий конуси, утворені тими променями l з початком в точці x, для яких виконуються нерівності $0 \leq \angle(l, b(x)) \leq \alpha$ і $0 \leq \angle(l, b(x)) < \alpha$ відповідно. Тепер багатовимірний аналог теореми Меньшова можна сформулювати так.

Теорема 2. *Нехай D — область в $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$, і $f\colon D \to \boldsymbol{R}^m$ — неперервне відкрите відображення. Припустимо, що для кожної точки x вимірної підмножини $E \subset D$ задано такий конус $V(x, e(x), \alpha(x))$, що*

$$\varlimsup_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} < \infty,$$

де $x + h \in V(x, e(x), \alpha(x)) \cap D$. Тоді f має похідну (за Фреше) майже в усіх точках множини E.

2.3. Символом $B(x, r)$ будемо позначати n-вимірну кулю в $\boldsymbol{R}^n$ з центром в точці $x \in \boldsymbol{R}^n$ і радіусом $r > 0$.

Означення. *Замкнену підмножину*

$$W(x) = W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x)) \subset$$

$$\subset \hat{V}(x, e(x), \beta(x)) \setminus \mathring{V}(x, e(x), \alpha(x)) \subset \boldsymbol{R}^n$$

будемо називати конусоподібною множиною в точці $x \in \boldsymbol{R}^n$ *з параметрами* $e(x) \in S^{n-1}$, $0 < \alpha(x) \le \beta(x) < \pi/2$, $\delta(x) > 0$, *коли*

а) *для довільного* $\delta \le \delta(x)$ *множина*

$$W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x)) \cap \overline{B}(x, \delta)$$

є континуумом, тобто зв'язним компактом;

б) *для довільного континуума* $K \subset B(x, \delta(x)) \setminus W(x)$, *що перетинає множину* $\mathring{V}(x, e(x), \alpha(x))$, *має місце включення* $K \subset \mathring{V}(x, e(x), \beta(x))$.

***Зауваження* 1.** Очевидно, що для довільних $e \in S^{n-1}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\delta > 0$ множина $V(x, e, \alpha) \cap \overline{B}(x, \delta)$ є конусоподібною множиною в точці x з параметрами $e(x) = e$, $\alpha(x) = \alpha$, $\beta(x) = \alpha$, $\delta(x) = \delta$.

У введених позначеннях справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $f\colon D \to \boldsymbol{R}^m$ *— неперервне і відкрите відображення області* $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $n \ge 2$. *Припустимо, що для кожної точки* x *вимірної підмножини* $E \in D$ *задано таку конусоподібну множину* $W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x))$, *що*

$$\varlimsup_{y \to x} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{\|y - x\|} < \infty, \tag{3}$$

де $y \in W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x)) \cap D$. *Тоді* f *має похідну* $f'(a)$ *майже в усіх точках* $a \in E$.

3. Допоміжна лема. Для топологічного простору Y символом 2^Y, як це прийнято, позначаємо топологічний простір усіх замкнених підмножин $F \subset Y$, наділений експоненціальною топологією [5, с. 168]. У випадку, коли Y — метризований компакт, ця топологія збігається з топологією, породженою хаусдорфовою метрикою [6, с. 54]. Відображення $F\colon X \to 2^Y$ називається напівнеперервним зверху, коли для довільної замкненої підмножини $B \subset Y$ множина $A = \{x \in X\colon F(x) \cap B \ne \varnothing\}$ є замкненою в X.

Якщо X — підмножина в $\boldsymbol{R}^n$, $x_0 \in X$, і B^n — n-вимірна куля в $\boldsymbol{R}^n$ з центром в точці x_0, то непорожня множина $P = B^n \cap X$ називається відкритою порцією множини X, а множина $P' = \overline{B^n} \cap X$ — замкненою порцією цієї множини. Символом $\langle a, b \rangle$ позначаємо скалярний добуток двох векторів $a, b \in \in \boldsymbol{R}^n$.

Лема. *Нехай* $f\colon D \to \boldsymbol{R}^m$ *— неперервне відображення області* $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $n \ge \ge 2$, *і* X *— замкнена підмножина в* D. *Припустимо, що для кожної точки* x *підмножини* $Q \subset X$, *не першої категорії на* X, *задано таку конусоподібну множину* $W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x))$, *що*

$$\varlimsup_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} < \infty, \tag{4}$$

де $x + h \in W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x)) \cap D$.

Тоді знайдуться компактна порція P *множини* X, *константи* $L, \delta > > 0$, $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, *одиничний вектор* $e \in \boldsymbol{R}^n$, *і конусоподібні множини* $W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$, *з незалежними від точок* $x \in P$ *параметрами* e, α, β, δ, *такі, що*:

1) $W(x, e, \alpha, \beta, \delta) \subset D \quad \forall\, x \in P$;

2) $\|f(y) - f(x)\| \le L\|y - x\| \quad \forall\, y \in W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$;

3) *для довільного компакта* $K \subset P$ *множина*

$$W(K) = \bigcup_{x \in K} W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$$

є замкненою підмножиною в $\boldsymbol{R}^n$;

4) *для довільного компакта* $Y \subset \boldsymbol{R}^n$ *відображення* $W : P \to 2^Y$, $x \to$ $\to W(x, e, \alpha, \beta, \delta) \cap Y$ *напівнеперервне зверху.*

Зауваження 2. Твердження 4 леми не буде використовуватись при доведенні теорем $1-3$. Але воно цікаве саме по собі і легко випливає з основних конструкцій доведення леми.

Доведення. Розіб'ємо доведення леми на 8 пунктів.

1. Для $k = 1, 2, \ldots$ символом Q_k позначимо множину усіх тих точок $x \in$ $\in Q$, для яких $1/k \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq \pi/2 - 1/k$. Тоді $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, і оскільки Q не першої категорії на X, то знайдеться таке натуральне k (яке далі вважаємо фіксованим), для якого множина Q_k не є множиною першої категорії на X. Нехай $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ — зліченна скрізь щільна підмножина одиничної сфери $S^{n-1} \subset \boldsymbol{R}^n$ і $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — зліченна скрізь щільна підмножина відрізка $[1/k, \pi/2 - 1/k]$. Для довільних натуральних l, p, q, N символом $Q(l, p, q, N)$ позначимо множину усіх точок $x \in Q_k$, для яких виконуються наступні умови:

а) $\| e(x) - s_l \| \leq \dfrac{1}{8k}$;

б) $| \alpha(x) - a_p | \leq \dfrac{1}{8k}$;

в) $| \beta(x) - a_q | \leq \dfrac{1}{8k}$;

г) $\delta(x) > 2/N$ і для всіх $y \in W(x, e(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x))$ таких, що $0 <$ $< \| y - x \| \leq 2/N$, точка y належить до D і виконується нерівність $\| f(y) -$ $- f(x) \| \leq N \| y - x \|$.

Із визначення множини $Q_k \subset Q$, зокрема з нерівності (4), а також із щільності множин S на S^{n-1} і A на $[1/k, \pi/2 - 1/k]$ випливає

$$\bigcup_{l,p,q,N=1}^{\infty} Q(l, p, q, N) = Q_k. \tag{5}$$

Оскільки Q_k не є множиною першої категорії на X, то на підставі (5) робимо висновок, що знайдуться такі натуральні l, p, q, N (які далі вважаємо фіксованими) і замкнена куля $\overline{B^n} \subset D$, що на замкненій порції $P = X \cap \overline{B^n}$ множини X множина $Q(l, p, q, N) \cap P$ буде скрізь щільною. Позначимо $e = s_l$, $\alpha =$ $= a_p - 1/4k$, $\beta = a_q + 1/4k$, $\delta = 1/N$, $L = N$ і доведемо, що так визначені P, e, α, β, δ, L задовольняють усі вимоги леми, що доводиться.

Для цього спочатку визначимо конусоподібні множини $W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$ для всіх точок $x \in P$. Для довільної точки $x \in P$ позначимо

$$W(x) = \bigcap_{U \ni x} \left[\overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U} W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y))} \right], \tag{6}$$

де перетин береться по всіх околах точки x. Очевидно, що результат перетину у правій частині (6) не зміниться, якщо всі околи точки x замінити деякою їх зліченною базою U_i, наприклад $U_i = B(x, 1/i)$. В цьому випадку множина $W(x)$ є перетином спадної (за включенням) послідовності замкнених множин

$$F(U_i) = \overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U_i} W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y))}. \tag{7}$$

2. Доведемо, що для довільних $x \in P$ і $\delta' \le \delta$ множина $W(x) \cap \overline{B}(x, \delta')$ є континуумом.

Припустимо, що це не так. Тоді знайдуться $x \in P$, $\delta' \in (0, \delta]$ і такі відкриті множини A_1, $A_2 \subset \boldsymbol{R}^n$, що $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ і

$$W(x) \cap \overline{B}(x, \delta') \subset A_1 \cup A_2,$$

$$W(x) \cap \overline{B}(x, \delta') \cap A_1 \ne \varnothing, \qquad W(x) \cap \overline{B}(x, \delta') \cap A_2 \ne \varnothing. \tag{8}$$

Оскільки

$$W(x) \cap \overline{B}(x, \delta') = \bigcap_{i=1}^{\infty} [F(U_i) \cap \overline{B}(x, \delta')],$$

де множина $F(U_i)$ визначена рівністю (7), то знайдеться таке i_1, що

$$F(U_i) \cap \overline{B} \subset A_1 \cup A_2 \qquad \forall\, i > i_1.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $x \in A_1$. Тоді очевидно, що існують такі $0 < \varepsilon < 1/2N$ і $i_2 \ge i_1$, що $U_i \subset A_1 \ \ \forall\, i > i_2$ і

$$W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y)) \cap \overline{B}(y, \delta' + \varepsilon) \subset A_1 \cup A_2 \tag{9}$$

$$\forall\, y \in Q(l, p, q, N) \cap P \cap U_i \qquad \forall\, i > i_2.$$

Виберемо $i_3 > i_2$ настільки великим, щоб для $i > i_3$ і довільного $y \in U_i$ виконувалось включення $B(x, \delta') \subset B(y, \delta' + \varepsilon)$. Тоді для кожного $y \in Q(l, p, q, N) \cap P \cap U_i$ континуум $W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y)) \cap \overline{B}(y, \delta' + \varepsilon)$ перетинає множину A_1 і міститься в $A_1 \cup A_2$, а тому

$$W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y)) \cap \overline{B}(y, \delta' + \varepsilon) \subset A_1,$$

і, отже,

$$W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y)) \cap \overline{B}(x, \delta') \subset A_1.$$

Звідси і з (6) випливає

$$W(x) \cap \overline{B}(y, \delta') \subset \overline{A_1},$$

а це суперечить співвідношенням (8).

3. Доведемо, що

$$W(x) \subset \hat{V}(x, e, \beta) \qquad \forall\, x \in P. \tag{10}$$

Нехай $x \in P$, U — довільний окіл точки x і

$$F(U) = \overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U} W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y))}.$$

Із співвідношень $\angle(e(x), e) \le 1/8k$, $|\beta(x) - a_q| \le 1/8k$, $\beta = a_q + 1/2k$ випливає

$$\hat{V}(y, e(y), \beta(y)) \subset \hat{V}(x, e, \beta) \qquad \forall\, y \in U.$$

Тому

$$F(U) \subset \overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U} \hat{V}(y, e, \beta)},$$

а отже,

$$W(x) \subset \bigcap_{U \ni x} \overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U} \hat{V}(y, e, \beta)} \equiv V. \tag{11}$$

Елементарні теоретико-множинні міркування показують, що множина V у правій частині (11) співпадає з $\hat{V}(x, e, \beta)$, і цим самим включення (10) доведено.

4. Доведемо, що

$$W(x) \cap \mathring{V}(x, e, \alpha) = \varnothing \qquad \forall\, x \in P. \tag{12}$$

Припустимо, що це не так. Тоді для деякого $x \in P$ знайдеться точка $z \in W(x) \cap \mathring{V}(x, e, \alpha)$. Із визначення $W(x)$ випливає, що знайдуться такі послідовності $x_j \in Q(l, p, q, N) \cap P$ і $z_j \in W(x_j, e(x_j), \alpha(x_j), \beta(x_j), \delta(x_j))$, що $x = \lim_{j \to \infty} x_j$ і $z = \lim_{j \to \infty} z_j$. Із відкритості конусів $\mathring{V}(x, e, \alpha)$, $\mathring{V}(x_j, e, \alpha)$ та збіжності x_j до x і z_j до z випливає, що знайдуться $\varepsilon > 0$ та натуральне j_1 такі, що

$$B(z, \varepsilon) \subset \mathring{V}(x, e, \alpha) \cap \mathring{V}(x_j, e, \alpha) \qquad \forall\, j > j_1,$$

і $z_j \in B(z, \varepsilon)$ $\forall\, j > j_1$. Із співвідношень $\angle(e(x_j, e) \le 1/8k$, $|\alpha(x_j) - a_p| \le 1/8k$, $\alpha = a_p - 1/2k$ випливає

$$\mathring{V}(x_j, e, \alpha) \subset \mathring{V}(x_j, e(x_j), \alpha(x_j)).$$

Тому для $j > j_1$ маємо

$$z_j \in W(x_j, e(x_j), \alpha(x_j), \beta(x_j), \delta(x_j)) \cap \mathring{V}(x_j, e(x_j), \alpha(x_j)) \neq \varnothing,$$

що суперечить визначенню конусоподібної множини $W(x_j, e(x_j), \alpha(x_j), \beta(x_j), \delta(x_j))$. Ця суперечність і доводить (12).

5. Доведемо тепер, що для довільного $x \in P$ визначена рівністю (6) множина $W(x)$ є конусоподібною множиною з параметрами e, α, β, δ. Включення

$$W(x) \subset \hat{V}(x, e, \beta) \setminus \mathring{V}(x, e, \alpha)$$

доведене у пп. 3 і 4 доведення леми, а необхідна властивість зв'язності — у п. 2. Тому, припускаючи, що сформульоване твердження невірне, приходимо до висновку, що знайдеться такий континуум $K \subset B(x, \delta) \setminus W(x)$, для якого існують точки

$$a \in K \cap \mathring{V}(x, e, \alpha), \qquad b \in K \cap [B(x, \delta) \setminus \mathring{V}(x, e, \beta)]. \tag{13}$$

Оскільки

$$K \subset B(x, \delta) \setminus W(x) = B(x, \delta) \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} F(U_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [B(x, \delta) \setminus F(U_i)], \tag{14}$$

то компакт K міститься в об'єднанні зростаючої послідовності відкритих множин, а тому знайдеться таке натуральне i (яке надалі вважаємо фіксованим), що

$$K \subset B(x, \delta) \setminus F(U_i). \tag{15}$$

Із щільності $Q(l, p, q, N)$ скрізь на P випливає існування такої послідовності $x_j \in Q(l, p, q, N) \cap P \cap U_i$, що $x = \lim_{j \to \infty} x_j$, а із співвідношень $\angle(e(x_j), e) \leq \leq 1/8k$, $|\alpha(x_j) - a_p| \leq 1/8k$, $\alpha = a_p - 1/2k$, $|\beta(x_j) - a_q| \leq 1/8k$, $\beta = a_q + + 1/2k$ випливають включення

$$\begin{gathered} \hat{V}(x_j, e, \alpha) \setminus \{x_j\} \subset \mathring{V}(x_j, e(x_j), \alpha(x_j)), \\ \hat{V}(x_j, e(x_j), \beta(x_j)) \setminus \{x_j\} \subset \mathring{V}(x_j, e, \beta) \qquad \forall j = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{16}$$

На підставі (13) і (16) робимо висновок, що

$$\begin{gathered} a \in K \cap \mathring{V}(x_j, e(x_j), \alpha(x_j)), \\ b \in K \cap [B(x_j, \delta(x_j)) \setminus \hat{V}(x_j, e(x_j), \beta(x_j))] \end{gathered} \tag{17}$$

для досить великих j (нехай для $j > j_0$). За побудовою $\delta = 1/N < \delta(x_j)/2$, тому із (15) випливає, що знайдеться таке $j_1 > j_0$, що для довільного $j > j_1$ буде виконуватись включення

$$K \subset B(x_j, \delta(x_j)) \setminus W(x_j, e(x_j), \alpha(x_j), \beta(x_j), \delta(x_j)). \tag{18}$$

Оскільки K — континуум, то з (17) і (18) видно, що множина $W(x_j, e(x_j), \alpha(x_j), \beta(x_j), \delta(x_j))$ для $j > j_1$ не є конусоподібною множиною, а це суперечить умові. Цим самим твердження п. 5 доведено.

Таким чином, визначена рівністю (6) множина $W(x)$ є конусоподібною множиною з параметрами e, α, β, δ, незалежними від точок $x \in P$, і за побудовою $W(x) \subset D$ $\forall x \in P$, тобто виконується твердження 1 доводжуваної леми. Надалі цю множину позначаємо символом $W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$, прийнятим в означенні.

6. Доведемо твердження 2 леми. Нехай $x \in P$, $y \in W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$ і $y \neq x$. Із (6) випливає, що знайдуться такі послідовності $x_j \in Q(l, p, q, N) \cap P$ і $y_j \in \in W(x_j, e(x_j), \alpha(x_j), \beta(x_j), \delta(x_j))$, що $x = \lim_{j \to \infty} x_j$ і $y = \lim_{j \to \infty} y_j$. Згідно з умовою п. г) для будь-якого j виконується нерівність

$$\| f(y_j) - f(x_j) \| \leq L \| y_j - x_j \|. \tag{19}$$

Враховуючи неперервність відображення f та переходячи до границі при $j \to \infty$ у нерівності (19), отримуємо твердження 2 леми.

7. Доведемо твердження 3 леми. Нехай K — довільна компактна підмножина в P, $y_j \in W(K)$ і $y_j \to y_0 \in \boldsymbol{R}^n$ при $j \to \infty$. Тоді знайдуться такі $x_j \in K$, що

$$y_j \in W(x_j, e, \alpha, \beta, \delta), \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Оскільки K — компакт, то, замінюючи в разі необхідності послідовність $\{x_j\}$ деякою її підпослідовністю, без обмеження загальності будемо вважати, що послідовність $\{x_j\}$ збігається до деякої точки $x_0 \in K$. Нехай U — довільний окіл точки x_0. Тоді знайдеться таке j_0, що $x_j \in U \ \ \forall j > j_0$. Звідси випливає

$$y_j \in \overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U} W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y))} \equiv F(U). \tag{20}$$

Оскільки множина $F(U)$ у правій частині (20) є замкненою, і $y_j \to y_0$ при $j \to \to \infty$, то $y_0 \in F(U)$, а з того, що це виконується для довільного околу точки x_0, то з визначення W (див. (6)) випливає, що $y_0 \in W(x_0)$, і, отже, $y_0 \in W(K)$. Цим самим замкненість множини $W(K)$ доведено.

8. Доведемо, що для довільного компакта $Y \subset \boldsymbol{R}^n$ відображення $W: P \to \to 2^Y$ напівнеперервне зверху.

Нехай B — замкнена, а отже, компактна, підмножина в Y, і $A = \{x \in P: W(x) \cap Y \cap B \neq \varnothing)$, $x_j \in A$ і $x_j \to x \in P$ при $j \to \infty$. Для довільного $i = = 1, 2, \ldots$ знайдеться таке $j(i)$, що $x_j \in B(x, 1/i) \equiv U_i \ \ \forall j > j(i)$. Звідси випливає

$$\overline{\bigcup_{y \in Q(l,p,q,N) \cap P \cap U_i} W(y, e(y), \alpha(y), \beta(y), \delta(y))} \cap Y \cap B \neq \varnothing,$$

тобто в раніше введених позначеннях

$$F(U_i) \cap Y \cap B \neq \varnothing.$$

Оскільки ці множини утворюють спадну (за включенням) послідовність компактів, то

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [F(U_i) \cap Y \cap B] \neq \varnothing,$$

а оскільки $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(U_i) = W(x)$, то це означає, що $W(x) \cap Y \cap B \neq \varnothing$, тобто $x \in A$, і твердження п. 8 доведене. Лему доведено.

3. Доведення теореми 3. Доведення складається з 7 пунктів.

1. За теоремою В. В. Степанова [7] достатньо довести, що в умовах теореми 1 нерівність

$$\Lambda(x) = \varlimsup_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} < \infty,$$

де $x + h \in D$, виконується майже в усіх точках $x \in E$. Припустимо супротивне, що $\Lambda(x) = \infty$ в усіх точках x деякої вимірної підмножини $E' \subset E$ ненульової n-міри Лебега. Тоді знайдеться компактна підмножина $X \subset E'$, кожна порція якої має додатну міру. За лемою знайдуться компактна порція P множини X, константи L, $\delta > 0$, $0 < \alpha \leq \beta < \pi/2$, одиничний вектор $e \in \boldsymbol{R}^2$ і конусоподібні множини $W(x, e, \alpha, \beta, \delta)$, $x \in P$, такі, що виконуються умови 1–3 леми.

2. Позначимо

$$b = \frac{1}{2 \tan\beta}$$

і візьмемо такі додатні числа a_1, a_2 і a_3, щоб виконувались нерівності

$$a_1 + a_3 < 1, \quad a_2 + a_3 < 1, \tag{21}$$

$$\cos\alpha < \frac{a_1 - 2a_3}{a_1 + 2a_3}, \quad a_3 < \frac{a_2 \cos\beta}{2(1 + \cos\beta)}, \tag{22}$$

$$\cos\alpha < \frac{b - 3a_3}{b + a_2 + 3a_3}, \quad a_1 + b < \frac{1 - a_3(1 + \tan\beta)}{\tan\beta}, \tag{23}$$

$$a_2 > (a_1 + 2a_3)\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right). \tag{24}$$

Неважко переконатись в тому, що система нерівностей (21) – (24) сумісна, і отже, числа a_1, a_2, a_3, що її задовольняють, існують. Дійсно, нехай ε, $0 < \varepsilon < 1$, настільки мале, що при $a_2 + 3a_3 < \varepsilon$ виконується перша з нерівностей (23). Візьмемо додатне $\varepsilon_1 < \varepsilon/4$ настільки мале, щоб для $a_3 < \varepsilon_1$ права частина другої з нерівностей (23) була більша, ніж $2/(3\tan\beta)$. Зафіксуємо довільне $a_2 > 0$, що задовольняє нерівність $a_2 + 3\varepsilon_1 < \varepsilon$. Для цього a_2 виберемо настільки малі додатні $a_1 < 1/(4\tan\beta)$ і $a_3' < \varepsilon_1$, щоб було $a_1 + \varepsilon_1 < 1$ і щоб для цього a_1 і $a_3 = a_3'$ виконувалась нерівність (24). Тоді для цього ж a_1 і довільного $a_3 < \varepsilon_1$ буде виконуватись друга з нерівностей (23). Для так визначених a_1 і a_2 знайдеться настільки мале додатне $a_3 < a_3'$, що будуть виконуватись обидві нерівності (22). Оскільки при зменшенні a_3' до a_3 останні нерівності системи не порушуються, то так визначені a_1, a_2, a_3 задовольняють систему (21) – (24).

Нехай x_0 — точка щільності множини P. Для $r > 0$ позначимо $P_r = \{x \in P : \|x - x_0\| < r\}$. За визначенням точки щільності маємо умову

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{mes}_n(P_r)}{\mathrm{mes}_n(B_r)} = 1,$$

де B_r — n-вимірна куля радіуса r, а mes_n — n-міра Лебега в $\boldsymbol{R}^n$. Тому знайдеться таке $r_0 > 0$, що для всіх $r < r_0$ буде виконуватись нерівність

$$\mathrm{mes}_n(P_r) > (1 - a_3^n)\,\mathrm{mes}_n(B_r). \tag{25}$$

Із умови $a_1 + a_3 < 1$ випливає, що куля $B(\zeta_1, a_3 r)$ з центром $\zeta_1 = x_0 - a_1 r$ міститься в $B(x_0, r)$, і оскільки $\mathrm{mes}_n B(\zeta_1, a_3 r) = a_3^n\,\mathrm{mes}_n B_r$, то знайдеться точка $x_1 \in B(\zeta_1, a_3 r) \cap P$. Нехай $\Pi(x_0)$ — $(n-1)$-вимірна площина, що проходить через точку x_0 ортогонально до вектора e, а $S^{n-2}(x_0, t)$ — $(n-2)$-вимірна сфера з центром x_0 радіуса t, що лежить у цій площині. Із умови $a_2 + a_3 < 1$ випливає, що $[a_2 r, (1 - a_3 r)]$ — невироджений відрізок. Для кожної точки $\zeta \in S^{n-2}(x_0, t)$ при $t \in [a_2 r, (1 - a_3) r]$ куля $B(\zeta, t)$ міститься в $B(x_0, r)$ і для $r < r_0$ перетинає множину P. Позначимо

$$K(r) = \left[\bigcap_{a_2 r \le t \le (1-a_3) r} \; \bigcup_{\zeta \in S^{n-2}(x_0, t)} \overline{B}(\zeta, l)\right] \cap P.$$

Тоді очевидно, що $K(r)$ — компакт, і згідно з твердженням 3 леми множина $W(K(r))$ замкнена в $\boldsymbol{R}^n$. Символом $G(r)$ позначимо компоненту відкритої множини $\boldsymbol{R}^n \setminus [W(K(r)) \cup W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta)]$, що містить точку x_0.

3. Доведемо, що

$$B(x_0, a_3 r) \subset G(r) \qquad \forall\, r < r_0. \tag{26}$$

Припускаючи супротивне, що включення (26) не виконується, розглянемо спочатку випадок, коли існує точка

$$z \in B(x_0, a_3 r) \cap W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta). \tag{27}$$

Оскільки $z \in \hat{V}(x_1, e, \beta) \setminus \mathring{V}(x_1, e, \alpha)$, то $\angle(\overline{x_1 z}, e) \geq \alpha$. Тому з рівності

$$\overline{x_1 z} = \overline{x_1 \zeta_1} + \overline{\zeta_1 x_0} + \overline{x_0 z}$$

і співвідношень $\overline{\zeta_1 x_0} = a_1 e$, $\|x_1 - \zeta_1\| \leq a_3 r$, $\|z - x_0\| \leq a_3 r$ випливає

$$\cos\alpha \geq \cos[\angle(\overline{x_1 z}, e)] = \frac{\langle \overline{x_1 z}, e \rangle}{\|x_1 - z\|} \geq \frac{a_1 - 2a_3}{a_1 + 2a_3},$$

що суперечить умові (22). Ця суперечність доводить, що точки z, яка б задовольняла умову (27), не існує.

Припустимо тепер, що існують такі $t \in [a_2 r, (1 - a_3 r) 3]$, $\zeta \in S^{n-1}(x_0, t)$ і $y \in B(\zeta, a_3 r) \bigcap P$, що

$$z \in W(y, e, \alpha, \beta, \delta) \bigcap B(x_0, a_3 r). \tag{28}$$

Оскільки $z \in \hat{V}(y, e, \beta)$, то $\angle(\overline{yz}, e) \leq \beta$. В рівності

$$\overline{yz} = \overline{y\zeta} + \overline{\zeta x_0} + \overline{x_0 z}$$

вектор $\overline{\zeta x_0}$ лежить в площині $\Pi^{n-1}(x_0)$, ортогональній до e, і, отже, $\langle \overline{\zeta x_0}, e \rangle = 0$. Враховуючи нерівності

$$\|\zeta - x_0\| \geq a_2 r, \quad \|y - \zeta\| \leq a_3 r, \quad \|x_0 - z\| \leq a_3 r,$$

отримуємо нерівність

$$\cos\beta \leq \cos[\angle(\overline{yz}, e)] = \frac{\langle \overline{yz}, e \rangle}{\|y - z\|} \leq$$

$$\leq \frac{\langle \overline{yz}, e \rangle + \langle \overline{\zeta x_0}, e \rangle + \langle \overline{x_0 z}, e \rangle}{\|\zeta - x_0\| - \|y - z\| - \|x_0 - z\|} \leq \frac{2a_3}{a_2 - 2a_3},$$

з якої випливає

$$a_3 \geq \frac{a_2 \cos\beta}{2(1 + \cos\beta)}.$$

Але остання нерівність суперечить умові (22). Цим доведено, що точок z, які б задовольняли умову (28), не існує.

Таким чином, доведено, що куля $B(x_0, a_3 r)$ не перетинає множину $W(K(r)) \bigcup W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta)]$, а тому міститься в тій компоненті $G(r)$ відкритої множини $\boldsymbol{R}^n \setminus [W(K(r)) \bigcup W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta)]$, яка містить точку x_0.

4. Символом $\Pi^{n-1}(w)$ позначимо $(n-1)$-вимірну площину, що проходить через точку $w = w(r) = x_0 + bre$ ортогонально до вектора e, і доведемо, що для довільної точки

$$z \in \hat{V}(x_1, e, \beta) \bigcap \Pi^{n-1}(w)$$

знайдуться такі $t \in [a_2 r, (1 - a_3) r]$, $\zeta_0 \in S^{n-1}(x_0, t)$ і $y \in B(\zeta_0, a_3 r)$, що

$$z \in \mathring{V}(y, e, \alpha). \tag{29}$$

Точку z можна подати у вигляді

$$z = x_1 + cre + \zeta, \quad \zeta \in \Pi^{n-1}(0), \tag{30}$$

де $c \in \boldsymbol{R}^1$, cr — відстань від точки x_1 до площини $\Pi^{n-1}(w)$ і $\Pi^{n-1}(0)$ — $(n -$

$-1)$-вимірна площина, що проходить через початок координат O простору $\boldsymbol{R}^n$ ортогонально до вектора e. Очевидно, що $|c - a_1 - b| \le a_3$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\|\zeta\| < a_2 r$. Позначимо $\zeta_0 = x_0 + \zeta'$, де ζ' — деяка точка сфери $S^{n-1}(x_0, a_2 r)$. Із (25) випливає, що існує принаймні одна точка $y \in B(\zeta_0, a_3 r) \cap P$. Доведемо, що $z \in \mathring{V}(y, e, \alpha)$. Оскільки $\overline{yz} = \overline{y\zeta_0} + \overline{\zeta_0 z}$, $\zeta_1 - x_0 = -a_1 re$ і

$$\overline{\zeta_0 z} = z - \zeta_0 = x_1 - \zeta_1 + \zeta_1 - x_0 + cre + \zeta - \zeta' =$$
$$= \overline{\zeta_1 x_1} + (c - a_1)re + \overline{\zeta'\zeta},$$

то, враховуючи (23) та рівність $\langle \overline{\zeta'\zeta}, e \rangle = 0$, маємо

$$\cos[\angle(\overline{yz}, e)] = \frac{\langle \overline{yz}, e \rangle}{\|y - z\|} \ge$$
$$\ge \frac{\langle \overline{y\zeta_0}, e \rangle + \langle \overline{\zeta_1 x_1}, e \rangle + br - a_3 r + \langle \overline{\zeta'\zeta}, e \rangle}{\|y - \zeta_0\| + \|\zeta_1 - x_1\| + br + a_3 r + \|\zeta' - \zeta\|} \ge$$
$$\ge \frac{b - 3a_3}{b + a_2 + 3a_3} > \cos\alpha.$$

Звідси отримуємо $\angle(\overline{yz}, e) \le \alpha$ і, отже, $z \in \mathring{V}(y, e, \alpha)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\|\zeta\| \ge a_2 r$. Позначимо $\zeta_0 = x_0 + \zeta$; оскільки, згідно з другою з нерівностей (23), $\|\zeta_0 - x_0\| = \|\zeta\| \le (a_1 + b + a_3) r \tan\beta \le (1 - a_3) r$, то $\zeta_0 \in S^{n-1}(x_0, t)$, де $t \equiv \|\zeta\| \in [a_2 r, (1 - a_3) r]$. Із співвідношень

$$\overline{\zeta_0 z} = z - \zeta_0 = x_1 - \zeta_1 + \zeta_1 - x_0 + cre = \overline{\zeta_1 x_1} + (c - a_1)re,$$
$$\|y - z\| \le \|y - \zeta_0\| + \|\zeta_0 - z\| \le$$
$$\le \|y - \zeta_0\| + \|\zeta_1 - x_1\| + br + a_3 r \le br + 3a_3 r$$

та першої нерівності (23) одержуємо

$$\cos[\angle(\overline{yz}, e)] = \frac{\langle \overline{yz}, e \rangle}{\|y - z\|} \ge$$
$$\ge \frac{\langle \overline{y\zeta_0}, e \rangle + br - a_3 r + \langle \overline{\zeta_1 x_1}, e \rangle}{br + 3a_3 r} \ge \frac{b - 3a_3}{b + 3a_3} > \cos\alpha.$$

Звідси випливає $\angle(\overline{yz}, e) < \alpha$ і, отже, $z \in \mathring{V}(y, e, \alpha)$. Твердження п. 4 доведено.

5. Доведемо, що

$$\operatorname{diam} G(r) \le c_1 r, \qquad c_1 = \frac{2(a_1 + b + a_3)}{\cos\beta}.$$

Припустимо супротивне, що сформульоване твердження невірне. Тоді знайдеться така точка $z \in G(r)$, що $\|z - x_0\| > c_1 r/2$. Нехай γ — проста дуга, що з'єднує точки x_0 і z, і $\gamma \subset G(r)$. Ця дуга цілком входить в $\hat{V}(x_1, e, \beta)$ і $\operatorname{diam}\gamma > c_1 r/2$. Тому існує точка $z \in \gamma \cap \Pi^{n-1}(w) \cap \hat{V}(x_1, e, \beta)$. Згідно з доведеним у п. 4, знайдуться такі $t \in [a_2 r, (1 - a_3) r]$, $\zeta \in S^{n-1}(x_0, t)$ і $y \in B(\zeta, a_3 r)$, що $z \in \mathring{V}(y, e, \alpha)$. Оскільки

$$\gamma \subset G(r) \subset \boldsymbol{R}^n \setminus W(K(r)) \subset \boldsymbol{R}^n \setminus W(y, e, \alpha, \beta, \delta),$$

то, згідно з означенням, $\gamma \subset \hat{V}(y, e, \beta)$ і, отже, $x_0 \in \hat{V}(y, e, \beta)$. Звідси випливає $\| x_0 - y \| \le a_3 r / \cos\beta$. З іншого боку, за побудовою

$$\| x_0 - y \| \ge \| x_0 - \zeta \| - \| \zeta - y \| \ge (a_2 - a_3) r,$$

і тому має виконуватись нерівність

$$a_3 \ge \frac{a_2 \cos\beta}{1 + \cos\beta},$$

яка суперечить умові (22). Цим самим твердження п. 5 доведено.

6. Межова точка $z \in \partial G$ області $G \subset \boldsymbol{R}^n$ називається досяжною, якщо для довільної точки $x \in G$ існує така проста дуга γ з кінцями x і z, що $\gamma \setminus \{z\} \subset G$. Неважко переконатись у тому, що множина $D(\partial G)$ усіх досяжних межових точок є скрізь щільною на ∂G.

Доведемо, що для всіх $r < r_0$ таких, що $(3 + c_1) r < \delta$, виконується нерівність $\operatorname{diam} f(dG(r)) \le c_2 r$, де c_2 — константа, що не залежить від r. Тоді із відкритості відображення f буде випливати, що $\operatorname{diam} f(\overline{G(r)}) \le c_2 r$. Останнє твердження випливає із включення

$$\partial f(G(r)) = \overline{f(G(r))} \setminus f(G(r)) = f(\overline{G}(r)) \setminus f(G(r)) \subset$$
$$\subset f(\overline{G}(r)) \setminus G(r) = f(\partial G(r)),$$

яке має місце для неперервного відкритого відображення $f \colon D \to \boldsymbol{R}^m$ і відкритої обмеженої множини $G(r) \subset \overline{G(r)} \subset D$. Зауважимо, що це перше і останнє використання відкритості f у доведенні.

Нехай

$$z \in [\partial G(r) \cap D(\partial G(r))] \setminus W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta).$$

Тоді знайдуться такі $t \in [a_2 r, (1 - a_3) r]$, $\zeta \in S^{n-1}(x_0, t)$ і $y \in B(\zeta, a_3 r)$, що $z \in W(y, e, \alpha, \beta, \delta)$.

Доведемо, що

$$W(y, e, \alpha, \beta, \delta) \cap \overline{B}(y, (1 + c_1) r) \cap W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta) \ne \varnothing. \tag{31}$$

Припустимо, що це не так. Нехай γ — проста дуга з кінцями x_0 і z така, що $\gamma \setminus \{z\} \subset G(r)$. Оскільки $\| z - y \| \le \| z - x_0 \| + \| x_0 - y \| \le (1 - c_1) r$, то

$$K = \gamma \cup [W(y, e, \alpha, \beta, \delta) \cap \overline{B}(y, (1 + c_1) r)]$$

є континуумом, що перетинає конус $\mathring{V}(x_1, e, \alpha)$ і не перетинає конусоподібну множину $W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta)$, а тому із означення випливає, що $K \subset \hat{V}(x_1, e, \beta)$ і, отже, $y \in \hat{V}(x_1, e, \beta)$. Враховуючи, що точка y знаходиться від площини $\Pi^{n-1}(w)$ на відстані, не більшій ніж $a_3 r$, отримуємо

$$\| y - x_1 \| \le \frac{(a_1 + 2a_3) r}{\cos\beta}.$$

З іншого боку,

$$\| y - x_1 \| \ge \| \zeta - x_0 \| - \| \zeta - y \| - \| x_1 - \zeta_1 \| - \| \zeta_1 - x_0 \| \ge$$
$$\ge (a_2 - a_1 - 2a_3) r.$$

Із цих співвідношень випливає нерівність

$$a_2 \le (a_1 + 2a_3)\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right),$$

яка суперечить умові (24). Ця суперечність завершує доведення співвідношення (31).

Нехай

$$z \in W(y, e, \alpha, \beta, \delta) \cap \overline{B}(y, (1 + c_1)r) \cap W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta).$$

Тоді із нерівностей

$$\|z - y\| \le \|z - x_0\| + \|x_0 - y\| \le (1 + c_1)r < \delta,$$

$$\|z_1 - y\| \le (1 + c_1)r < \delta,$$

$$\|z_1 - x_1\| \le \|z_1 - y\| + \|y - x_1\| \le (3 + c_1)r < \delta$$

випливає, що $z, z_1 \in D$, і, враховуючи твердження 2 леми, маємо

$$\|f(z) - f(x_1)\| \le \|f(z) - f(y)\| + \|f(y) - f(z_1)\| + \|f(z_1) - f(x_1)\| \le$$
$$\le L\|z - y\| + L\|y - z_1\| + L\|z_1 - x_1\| \le L(5 + 3c_1)r.$$

Звідси, ввівши позначення

$$c_2 = 2L(5 + 3c_1),$$

отримуємо

$$\|f(z) - f(x_1)\| \le \frac{c_2 r}{2}. \tag{32}$$

Оскільки множина $D(\partial G(r))$ скрізь щільна на $\partial G(r)$, то із неперервності f випливає, що нерівність (32) має місце для всіх точок $z \in \partial G(r) \setminus W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta)$.

Для $z \in \partial G(r) \cap W(x_1, e, \alpha, \beta, \delta)$ із нерівності $\|z - x_1\| \le c_1 r < \delta$ і твердження 2 леми маємо

$$\|f(z) - f(x_1)\| \le L\|z - x_1\| \le Lc_1 r \le \frac{c_2 r}{2}. \tag{33}$$

Із доведених нерівностей (32) і (33) випливає

$$\operatorname{diam} f\left(\overline{\partial G(r)}\right) \le c_2 r,$$

і твердження п. 6 доведено.

7. Нагадаємо, що у зв'язку із припущенням п. 1 для точки $x_0 \in P \subset E'$ існує така послідовність $\{x_j\}$, $x_j \ne x_0$, збіжна до точки x_0, що

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\|f(x_j) - f(x_0)\|}{\|x_j - x_0\|} = \infty.$$

Виберемо і зафіксуємо настільки велике j, щоб виконувались нерівності

$$\frac{\|f(x_j) - f(x_0)\|}{\|x_j - x_0\|} > \frac{2c_2}{a_3}, \tag{34}$$

$$r = \frac{2\|x_j - x_0\|}{a_3} < \min\left(r_0, \frac{\delta}{3 + c_1}\right). \tag{35}$$

Для r, визначеного рівністю (35), згідно з доведеним у п. 3 куля $B(x_0, a_3 r)$

міститься у $G(r)$, і, отже, $x_j \in G(r)$, а тому, згідно з доведеним у п. 6,

$$\|f(x_j) - f(x_0)\| \le c_2 r. \qquad (36)$$

Звідси і із визначення r отримуємо

$$\frac{\|f(x_j) - f(x_0)\|}{\|x_j - x_0\|} \le \frac{2c_2}{a_3},$$

що суперечить (34). Теорему 3 доведено.

4. Доведення теореми 1. Позначимо

$$W_i = \{x \in \boldsymbol{R}^n \colon x_i = 0 \text{ і } x_j \ge 0,\ j \ne i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i.$$

Таким чином, W є межею позитивного конуса $V = \{x \in \boldsymbol{R}^n \colon x_j \ge 0 \ \ \forall j = 1, 2, \ldots, n\}$ в $\boldsymbol{R}^n$. Нехай X — множина усіх тих точок $x \in D$, в яких існують частинні $(n-1)$-похідні $D_i^{n-1} f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, відображення f. Легко бачити, що ця множина є вимірною. Позначимо

$$e = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in S^{n-1}, \qquad \alpha = \frac{1}{2 \arccos \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}}, \qquad (37)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right), \qquad \delta = 1,$$

і для довільної точки $x \in X$ покладемо

$$W(x, e, \alpha, \beta, \delta) = (x + W) \cap \overline{B}(x, \delta). \qquad (38)$$

Тоді неважко переконатись у тому, що визначені рівністю (38) множини є коноподібними множинами з незалежними від точок $x \in X$ параметрами e, α, β, δ, заданими рівностями (37). Крім того, із існування $(n-1)$-частинних похідних у точках $x \in X$ випливає, що в усіх цих точках виконується умова (3) теореми 3. Тому, згідно з теоремою 3 відображення f має похідну майже в усіх точках множини X. Теорему 1 доведено.

5. Доведення теореми 2. Враховуючи зауваження 1, приходимо до висновку, що теорема 2 є прямим наслідком теореми 3. Теорему 2 доведено.

1. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 134 с.
2. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1959. – P.2–9.
3. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – S. 75–85.
4. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
5. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
6. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

Одержано 30.07.96