УДК 517.93

С. Ф. Захарін, І. О. Парасюк (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНІ ТА КЛАСИЧНІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛАГРАНЖЕВИХ СИСТЕМ, ОПУКЛИХ НА КОМПАКТІ

By using the variational method, we establish sufficient conditions for the existence of generalized Besicowitch almost (quasi)periodic solutions and classical quasiperiodic solutions of the Lagrangian natural systems with force functions convex on a compact set.

За допомогою варіаційного методу встановлено достатні умови існування узагальнених майже (квазі-) періодичних за Безіковичем та класичних квазіперіодичних розв'язків натуральних лагранжевих систем з опуклими на компакті силовими функціями.

Варіаційний метод відшукання майже (квазі-) періодичних розв'язків лагранжевої системи

$$\ddot{x} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \tag{1}$$

з майже (квазі-) періодичною щодо t силовою функцією $V\colon \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ полягає у знаходженні екстремалей функціоналу

$$J_0(x(t)) = M\left(\frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + V(t,x(t))\right), \tag{2}$$

де $\|\cdot\|$ — евклідова норма у $\boldsymbol{R}^n$, породжена стандартним скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $M(\cdot) = \lim_{T\to\infty} 1/(2T)\int_{-T}^{T} dt$. Такий підхід досить детально розроблено для періодичних систем (див., наприклад, [1–5]). Майже періодичному випадку присвячено роботи Ж. Бло [7, 8]. При розв'язанні мінімізаційної задачі для функціоналу J_0 доводиться продовжувати його з $CAP^1(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R}^n)$-простору $\boldsymbol{R}^n$-значних неперервних майже періодичних функцій з майже періодичними похідними на простір майже періодичних функцій Безіковича, які мають узагальнені (в сенсі Соболєва) майже періодичні за Безіковичем похідні. Такі простори ефективно використовувались в теорії нелінійних коливань скінченно- і нескінченновимірних систем у роботах [9, 10]. Залучення функцій Безіковича дозволяє досить просто одержувати узагальнені розв'язки рівняння (1) за умови глобальної (щодо x) опуклості силової функції. Однак відсутність теорем вкладення у просторах таких функцій є суттєвою перешкодою на шляху встановлення класичності знайдених розв'язків. У даній роботі показано як можна подолати зазначену перешкоду у ситуації, коли функція $V(t,x)$ є квазіперіодичною щодо t (п. 4). З іншого боку, умови глобальної опуклості для $V(t,x)$ вдалося замінити вимогою опуклості в компактній області $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Це одночасно дало змогу встановити існування обмеженої майже періодичної за Безіковичем мінімізаційної функції (п. 2) і узагальнити результати [6], одержані для $n=1$ і у частинному випадку $V(t,x) = \cos(x - E(t))$, $E(t) \in CAP(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$. Зауважимо, що наш підхід, на відміну від [6], не вимагає використання поліномів Бохнера – Фейєра.

1. Область визначення функціоналу. Позначимо через $B_p(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R}^n)$ простір $\boldsymbol{R}^n$-значних майже періодичних функцій Безіковича. Функція $f \in B_p(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R}^n)$ характеризується тим, що $\|f(t)\|^p$ локально сумовна, і для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий тригонометричний поліном $P_\varepsilon(t)$ з коефіцієнтами в $\boldsymbol{R}^n$, що $\overline{M}(\|f(t) - P_\varepsilon(t)\|^p) < \varepsilon$, $\overline{M}\{\cdot\} = \overline{\lim}_{T\to\infty} 1/(2T)\int_{-T}^{T} dt$. Покладемо $\langle f, g\rangle_0 =$

$= M(\langle f, g\rangle)$, $\|f\|_0 = M^{1/2}(\|f\|^2)$. Узагальнену (в сенсі Соболєва) похідну функції $f \in B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$ відносно добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ (якщо вона існує) позначатимемо через $Df(t)$. Функції з $B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$, які мають узагальнені похідні, утворюють простір $B_2^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$. Напівнорму у ньому задамо рівністю $\|\cdot\|_1 = \|D\cdot\|_0 + \|\cdot\|_0$. Нехай $\Omega \subset \subset \boldsymbol{R}^n$ — компактна опукла область; $C^r(\Omega)$ — простір r разів неперервно диференційовних функцій в Ω. Введемо простір $B_2(\boldsymbol{R}; C^r(\Omega))$, утворений функціями $g: \boldsymbol{R} \times \Omega \to \boldsymbol{R}$ з такими властивостями: 1) при кожному фіксованому $t \in \boldsymbol{R}$ функція $x \to g(t, x)$ належить класу $C^r(\Omega)$; 2) при кожному фіксованому $x \in \Omega$ і при кожному $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in (\boldsymbol{N} \bigcup \{0\})^n$, $0 \le \rho_1 + \ldots + \rho_n \le r$ функція $t \to \dfrac{\partial^\rho g(t, x)}{\partial x^\rho}$ вимірна; $\left(\max_{x\in\Omega}\left|\dfrac{\partial^\rho g(t, x)}{\partial x^\rho}\right|\right)^2$ локально сумовна і для довільного $\varepsilon > 0$ існує тригонометричний поліном (щодо t) $P_\varepsilon^\rho(t, x) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k^\rho(x) e^{i\lambda_k t}$, $N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, $\lambda_k \in \boldsymbol{R}$, $a_k^\rho(x) \in C(\Omega)$, такий, що

$$\overline{M}^{1/2}\left(\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^\rho g(t, x)}{\partial x^\rho} - P_\varepsilon^\rho(t, x)\right|^2\right) < \varepsilon.$$

***Зауваження* 1.** Без обмеження загальності можна вважати, що $a_k^\rho(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Позначивши через $\overline{X}_\Omega$ замикання множини $X_\Omega = \{x(t) \in CAP^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n): x(\boldsymbol{R}) \in \Omega\}$ за напівнормою $\|\cdot\|_1$, покладемо

$$\hat{X}_\Omega = \{x(t) \in \overline{X}_\Omega : x(\boldsymbol{R}) \in \Omega\}.$$

Твердження 1. *Нехай* $V(t, x) \in B_2(\boldsymbol{R}; C(\Omega))$. *Тоді функціонал*

$$J(x(t)) = M\left(\frac{1}{2}\|Dx(t)\|^2 + V(t, x(t))\right) \tag{3}$$

визначений і неперервний на $\hat{X}_\Omega$.

Доведення випливає з леми 3, наведеної нижче. Важливу роль у подальшому відіграє відображення $P_\Omega: \boldsymbol{R}^n \to \Omega$, яке визначається таким чином: $P_\Omega x := x$, якщо $x \in \Omega$; якщо ж $x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \Omega$, то $P_\Omega x$ — найближча до x точка $\partial\Omega$. Наслідком опуклості Ω є така лема.

Лема 1. *Для всіх* $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ *виконується нерівність*

$$\|P_\Omega x - P_\Omega y\| \le \|x - y\|.$$

Лема 2. $\hat{X}_\Omega$ *є повною опуклою підмножиною у* $B_2^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$.

Доведення. Опуклість $\hat{X}_\Omega$ є наслідком опуклості Ω. Оскільки $\overline{X}_\Omega$ повна, то досить показати, що для довільної $x(t) \in \overline{X}_\Omega$ існує $\hat{x}(t) \in \hat{X}_\Omega$ така, що $\|x(t) - \hat{x}(t)\|_0 = 0$. Виявляється, таку умову задовольняє $\hat{x}(t) = P_\Omega x(t)$. Справді, нехай $x_n(t) \in X_\Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, — послідовність, що збігається до $x(t)$ за напівнормою $\|\cdot\|_1$. Оскільки

$$\|\hat{x}(t) - x_n(t)\| = \|P_\Omega x(t) - P_\Omega x_n(t)\| \le \|x(t) - x_n(t)\|,$$

то $\hat{x}(t) \in \hat{X}_\Omega$ і $\|\hat{x}(t) - x_n(t)\|_0 = 0$.

Лема 3. *Якщо* $V(x,t) \in B_2(\boldsymbol{R}; C(\Omega))$, *то оператор, визначений рівністю* $V[x(\cdot)](t) = V(t, x(t))$, *неперервно за напівнормою* $\|\cdot\|_0$ *відображає* $\hat{X}_\Omega$ *в* $B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R})$.

Доведення. Нехай $x(t) \in \hat{X}_\Omega$, $x_n \in X_\Omega$, $n = 1, 2, \ldots,$ — така послідовність, що $\|x(t) - x_n(t)\|_0 \to 0$, $n \to \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$ визначимо поліном $P_\varepsilon(t, x) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x) e^{i\lambda_k t}$ згідно з означенням $B_2(\boldsymbol{R}; C(\Omega))$. Тоді

$$\overline{M}^{1/2}\left(|V(t,x) - P_\varepsilon(t, x_n(t))|^2\right) \le \varepsilon + \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \max_{x \in \Omega} \left\| \frac{\partial a_k(x)}{\partial x} \right\| \|x(t) - x_n(t)\|_0 \le 2\varepsilon,$$

якщо $n = n(\varepsilon)$ вибрати досить великим. Отже, $V(t, x(t)) \subset B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R})$. Неперервність $\boldsymbol{V}$ випливає з оцінки

$$\|V(t, x(t)) - V(t, y(t))\|_0 \le 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \max_{x \in \Omega} \left\| \frac{\partial a_k(x)}{\partial x} \right\| \|x(t) - y(t)\|_0.$$

Тепер для доведення твердження 1 досить зауважити, що $B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}) \subset \subset B_1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R})$ і $M(|\cdot|) \le M^{1/2}(|\cdot|^2)$.

2. Існування мінімуму. Для довільної множини $\mathcal{M} \subset \boldsymbol{R}^n$ позначимо через $\mathcal{M} + \delta$ її замкнений δ-окіл.

Теорема 1. *Нехай* $V(t, x) \in B_2(\boldsymbol{R}; C(\Omega))$ *і існує така замкнена опукла область* $\Theta \subset \boldsymbol{R}^n$, *що* $\Theta + \delta \subset \Omega$, *і для майже всіх* $t \in \boldsymbol{R}$ *виконуються умови*

$$V(t, \lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda V(t,x) + (1-\lambda)V(t,y) \quad \forall x, y \in \Theta, \quad \forall \lambda \in [0, 1]; \tag{4}$$

$$V(t,x) \ge V(t, P_\Theta x) \quad \forall x \in \Theta + \delta. \tag{5}$$

Тоді існує функція $x_*(t) \in \hat{X}_\Theta$ *така, що*

$$J(x_*(t)) = \inf J(\hat{X}_{\Theta+\delta}). \tag{6}$$

Якщо додатково припустити, що $V(t,x) \in B_2(\boldsymbol{R}; C^1(\Omega))$, *то* $x_*(t)$ *є узагальненим (в сенсі Соболєва) розв'язком рівняння (1), тобто*

$$\Lambda[y(\cdot)] := \langle Dx_*(t), \dot{y}(t)\rangle_0 + \left\langle \frac{\partial V(t, x_*(t))}{\partial x}, y(t) \right\rangle_0 = 0 \quad \forall y(t) \in CAP^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n). \tag{7}$$

Доведення. Спираючись на міркування, викладені в [6], легко встановити існування такої функції $x_* \in \hat{X}_\Theta$, що $J(x_*(t)) = \inf J(\hat{X}_\Theta) := J_*$.

Для доведення рівності (6) використаємо таке твердження.

Лема 4. *Якщо* $f(t) \in B_2^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$, *то*

$$\|Df(t)\|_0^2 = \lim_{s \to 0} \|s^{-1}(f(t+s) - f(t))\|_0^2. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $\sum f_k e^{i\lambda_k t}$ — ряд Фур'є функції f. Тоді $\|Df\|_0^2 = = \sum |\lambda_k|^2 \|f_k\|^2 < \infty$ і

$$|\|s^{-1}(f(t+s) - f(t))\|_0^2 - \|Df\|_0^2| = \left| \sum \left(\left| \frac{e^{i\lambda_k s} - 1}{s} \right|^2 - |\lambda_k|^2 \right) \|f_k\|^2 \right| =$$

$$= \left| \sum |\lambda_k|^2 \left(\left| \int_0^1 e^{i\lambda_k \tau s} d\tau \right|^2 - 1 \right) \|f_k\|^2 \right| \le 2 \sum |\lambda_k|^2 \|f_k\|^2.$$

Звідси видно, що твердження леми 4 є наслідком ознаки Вейєрштрасса і неперервності щодо s суми функціонального ряду. Лему доведено.

Припустимо, що (6) не виконується. Тоді знайдеться функція $x_0(t) \in \hat{X}_{\Theta+\delta}$ така, що $J(x_0(t)) < J_*$. За лемами 1 і 4 маємо

$$\| DP_\Theta x_0(t) \|_0 = \lim_{s\to 0} \| s^{-1}(P_\Theta x_0(t+s) - P_\Theta x_0(t)) \|_0 \le$$

$$\le \lim_{s\to 0} \| s^{-1}(x_0(t+s) - x_0(t)) \|_0 = \| Dx_0(t) \|_0,$$

а за умовою (5) $M(V(t, P_\Theta x_0(t))) \le M(V(t, x_0(t)))$. Тому $J(P_\Theta x_0(t)) \le J(x_0(t)) < J_*$, а це неможливо, оскільки $P_\Theta x_0(t) \in \hat{X}_\Theta$.

Тепер переконаємось у правильності (7). Зауважимо, що при виконанні додаткової умови теореми на основі леми 3 маємо $\partial V(t, x(t))/\partial x \in B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$ при кожній $x(t) \in \hat{X}_\Omega$. Для довільної $y(t) \in CAP^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n)$ і для всіх досить малих за модулем s виконується нерівність

$$J(x_*(t) + sy(t)) - J(x_*(t)) =$$

$$= s(\Lambda[y(\cdot)] + M(\langle W(t, sy(t)) - W(t, 0), y(t)\rangle) + (1/2)s\| \dot{y}(t) \|^2)) \ge 0,$$

де $W(t, y) = \int_0^1 \frac{\partial V(t, x_*(t) + \tau y))}{\partial x} d\tau.$

Оскільки з леми 3 випливає, що $\lim_{s\to 0} M(\langle W(y, sy(t)) - W(t, 0), y(t)\rangle) = 0$, то ця нерівність можлива лише при виконанні (7).

3. Квазіперіодичні функції Безіковича і функції на торі. Нехай $\omega \in \boldsymbol{R}^m$ — вектор з незалежними над кільцем цілих чисел компонентами. Якщо за напівнормою $\|\cdot\|_0$ ($\|\cdot\|_1$) замкнути простір тих $\boldsymbol{R}^n$-значних поліномів, які є лінійними комбінаціями функцій вигляду $e^{i\langle k, \omega\rangle t}$, $k \in \boldsymbol{Z}^m$, то одержимо простір квазіперіодичних функцій Безіковича $B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n; \omega)$ ($B_2^1(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}^n; \omega)$) [10].

Нехай T^m — стандартний m-вимірний тор $\{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \boldsymbol{R}^m \,|\, \mathrm{mod}\, 2\pi\}$. Через $H(T^m, \boldsymbol{R}^n)$ позначимо простір $\boldsymbol{R}^n$-значних сумовних з квадратом евклідової норми функцій на T^m. Напівнормою у цьому просторі є $\|\cdot\|_0 := \boldsymbol{M}^{1/2}(\|\cdot\|^2) := \left(\int_{T^m} \|\cdot\|^2 d\varphi\right)^{1/2}$. Узагальнену (в сенсі Соболєва) похідну за напрямком ω функції $f \in H(T^m, \boldsymbol{R}^n)$ позначимо через $D_\omega f$. Користуючись міркуваннями, викладеними при доведенні леми 4, можна показати, що існування функції $g \in H(T^m, \boldsymbol{R}^n)$, для якої

$$\lim_{s\to 0} \| s^{-1}((f(\varphi + \omega s) - f(\varphi)) - g(\varphi)) \|_0 = 0, \tag{9}$$

еквівалентне існуванню $D_\omega f$, при цьому можна покласти $D_\omega f = g$.

Множина функцій, які мають узагальнені похідні за напрямком ω, утворює простір $H_\omega^1(T^m, \boldsymbol{R}^n)$ з напівнормою $\|\cdot\|_1 = \| D_\omega \cdot \|_0 + \|\cdot\|_0$. Існує природна взаємно однозначна відповідність між класами еквівалентних (в сенсі відповідних напівнорм) функцій з визначених вище просторів квазіперіодичних функцій Безіковича, з одного боку, і просторів функцій на торі — з іншого.

Визначення простору $B_2(\boldsymbol{R}; C(\Omega); \omega)$ не потребує роз'яснень. Що стосується його аналога на торі, то тут ми не будемо апріорі вимагати рівномірного (щодо $x \in \Omega$) наближення відповідних функцій тригонометричними поліномами. Функція $F(\varphi, x)\colon T^m \times \Omega \to \boldsymbol{R}$ належить $H(T^m; C(\Omega))$, якщо при кожному $x \in \Omega$ відображення $\varphi \to F(\varphi, x)$ вимірне, а при майже всіх $\varphi \in T^m$ функція $x \to F(\varphi, x)$ неперервна, причому $\max_{x\in\Omega}| F(\varphi, x)| \subset H(T^m; \boldsymbol{R})$. Простір $H(T^m; C^r(\Omega))$ утворюють функції з $H(T^m; C(\Omega))$, які мають всі частинні похідні щодо $x_1, \ldots, x_n$ до порядку r включно, і кожна з цих похідних належить $H(T^m; C(\Omega))$.

Нехай тепер $V\colon \boldsymbol{R} \times \Omega \to \boldsymbol{R}$ має ту властивість, що при кожному $x \in \Omega$ відображення $t \to V(t, x)$ належить $B_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R})$, і відповідна функція на торі $W(\varphi, x)$ належить $H(T^m; C(\Omega))$. Замість мінімізаційної задачі для (3) одержуємо еквівалентну задачу для функціоналу

$$\mathcal{J}(u(\varphi)) = \boldsymbol{M}((1/2)\| D_\omega u(\varphi)\|^2 + W(\varphi, u(\varphi))), \tag{10}$$

область визначення якого — множина $\hat{U}_\Omega \subset H^1_\omega(T^m; \boldsymbol{R}^n)$ — утворена за тим самим принципом, що й $\hat{X}_\Omega$.

Введемо ще простір $H^r(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, складений з функцій з $H(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, які мають всі узагальнені (в сенсі Соболєва) частинні похідні до порядку r включно, а у ньому виділимо підпростір $\hat{H}^r(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, утворений з функцій, істотно обмежених разом зі всіма частинними похідними.

Нам знадобиться ще кілька результатів.

Лема 5. *Якщо* $f \in H(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, *то* $\lim_{s\to 0}\|f(\varphi + sa) - f(\varphi)\|_0 = 0$ *для довільного* $a \in \boldsymbol{R}^m$.

Лема 6. *Якщо* $f \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, $g \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, *то* $f\cdot g \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R}^n)$ *і* $D_a(f\cdot g) = D_a f\cdot g + f\cdot D_a g$ *для довільного* $a \in \boldsymbol{R}^m$.

Для доведення потрібно використати рівність (9).

Лема 7. *Нехай* $\boldsymbol{F}[u(\cdot)](\varphi) := F(\varphi, u(\varphi))$. *Якщо* $F(\varphi, x) \in H(T^m; C(\Omega))$, *то*

$$\boldsymbol{F}\colon \{u(\varphi) \in H(T^m; \boldsymbol{R}^n)\colon u(T^m) \subset \Omega\} \to H(T^m; \boldsymbol{R})$$

і цей оператор неперервний.

Доведення. Довизначивши F рівністю $F(\varphi, x) = F(x, P_\Omega x)$, можна застосувати теорему 2.1 з [11, с.31].

Лема 8. *Нехай* $F(\varphi, x) \in C^1(T^m \times \Omega)$. *Тоді* $F(\varphi, u(\varphi)) \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R})$ *для довільної функції* $u(\varphi) \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R}^n)$ *такої, що* $u(T^m) \subset \Omega$. *При цьому*

$$D_{e_j} F(\varphi, u(\varphi)) = \left.\frac{\partial F(\varphi, x)}{\partial \varphi_j}\right|_{x=u(\varphi)} + \left\langle \frac{\partial F(\varphi, u(\varphi))}{\partial x}, D_{e_j} u(\varphi)\right\rangle, \tag{11}$$

$$j = 1, \ldots, n,$$

де e_j — j*-й орт у* $\boldsymbol{R}^n$.

Доведення. Позначимо через $\Phi_j(\varphi)$ вираз у правій частині (11) і покладемо

$$\Delta_j^s u(\varphi) = u(\varphi + se_j) - u(\varphi),$$

$$G(\varphi, s, y, z) = \int_0^1 \frac{\partial F(\varphi + \tau s e_j,\ \tau y + (1-\tau) z)}{\partial \varphi_j} d\tau,$$

$$E(\varphi, s, y, z) = \int_0^1 \frac{\partial F(\varphi + \tau s e_j,\ \tau y + (1-\tau)z)}{\partial x} d\tau .$$

Використовуючи рівномірну неперервність функцій G і E, а також леми 5 і 7, маємо

$$\| s^{-1}\Delta_j^s F(\varphi, u(\varphi)) - \Phi_j(\varphi)\|_0 =$$
$$= \| G(\varphi, s, u(\varphi + se_j), u(\varphi)) - G(\varphi, 0, u(\varphi), u(\varphi)) +$$
$$+ \langle E(\varphi, s, u(\varphi + se_j), u(\varphi)), s^{-1}\Delta_j^s u(\varphi) - D_{e_j} u(\varphi)\rangle +$$
$$+ \langle E(\varphi, s, u(\varphi + se_j), u(\varphi)) - E(\varphi, 0, u(\varphi), u(\varphi)), D_{e_j} u(\varphi)\rangle \|_0 \to 0, \qquad s \to 0.$$

4. Узагальнені та класичні розв'язки. Аналогом теореми 1 є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $W(\varphi, x) \in H(T^m; C(\Omega))$ *і існує така замкнена опукла область* $\Theta \in \boldsymbol{R}^n$, *що* $\Theta + \delta \subset \Omega$ *і для майже всіх* $\varphi \in T^m$ *виконуються умови*

$$W(\varphi, \lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda W(\varphi, x) + (1-\lambda)W(\varphi, y) \quad \forall x, y \in \Theta,\ \forall \lambda \in [0, 1], \tag{12}$$
$$W(\varphi, x) \ge W(\varphi, P_\Theta x) \qquad \forall x \in \Theta + \delta. \tag{13}$$

Тоді існує така функція $u_*(\varphi) \in \hat{U}_\Theta$ *така, що*

$$\mathcal{J}(u_*(\varphi)) = \inf \mathcal{J}(\hat{U}_{\Theta+\delta}).$$

Якщо додатково припустити, що $W(\varphi, x) \in H(T^m; C^1(\Omega))$, *то* $u_*(\varphi)$ *є узагальненим (за Соболєвим) розв'язком рівняння*

$$D_\omega^2 u = \frac{\partial W(\varphi, u)}{\partial u}. \tag{14}$$

Для подальшого нам буде потрібна інформація про узагальнений розв'язок лінійного рівняння.

Твердження 2. *Нехай* $B(\varphi) \in \hat{H}(T^m; \mathrm{Hom}(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R}^n))$, $b(\varphi) \in \hat{H}(T^m; \boldsymbol{R}^n)$ *і існує стала* $\gamma > 0$ *така, що при майже всіх* $\varphi \in T^m$.

$$\langle B(\varphi)x, x\rangle \ge \gamma \|x\|^2 \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^n.$$

Тоді рівняння (14) *з* $W(\varphi, x) = (1/2)\langle B(\varphi)x, x\rangle + \langle b(\varphi), x\rangle$ *має єдиний (в сенсі* $\|\cdot\|_0$ *) узагальнений розв'язок* $u = w(\varphi) \in H^1_\omega(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, *причому*

$$\|w(\varphi)\|_0 \le \gamma^{-1}\|b(\varphi)\|_0, \qquad \operatorname*{essup}_{T^m}\|w(\varphi)\| \le \gamma^{-1}\operatorname*{essup}_{T^m}\|b(\varphi)\|.$$

Якщо ж додатково $B(\varphi) \in \hat{H}^1(T^m; \mathrm{Hom}(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R}^n))$, $b(\varphi) \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R}^n)$, *то* $w(\varphi) \in \hat{H}^1(T^m; \boldsymbol{R}^n)$.

Доведення. Нехай Θ — куля радіуса R. Тоді $P_\Theta x = R\|x\|^{-1}x$, $x \in \boldsymbol{R}^n \backslash \Theta$. Умова (12) виконується. Для виконання (13) досить, щоб $\langle \partial W(\varphi, x)/\partial x, x\rangle|_{\|x\|=R} > 0$, тобто щоб

$$(\langle B(\varphi)x, x\rangle + \langle b(\varphi), x\rangle)|_{\|x\|=R} > 0.$$

Ця умова виконується для довільного R, яке задовольняє умову $R > \gamma^{-1}\mathrm{es\,sup}\|b(\varphi)\|$. Існування шуканого розв'язку $w(\varphi)$ випливає з теореми 2.

Його єдиність доводиться стандартно — від супротивного, з використанням додатної визначеності $B(\varphi)$. Оскільки $w(\varphi)$ — узагальнений розв'язок рівняння (14), то

$$\gamma\| w(\varphi)\|_0^2 \le \boldsymbol{M}(\| D_\omega w(\varphi)\|^2 + \langle B(\varphi)w(\varphi), w(\varphi)\rangle) =$$
$$= -\langle b(\varphi), w(\varphi)\rangle_0 \le \| b(\varphi)\|_0 \| w(\varphi)\|_0,$$

звідки легко дістаємо оцінку для $\| w(\varphi)\|_0$.

Далі, з доведеного випливає, що при виконанні додаткових умов твердження рівняння

$$D_\omega^2 u = B(\varphi)u + D_{e_j}B(\varphi)\cdot w(\varphi) + D_{e_j}b(\varphi)$$

має узагальнений розв'язок $w_1(\varphi) \in \hat{H}(T^m;\, \boldsymbol{R}^n)$. Покажемо, що функція $y(\varphi, s) = s^{-1}\Delta_j^s w(\varphi) - w_1(\varphi)$ (оператор Δ_j^s визначений у доведенні леми 6) має властивість $\| y(\varphi, s)\|_0 \to 0,\ s \to 0$. Ця функція є узагальненим розв'язком рівняння

$$D_\omega^2 y = B(\varphi)y + [s^{-1}\Delta_j^s B(\varphi) - D_{e_j}B(\varphi)]w(\varphi + se_j) +$$
$$+ D_{e_j}B(\varphi)\Delta_j^s w(\varphi) + s^{-1}\Delta_j^s b(\varphi) - D_{e_j}b(\varphi).$$

На основі вже доведеного маємо

$$\| y(\varphi, s)\|_0 \le \gamma^{-1}(\operatorname{es\,sup}\| w(\varphi)\| \, \| s^{-1}\Delta_j^s B(\varphi) - D_{e_j} B(\varphi)\|_0 +$$
$$+ \operatorname{es\,sup}\| D_{e_j} B(\varphi)\| \, \| \Delta_j^s w(\varphi)\|_0 + \| s^{-1}\Delta_j^s b(\varphi) - D_{e_j} b(\varphi)\|_0) \to 0,\ s \to 0.$$

Це означає, що $D_{e_j} w(\varphi) = w_1(\varphi) \in \hat{H}(T^m;\, \boldsymbol{R}^n)$.

Тепер вже неважко встановити достатні умови існування класичного розв'язку рівняння (14).

Теорема 3. *Нехай функція* $W(\varphi, x)$ *така, що* $(\partial W(\varphi, x)/\partial x) \in C^r(T^m \times \Omega)$, *де* $r > m/2 + 2$. *Припустимо, що існує область* Θ, *яка має ті ж самі властивості, що й у теоремі 2, але умова опуклості функції* W *виконується у посиленому варіанті: існує* $\gamma > 0$ *таке, що для майже всіх* $\varphi \in T^m$

$$\left\langle \frac{\partial^2 W(\varphi, x)}{\partial x^2} y, y \right\rangle \ge \gamma\| y\|^2 \qquad \forall x \in \Theta,\ \forall y \in \boldsymbol{R}^n.$$

Тоді рівняння (14) *має класичний розв'язок.*

Доведення. Нехай $u_*(\varphi)$ — функція з теореми 2, $u_1(\varphi)$ — узагальнений розв'язок рівняння у варіаціях

$$D_\omega^2 u = B(\varphi)u + b(\varphi), \tag{15}$$

де $B(\varphi) = \partial W^2(\varphi, u_*(\varphi))/\partial x^2$, $b(\varphi) = \partial W^2(\varphi, u_*(\varphi))/\partial\varphi_j\partial x$. Існування і істотна обмеженість останнього гарантовані твердженням 2. Функція $y(\varphi, s) = s^{-1}\Delta_j^s u_*(\varphi) - u_1(\varphi)$ є узагальненим розв'язком рівняння

$$D_\omega^2 y = B(\varphi, s)y + (B(\varphi, s) - B(\varphi))u_1(\varphi) + (b(\varphi, s) - b(\varphi)),$$

де

$$B(\varphi, s) = \int_0^1 \frac{\partial W^2(\varphi + \tau s e_j, \tau u_*(\varphi + s e_j) + (1-\tau)u_*(\varphi))}{\partial x^2} d\tau,$$

$$b(\varphi, s) = \int_0^1 \frac{\partial W^2(\varphi + \tau s e_j, \tau u_*(\varphi + s e_j) + (1-\tau) u_*(\varphi))}{\partial \varphi_j \partial x} d\tau.$$

Оскільки $\| B(\varphi, s) - B(\varphi) \|_0 \to 0, \| b(\varphi, s) - b(\varphi) \|_0 \to 0$ при $s \to 0$ (див. доведення леми 8), то з урахуванням твердження 2 маємо $\| y(\varphi, s) \|_0 \to 0, \ s \to 0$. Це означає, що $D_{e_j} u_*(\varphi)$ існує і є узагальненим розв'язком (15). З урахуванням лем 6 і 8 ми можемо до (15) послідовно застосувати твердження 2, і, таким чином, довести існування у функції $u_*(\varphi)$ всіх узагальнених похідних до порядку r включно. Доведення завершується застосуванням теореми вкладення.

1. *Rabinowitz P. H.* Periodic solutions of Hamiltonian systems // Communs Pure and Appl. Math. – 1978. – **31**, – P. 157 – 184.
2. *Clark D. C.* Periodic solutions of variational systems of ordinary differential equation //J. Different. Equat. – 1978. – **28**, – P. 354 – 368.
3. *Перов А. И.* Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. – Воронеж.: Изд-во Воронеж. ун-та, 1981. – 196 с.
4. *Mawhin J., Willem M.* Multiple solutions of the periodic boundary-value problem for some forced pendulum-like equations //J. Different. Equat. – 1984. – **52**, – P. 264 – 287.
5. *Offin D. C.* Subharmonic oscillations for forced pendulum type equations // Different. and Integral Equat. – 1990. – **3**,№5 – P.965 – 972.
6. *Blot J.* Almost periodically forced pendulum // Funk. ekvacioj. – 1993. – **36**. – P. 235 – 250.
7. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagrangians // J. Math. Anal. and Appl. – 1988. – **134**, №2. — P.312 - 321.
8. *Blot J.* Oscillations presque-periodiques forcees d'equations d'Euler – Lagrange // Bull. Soc. math. France. – 1994. – **122**, №2. – P.285 – 304.
9. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
10. *Самойленко А. М.* Елементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
11. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 392 с.

Одержано 30.12.97