УДК 517. 9

В. Г. Коломиец, А. И. Мельников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СЛУЧАЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Conditions for the existence in the Banach space are established for a random integral manifold of certain class of differential systems with an unbounded sectorial operator and random right-hand sides.

Встановлено умови існування випадкового інтегрального многовиду одного класу диференціальних систем з необмеженим секторіальним оператором та випадковою правою частиною у банаховому просторі.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$. В настоящей работе будем рассматривать только интегрируемые случайные величины и функции на этом пространстве. Символом $\mathbf{M}$ обозначено математическое ожидание.

Рассмотрим систему

$$\frac{dz}{dt} = Z(t, z, \omega). \tag{1}$$

Функция $Z(t, z, \omega)$ определена при всех $t \in \boldsymbol{R}$ ($z \in \boldsymbol{X}$ – некоторое банахово пространство), непрерывна по t, z при каждом ω и измерима по Бохнеру относительно σ-алгебры – произведения σ-алгебр борелевских множеств на $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{X}$ и σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Под решением данного уравнения будем понимать случайную функцию, которая в каждый момент времени удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению. Обозначим через $z = z(t, \omega)$ решение уравнения (1). График этого решения в пространстве $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{X} \times \Omega$ назовем случайной интегральной кривой.

Определение [1, 2]. *Под случайным интегральным многообразием уравнения* (1) *будем понимать непустое множество в пространстве* $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{X} \times \Omega$, *составленное из случайных интегральных кривых этого уравнения.*

Пусть $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ – некоторые банаховы пространства. Рассмотрим задачу о существовании случайного интегрального многообразия системы вида

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = F(t, x, y, \varepsilon, \omega), \\ \frac{dy}{dt} + Ay = H(t, x, y, \varepsilon, \omega). \end{gathered} \tag{2}$$

Предположим, что правые части системы (2) удовлетворяют следующим условиям.

1. A – секториальный оператор в пространстве $\boldsymbol{Y}$ [4], т. е. он замкнут, плотно определен и , кроме того, для некоторого $\varphi \in]0, \pi/2[$, $M \geq 1$ и $a \in \boldsymbol{R}$ сектор

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda\colon\ \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi,\ \lambda \neq a\}$$

лежит в резольвентном множестве оператора A и

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \qquad \forall \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

Будем предполагать, что $a > 0$. В этом случае показано [4], что A – инфинитезимальный оператор аналитической полугруппы $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$, определяемой формулой

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda + A)^{-1} e^{-\lambda t}\, dt,$$

где Γ – некоторый контур в резольвентном множестве оператора A, и при этом

$$\left\| e^{-At} \right\| \le Ce^{-at}, \quad \left\| Ae^{-At} \right\| \le \frac{C}{t} e^{-at}, \tag{3}$$

где C — некоторая неотрицательная постоянная.

2. Функции

$$F(t, x, y, \varepsilon, \omega)\colon \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{X}\times \boldsymbol{Y}\times]0, \varepsilon[\times \Omega \to \boldsymbol{X},$$
$$H(t, x, y, \varepsilon, \omega)\colon \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{X}\times \boldsymbol{Y}\times]0, \varepsilon[\times \Omega \to \boldsymbol{X}$$

измеримы по Бохнеру, непрерывны по x, y, t при каждом $\omega \in \Omega$.

3. Для всех t, x, y

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\| F(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| &\le K(\varepsilon), \\ \mathbf{M}\| H(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| &\le K(\varepsilon), \end{aligned} \tag{4}$$

где $K(\varepsilon)$ – неотрицательная функция от ε, $K(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Для любых $t \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{X}$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $\varepsilon \in\ ]0, \varepsilon^*[$, $\lambda(\varepsilon) \ge 0$, $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered} \| F(t, x_1, y_1, \varepsilon, \omega)\| - \| F(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \le \lambda(\varepsilon)\times \\ \times \| x_1 - x\| + \| y_1 - y\|, \\ \| H(t, x_1, y_1, \varepsilon, \omega) - H(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \le \lambda(\varepsilon)\times \\ \times \| x_1 - x\| + \| y_1 - y\|. \end{gathered} \tag{5}$$

Покажем, что при указанных условиях исходная система (2) имеет случайное интегральное многообразие.

Введем класс $L(D, \Delta)$ случайных функций $f(t, x, \omega)\colon \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{X} \times \Omega \to \boldsymbol{Y}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{gathered} \mathbf{M}\|f(t, x, \omega)\| \le D \le \sigma_0, \\ \mathbf{M}\|f(t, x, \omega) - f(t, x_1, \omega)\| \le \Delta\| x - x_1\|, \end{gathered} \tag{6}$$

где x, $x_1 \in \boldsymbol{X}$, $D > 0$, $\Delta > 0$ — некоторые постоянные.

Норму в $L(D, \Delta)$ определим равенством

$$\|f(t, x, \omega)\|_{L(D, \Delta)} = \sup_{t,x} \mathbf{M}\| f(t,x,\omega)\|.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x,f(t,x,\omega),\varepsilon,\omega), \tag{7}$$

где $f(t, x, \omega)$ — произвольная функция из класса $L(D, \Delta)$.

Из (4) – (6) следует, что существует единственное с вероятностью единица решение задачи Коши для уравнения (7) с начальным условием $x_t = x_0(\omega)$ при $t = t_0$. Обозначим это решение

$$x_t = T^f_{z,t_0}(x_0,\omega), \quad z = t - t_0.$$

Пусть теперь $f(t, x, \omega)$ и $f'(t, x, \omega)$ — две функции из класса $L(D, \Delta)$. Положим

$$x_t = T^f_{z,t_0}(x_0, \omega), \quad x'_t = T^{f'}_{z,t_0}(x', \omega), \quad z = t - t_0.$$

Тогда с учетом (4) – (7) получим

$$\mathbf{M}\left\|T_{z,t_0}^{f}\left(x_0,\omega\right) - T_{z,t_0}^{f'}(x',\omega)\right\| = \mathbf{M}\|x_t - x_t'\| \le$$

$$\le \mathbf{M}\|x' - x_0\|\exp\{\lambda(\varepsilon)(1+\Delta)|z|\} + \frac{\|f' - f\|_{L(D,\Delta)}}{1+\Delta}\times$$

$$\times(\exp\{\lambda(\varepsilon)(1+\Delta)|z|\} - 1). \tag{8}$$

Зададим преобразование $S_{t,x}^{\omega}$, переводящее функцию из класса $L(D,\Delta)$, в функцию

$$S_{t,x}^{\omega}(f) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} H\left(s, T_{s-t,t}^{f}(x,\omega), f\left(s, T_{s-t,t}^{f}(x,\omega),\omega\right),\varepsilon,\omega\right)ds. \tag{9}$$

Выберем D и Δ зависящими от ε: $D = D(\varepsilon)$ и $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $D(\varepsilon)\to 0$, $\Delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, и найдем $\varepsilon_0\le\varepsilon^*$ такое, что при всех $0<\varepsilon\le$ $\le\varepsilon_0$ были справедливы неравенства

$$\begin{gathered}
\frac{C}{a}(K(\varepsilon) + \Delta D) \le D,\\
2\lambda(\varepsilon)(1+\Delta) \le a,\\
2C\lambda(\varepsilon)(1+\Delta) \le a\Delta,\\
4C\lambda(\varepsilon) \le a.
\end{gathered} \tag{10}$$

Возможность выбора D и Δ, как функции от ε и с такими свойствами, обеспечивается свойствами $K(\varepsilon)$ и $\lambda(\varepsilon)$. Теперь несложно на основании (3) – (6), (8) – (10) показать , что

$$\mathbf{M}\left\|S_{t,x_0}^{\omega}(f)\right\| \le D(\varepsilon), \tag{11}$$

$$\mathbf{M}\left\|S_{t,x'}^{\omega}(f') - S_{t,x_0}^{\omega}(f)\right\| \le \frac{1}{2}\mathbf{M}\|f' - f\|_{L(D,\Delta)} + \Delta(\varepsilon)\mathbf{M}\|x' - x\|. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует, что $S_{t,x}^{\omega}(f)$ переводит класс $L(D,\Delta)$ в $L(D,\Delta)$ и является оператором сжатия. В силу того, что $L(D,\Delta)$ — компактное множество, уравнение

$$f = S_{t,x}^{\omega}(f) \tag{13}$$

имеет в $L(D,\Delta)$ единственное с вероятностью единица решение. Обозначим его

$$f = \varphi(t,x,\varepsilon,\omega). \tag{14}$$

Данная функция определяет случайное интегральное многообразие системы (2). Действительно, по определению оператора T_{z,t_0}^{f} функция $x_t = T_{z,t_0}^{f}(x_0,\omega)$ удовлетворяет первому уравнению системы (2), а переписав (13) в развернутом виде и подставив в него $T_{z,t_0}^{f}\left(x_0,\omega\right)$ вместо x, несложно показать, что функция

$$y_t = \varphi\left(t, T_{t-t_0,t_0}^{f}(x_0,\omega),\varepsilon,\omega\right)$$

принадлежит области определения оператора A и удовлетворяет второму уравнению системы (2).

Заметим, что если пространство X таково, что правые части системы (2) могут быть периодичны по x, то такое же свойство будет иметь и функция $\varphi(t,x,\varepsilon,\omega)$.

На случайном интегральном многообразии система (2) сводится к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = F_1(t,x,\varepsilon,\omega),$$

где

$$F_1(t, x, \varepsilon, \omega) = F(t, x, \varphi(t, x, \varepsilon, \omega), \varepsilon, \omega).$$

При этом можно показать, что

$$\mathbf{M}\,\| F_1(t, x, \varepsilon, \omega)\| \le \delta^*(\varepsilon),$$

$$\mathbf{M}\,\| F_1(t, x, \varepsilon, \omega) - F_1(t, x_1, \varepsilon, \omega)\| \le \eta^*(\varepsilon)\,\mathbf{M}\,\|x - x_1\|$$

при любых x, x_1, а $\delta^*(\varepsilon)$, $\eta^*(\varepsilon)$ — неотрицательные функции, стремящиеся к нулю вместе с ε.

Рассмотрим далее вопрос о притяжении случайным интегральным многообразием траекторий, определяющих поведение системы (2). Для этого рассмотрим следующую интегро-дифференциальную систему:

$$\frac{dx_t}{dt} = F(t,x_t,y,\varepsilon,\omega),$$

$$y_t = \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)} H(\tau,x_\tau,y_\tau,\varepsilon,\omega)\,d\tau + e^{-A(t-t_0)}\,y, \tag{15}$$

$$y = y(\omega), \quad \mathbf{M}\,\|y\| \le \sigma, \quad t > t_0.$$

Используя свойство (3) оператора A, а также свойства функций $F(t, x, y, \varepsilon, \omega)$ и $H(t, x, y, \varepsilon, \omega)$, несложно показать, что существуют такие ε_1 и $\sigma = \sigma_1$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon^*$, $\sigma_1 \le \sigma_0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $\mathbf{M}\,\|y(\omega)\| \le \sigma_1$ система (15) имеет единственное с вероятностью единица решение (x_t, y_t) такое, что $\mathbf{M}\,\|y_t\| \le D(\varepsilon) \le \sigma_0$ при $t > t_0$, при этом справедливо представление

$$y_t = \psi(x_0, t, x_t, y, \varepsilon, \omega) \tag{16}$$

и выполняется неравенство

$$\mathbf{M}\,\|\psi(x_0, t, x'\ y', \varepsilon, \omega) - \psi(x_0, t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \le \tag{17}$$

$$\le \nu'(\varepsilon, \sigma_0)\mathbf{M}\,\|x' - x\| + \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left(-\frac{a}{2}(t - t_0)\right)\mathbf{M}\,\|y' - y\|,$$

где $t \ge t_0$, $x = x(\omega)$, $x' = x'(\omega)$, $y = y(\omega)$, $y' = y'(\omega)$, $\mathbf{M}\,\|y\| \le \sigma_0$, $\mathbf{M}\|y'\| \le \sigma_0$, а $\nu'(\varepsilon, \sigma_0)$ и $\mu(\varepsilon, \sigma_0)$ — некоторые неотрицательные функции ε и σ_0, стремящиеся к нулю и C при ε и σ_0, стремящихся к нулю.

Любое решение системы (15) является решением системы (2) при $t \ge t_0$, и наоборот, произвольное решение исходной системы (2) такое, что $\mathbf{M}\,\|y_{t_0}\| \le \sigma_1$, удовлетворяет интегро-дифференциальной системе (15).

Отсюда видно, что все решения системы (2), лежащие на случайном интегральном многообразии $y = \varphi(t,x,\varepsilon,\omega)$, при достаточно малых ε будут удовлетворять представлению (16), и, следовательно, для любого из них можно указать соответствующее значение y' в представлении (16). Тогда из (16) следует неравенство

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x, \varepsilon, \omega) - \psi(x_0, t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \leq$$
$$\leq \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left(-\frac{a}{2}(t - t_0)\right)\mathbf{M}\|y - y'\|, \quad t \geq t_0.$$

Заменив в этом неравенстве x на x_t, будем иметь

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x_t, \varepsilon, \omega) - y_t\| \leq \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left(-\frac{a}{2}(t - t_0)\right)\times$$
$$\times \boldsymbol{M}\|\varphi(t, x_{t_0}, \varepsilon, \omega) - y_{t_0}\|, \quad t \geq t_0.$$

Полученные выше результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема. *Пусть правые части системы* (2) *удовлетворяют условиям* 1 – 4. *Тогда можно указать такие положительные* ε_1, σ_1, *причем* $\sigma_1 \leq \sigma_0$, *что исходная система* (2) *имеет с вероятностью единица случайное интегральное многообразие* S_t^ω, *которое при любом* ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, *характеризуется следующими свойствами:*

1. S_t^ω *допускает параметрическое представление вида*

$$y = \varphi(t, x, \varepsilon, \omega),$$

где $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$ *– случайная функция, определенная при всех* t, x, *измеримая по совокупности аргументов. В случае, когда пространство* $\boldsymbol{X}$ *таково, что функции, стоящие в правой части исходной системы* (2), *периодичны по* x, *такое же свойство будет иметь и функция* $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$. *При этом существуют положительные функции* $D(\varepsilon)$ *и* $\Delta(\varepsilon)$, *стремящиеся к нулю вместе с* ε, *такие, что*

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)\| \leq D(\varepsilon),$$
$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x_1, \varepsilon, \omega) - \varphi(t, x, \varepsilon, \omega)\| \leq \Delta(\varepsilon)\mathbf{M}\|x_1 - x\|$$

при любых $t \in \boldsymbol{R}$, $x = x(\omega)$, $x_1 = x_1(\omega)$ — *интегрируемые случайные величины со значениями в* $\boldsymbol{X}$.

2. *На случайном интегральном многообразии система* (2) *сводится к уравнению*

$$\frac{dx}{dt} = F_1(t, x, \varepsilon, \omega),$$

где $F_1(t, x, \varepsilon, \omega) = F(t, x, \varphi(t, x, \varepsilon, \omega), \varepsilon, \omega)$.

При этом

$$\mathbf{M}\|F_1(t, x, \varepsilon, \omega)\| \leq \delta^*(\varepsilon),$$
$$\mathbf{M}\|F_1(t, x, \varepsilon, \omega) - F_1(t, x_1, \varepsilon, \omega)\| \leq \eta^*(\varepsilon)\mathbf{M}\|x - x_1\|$$

при любых $x = x(\omega)$, $x_1 = x_1(\omega)$ *и* $\delta^*(\varepsilon), \eta^*(\varepsilon)$ — *неотрицательные функции, стремящиеся к нулю вместе* с ε.

3. *Если* $x_t = x_t(t, \omega)$, $y_t = y_t(t, \omega)$ *– произвольное решение системы* (2) *такое, что при некотором* $t = t_0$ *выполняется неравенство* $\mathbf{M}\|y_t\| \leq \sigma_1$, *то для любого* $t \geq t_0$

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x_1, \varepsilon, \omega) - y_t\| \leq \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left(-\frac{a}{2}(t - t_0)\right)\times$$
$$\times \boldsymbol{M}\|\varphi(t, x_{t_0}, \varepsilon, \omega) - y_{t_0}\|.$$

Замечания. **1**. Аналогично рассматривается случай, когда спектр оператора A, стоящего в левой части исходной системы, расположен как в левой, так и в правой полуплоскости и распадается на два спектральных множества, отделенных от мнимой оси. Тогда можно, введя функцию Грина, доказать аналогичную теорему о существовании случайного интегрального многообразия. При этом утверждение 3 теоремы будет выполняться не для всех решений системы (2), а только для решений, начальные условия для которых в некоторый момент времени удовлетворяют условию принадлежности многообразию случайных точек, размерность которого зависит от разложения спектра оператора A на два непересекающихся спектральных множества описанным выше способом.

2. Со спектральным оператором A, удовлетворяющим условиям приведенной теоремы, можно связать ряд пространств [3]. Так, для каждого $\alpha \geq 0$ положим

$$\boldsymbol{X}^{\alpha} = D(A^{\alpha}),$$

где $D(A^{\alpha})$ — область определения оператора A^{α}, и введем в пространстве $\boldsymbol{X}^{\alpha}$ норму согласно формуле

$$\|x\|_{\alpha} = \|A^{\alpha}x\|_{\alpha}, \qquad x \in \boldsymbol{X}^{\alpha}.$$

Построенное таким образом пространство $\boldsymbol{X}^{\alpha}$ будет банаховым и $X^0 = \boldsymbol{X}$. При этом при $\alpha \geq \beta \geq 0$ пространство $\boldsymbol{X}^{\alpha}$ есть плотное подпространство в $\boldsymbol{X}^{\beta}$, причем соответствующее вложение непрерывно.

Случайное интегральное многообразие можно искать в пространстве $\boldsymbol{X}^{\alpha}$. Для этого нужно заменить условия (5) условиями

$$\|F(t, x_1, y_1, \varepsilon, \omega) - F(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \leq \lambda(\varepsilon)\times$$
$$\times(\|x_1 - x\|_{\alpha} + \|y_1 - y\|),$$
$$\|H(t, x_1, y_1, \varepsilon, \omega) - H(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \leq \lambda(\varepsilon)\times$$
$$\times(\|x_1 - x\|_{\alpha} + \|y_1 - y\|).$$

В этом случае можно также доказать теорему о существовании случайного интегрального многообразия в пространстве $\boldsymbol{X}^{\alpha}$, более узком, чем $\boldsymbol{X}$.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов: Изд–во АН УССР, 1945. – 140 с.
2. *Митропольский Ю.* А., *Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
3. *Коломиец В. Г., Мельников А. И.* Об интегральных многообразиях систем дифференциальных уравнений со случайной правой частью в банаховом пространстве //Укр. мат. журн. – 1992 . – 44, №1. – С. 17 – 21.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Получено 20.03.98