УДК 517. 432

С. О. Кужіль (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЕЛЕМЕНТИ СХЕМИ РОЗСІЯННЯ ЛАКСА – ФІЛЛІПСА ДЛЯ ρ-ЗБУРЕНЬ АБСТРАКТНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

We give the definition of ρ-perturbations of an abstract wave equation. As a special case, this definition includes perturbations with a compact support for the classical wave equation. By using the Lax – Phillips method, we study the scattering of "ρ-perturbed" systems and establish some properties of the corresponding scattering matrices.

Дано означення ρ-збурень абстрактного хвильового рівняння, що як частинний випадок включає збурення з компактним носієм для класичного хвильового рівняння. Користуючись методом Лакса – Філліпса, вивчено розсіяння „ρ-збурених" систем і встановлено деякі властивості відповідних матриць розсіяння.

Вступ. Як у фізичній, так і у математичній літературі існує велика кількість робіт (див., наприклад, огляди в [1, 2]), в яких методами теорії розсіяння вивчаються різні збурення класичного хвильового рівняння. Кінцевою метою таких досліджень є встановлення зв'язку між властивостями матриці розсіяння та характером збурення хвильового рівняння. Для розв'язання цієї задачі традиційно використовується формалізм нестаціонарної теорії розсіяння і, зокрема, підхід Лакса – Філліпса. Цей підхід накладає певні обмеження на клас збурень, що розглядаються, але, водночас, дозволяє значно глибше дослідити властивості матриці розсіяння. Зокрема, саме тут найбільш природно виявляються аналітичні властивості матриці розсіяння.

Необхідною умовою застосування методу Лакса – Філліпса до вивчення динаміки системи є існування для неї вхідного та вихідного підпросторів. В типових випадках ці підпростори отримуються за допомогою модифікацій добре відомих [1] вхідного та вихідного підпросторів для вільного хвильового рівняння $\mathbb{R}^n$.

Деяка стандартність методу Лакса – Філліпса при дослідженні збурень різного типу (розсіяння на перешкоді, потенціали з компактним носієм, неоднорідність середовища) наводить на думку про можливість розвитку подібної схеми для абстрактного диференціально-операторного рівняння

$$u_{tt} = -Lu \tag{1}$$

(де L — самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$), що включала б в себе, як частинний випадок, різні збурення класичного хвильового рівняння.

Такий абстрактний підхід має дозволити, в перспективі, не тільки розширити коло застосувань методу Лакса – Філліпса, але і дослідити низку нових задач в теорії розсіяння класичного хвильового рівняння. Зрозуміло, що для побудови схеми Лакса – Філліпса для абстрактного диференціально-операторного рівняння (1) необхідно:

а) дати означення класу „незбурених" операторів, що визначають в (1) a priori вільну динаміку, і побудувати відповідні вхідний та вихідний підпростори;

б) задаючи динаміку збуреної системи за допомогою рівняння (1), де оператор L є деяким збуренням незбуреного оператора (тобто вільної динаміки), довести існування для такої системи вхідного та вихідного підпросторів і дослідити властивості відповідної матриці розсіяння.

Саме цим питанням і присвячена дана робота. Вона є продовженням циклу робіт автора [3 – 6] за даною тематикою. Стисло охарактеризуємо її зміст.

В п. 1 нагадуються означення класу незбурених операторів [3, 4] і наводяться деякі їхні властивості. Центральною тут є теорема 2, з якої випливає, що довільний незбурений оператор є ортогональною сумою двох операторів простої структури (розширення Фрідріхса та Крейна). Відзначимо, що користуючись перетворенням Радона, неважко перевірити, що оператор Лапласа $-\Delta$ у просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$ (n непарне) є незбуреним [5]. Таким чином, ми можемо розглядати клас незбурених операторів як деякий абстрактний аналог оператора Лапласа.

Використовуючи поняття незбуреного оператора, у п. 2 дається означення абстрактного хвильового рівняння. Це рівняння має багато спільних рис з класичним хвильовим рівнянням в $\mathbb{R}^n$ (n непарне) і тому природно вважати, що воно описує динаміку незбуреної системи. У цьому пункті конспективно наводяться властивості абстрактного хвильового рівняння, які є необхідними для подальшого викладу. Зокрема, для групи розв'язків цього рівняння описуються вхідний і вихідний підпростори та будується трансляційне зображення. Доведення цих результатів та їх більш детальний аналіз можна знайти в [6].

У п. 3 дається означення ρ-збуреного абстрактного хвильового рівняння, яке задає еволюцію збуреної системи, і подібно п. 2 вивчаються властивості групи розв'язків цього рівняння.

У п. 4 наводиться означення матриці розсіяння для динаміки системи, що задається ρ-збуреним абстрактним хвильовим рівнянням, і досліджуються деякі її властивості.

1. Незбурені оператори. ***1.1. Властивості простих максимальних симетричних операторів.*** Нагадаємо, що симетричний оператор B, який діє у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, називається *простим*, якщо для нього не існує інваріантного нетривіального підпростору простору $\mathfrak{H}$, в якому цей оператор визначав би самоспряжений оператор.

Надалі будемо вважати, що B — простий, максимальний симетричний оператор в $\mathfrak{H}$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що в нижній півплощині дефектне число оператора B дорівнює нулю.

Прості максимальні симетричні оператори мають досить просту структуру. Так, з урахуванням [7] легко бачити, що справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай B — простий максимальний симетричний оператор з індексом дефекту $(0, m)$. Тоді існує ізометрія F простору $\mathfrak{H}$ на простір $L_2(\mathbb{R}_+, N) := L_2(\mathbb{R}_+) \otimes N$ така, що*

$$FD(B) = \overset{0}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+, N) := \overset{0}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) \otimes N, \tag{2}$$

$$FBu = i\frac{d}{ds}(Fu)(s) \qquad \forall\, u \in D(B), \tag{3}$$

де $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, N — допоміжний гільбертів простір розмірності m, $\overset{0}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ — простір Соболєва, $\otimes$ — тензорний добуток.

У просторі $\mathfrak{H}$ розглянемо оператор B^2. Беручи до уваги рівності (2), (3), або використовуючи безпосередньо властивості простоти та максимальності симетричного оператора B, неважко довести [5], що справедлива така лема.

Лема 1. *Оператор B^2 є замкненим, щільно визначеним симетричним оператором. При цьому:*

a) $(B^2)^* = B^*B^*$;

b) $\operatorname{Ker}((B^2)^* - z^2 I) = \ker(B^* - zI), \quad \operatorname{Im} z \le 0$;

c) лінеал $BD(B^2)$ є щільним у просторі $\mathfrak{H}$.

1.2. Незбурені оператори. Самоспряжене розширення L симетричного оператора B^2 будемо називати *незбуреним оператором*, якщо при всіх $u \in$ $\in D(L)$ виконується рівність

$$(Lu, u) = \| B^* u \|^2. \tag{4}$$

Властивість оператора L бути „незбуреним" залежить від вибору оператора B. Надалі з контексту буде зрозуміло, який оператор B мається на увазі в тому чи іншому конкретному випадку.

Множину всіх незбурених операторів при фіксованому операторі B позначимо через $\mathfrak{M}_B$. Очевидно, що самоспряжені оператори $L_\mu = B^* B$ і $L_M = BB^*$ є незбуреними. З урахуванням [8] легко бачити, що ці оператори є відповідно розширеннями Фрідріхса та Крейна оператора B^2. Наступна теорема показує, що клас $\mathfrak{M}_B$ однозначно визначається розширеннями подібного типу.

Теорема 2 [6]. *Оператор L належить до класу $\mathfrak{M}_B$ тоді і тільки тоді, коли існують взаємно ортогональні інваріантні відносно оператора B підпростори $\mathfrak{H}_1$ і $\mathfrak{H}_2$ простору $\mathfrak{H}$ такі, що:*

a) справджується рівність

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2; \tag{5}$$

b) оператор $B_i = B\big|_{D(B)\cap \mathfrak{H}_i}$, $i = 1, 2$, є простим максимальним симетричним оператором у просторі $\mathfrak{H}_i$;

c) оператор L відносно розкладу (5) *має вигляд*

$$L = L_{1\mu} \oplus L_{2M}, \tag{6}$$

де $L_{1\mu} = B_1^* B_1$ — розширення Фрідріхса оператора B_1^2 у просторі $\mathfrak{H}_1$, а $L_{2M} = B_2 B_2^*$ — розширення Крейна оператора B_2^2 у просторі $\mathfrak{H}_2$.

З теореми 2 випливає декілька простих тверджень про властивості незбурених операторів. Їх доведення можна знайти в [6].

Наслідок 1. *Спектр незбуреного оператора L ($\in \mathfrak{M}_B$) збігається з додатною піввіссю $[0, \infty)$ і є абсолютно неперервним з кратністю m, де m — ненульове дефектне число оператора B. Оператори з класу $\mathfrak{M}_B$ є унітарно еквівалентними між собою.*

2. Абстрактне хвильове рівняння. ***2.1. Означення та допоміжні твердження.*** Диференціально-операторне рівняння (1) з довільним незбуреним оператором L у правій частині будемо називати *абстрактним хвильовим рівнянням.*

Нехай $L \in \mathfrak{M}_B$. Оскільки оператор B є простим максимальним симетричним оператором, то $\ker B^* = \{0\}$ і, отже, вираз

$$\| u \|_L := \sqrt{(Lu, u)} = \| B^* u \|, \quad u \in D(L) \tag{7}$$

є нормою на лінеалі $D(L)$. Поповнення лінеалу $D(L)$ за цією нормою позначимо через $\mathfrak{H}_L$. Опишемо елементи гільбертового простору $\mathfrak{H}_L$ у зручній для подальшого використання формі. З рівності (7) зрозуміло, що послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($u_n \in D(B^2)$) фундаментальна в $\mathfrak{H}_L$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{Bu_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в просторі $\mathfrak{H}$.

Будемо говорити, що послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($u_n \in D(B^2)$) збігається в $\mathfrak{H}_L$ до елемента x_p, якщо послідовність $\{Bu_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається у просторі $\mathfrak{H}$ до елемента p.

Зрозуміло, що для довільного $f \in D(L)$ справджується рівність

$$(f, x_p)_L = \lim_{n\to\infty} (f, u_n)_L = \lim_{n\to\infty} (B^* f, Bu_n) = (B^* f, p). \tag{8}$$

З твердження с) леми 1 випливає, що простір $\mathfrak{H}_L$ *може бути ідентифікований* з гільбертовим простором $\{ x_p | \ \forall p \in \mathfrak{H} \}$, де $x_{\alpha p+\beta\tilde{p}} = \alpha x_p + \beta x_{\tilde{p}}$, $\{ \alpha, \beta \} \subset \mathbb{C}$, $\{p, \tilde{p}\} \subset \mathfrak{H}$ і

$$(x_p, x_{\tilde{p}})_L = (p, \tilde{p}) \tag{9}$$

($(\cdot, \cdot)_L$ і $(\cdot, \cdot)$ — скалярні добутки у просторах $\mathfrak{H}_L$ і $\mathfrak{H}$ відповідно).

З урахуванням (8) неважко бачити, що при цьому ототожненні елементу $f \in D(L)$ відповідає елемент $x_{B^* f}$. Отже, лінеал $D(L)$ збігається з лінеалом $\left\{ x_{B^* f} \,\middle|\, \forall f \in D(L) \right\}$.

Гільбертів простір $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ будемо називати *простором даних.* Елементи цього простору зручно позначати у вигляді матриць-стовпців $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$, де верхня компонента належить підпростору $\mathfrak{H}_L \oplus 0$, а нижня — підпростору $0 \oplus \mathfrak{H}$.

Покладемо $u_t = v$ і перепишемо (1) у вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо перевіряється (див., наприклад, [9]), що у просторі H_L оператор Q з областю визначення

$$D(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \,\middle|\, \{u, v\} \subset D(L) \right\} \tag{10}$$

є кососамоспряженим в істотному і тому його замикання $Q_L = \overline{Q}$ є генератором унітарної в H_L групи розв'язків задачі Коші $W_L(t) = e^{Q_L t}$ рівняння (1).

У випадку, коли незбурений оператор L є розширенням Фрідріхса L_μ або Крейна L_M, генератор Q_L будемо позначати відповідно через Q_μ та Q_M.

З теореми 2 випливає, що для незбуреного оператора L існує розклад (5) простору $\mathfrak{H}$, відносно якого цей оператор має вигляд (6). Тому

$$H_L = H_{L_{1\mu}} \oplus H_{L_{2M}}, \tag{11}$$

де $H_{L_{1\mu}} = \mathfrak{H}_{L_{1\mu}} \oplus \mathfrak{H}_1$, $H_{L_{2M}} = \mathfrak{H}_{L_{2M}} \oplus \mathfrak{H}_2$. При цьому оператор Q_L відносно розкладу (11) має вигляд

$$Q_L = Q_{1\mu} \oplus Q_{2M}. \tag{12}$$

Отже, задача опису області визначення оператора Q_L зводиться до подібної задачі для операторів Q_μ та Q_M.

Твердження 1 [6]. *Вірні такі співвідношення:*

$$D(Q_\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} x_\gamma \\ p \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in D(B^*), \ p \in D(B) \right\}, \quad Q_\mu \begin{pmatrix} x_\gamma \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Bp} \\ -B^*\gamma \end{pmatrix}.$$

В свою чергу,

$$D(Q_M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_\gamma \\ p \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in D(B), \ p \in D(B^*) \right\}, \quad Q_M \begin{pmatrix} x_\gamma \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B^* p} \\ -B^*\gamma \end{pmatrix}.$$

2.2. Вхідний та вихідний підпростори. Підпростір D_+ гільбертового простору H називається *вихідним* для унітарної в H групи $W(t)$, якщо виконуються такі умови:

i) $W(t)D_+ \subset D_+ \ (t \geq 0)$;

ii) $\bigcap\limits_{t \geq 0} W(t)D_+ = \{0\}$.

В свою чергу, підпростір D_- називається *вхідним* для групи $W(t)$, якщо D_- є вихідним для групи $W^*(t)$.

Нехай, як і раніше, оператор L є незбуреним ($\in \mathfrak{M}_B$). У просторі даних H_L розглянемо підпростори

$$D_- = \left\{ \begin{pmatrix} x_p \\ -ip \end{pmatrix} \middle| \, p \in \mathfrak{H} \right\}, \quad D_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_p \\ ip \end{pmatrix} \middle| \, p \in \mathfrak{H} \right\}. \tag{13}$$

З означення H_L і рівності (9) випливає, що ці підпростори є ортогональними і

$$H_L = D_- \oplus D_+. \tag{14}$$

Теорема 3 [6]. *Підпростори D_- та D_+ є відповідно вхідним та вихідним підпросторами для групи розв'язків $W_L(t)$ абстрактного хвильового рівняння. При цьому*

$$\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_L(t)D_-} = \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_L(t)D_+} = H \tag{15}$$

і

$$W_L^*(t)\begin{pmatrix} x_p \\ -ip \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{F(t)p} \\ -iF(t)p \end{pmatrix}, \quad W_L(t)\begin{pmatrix} x_p \\ ip \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{F(t)p} \\ iF(t)p \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

де $F(t) = e^{iBt}$ — цілком неунітарна півгрупа ізометричних у просторі $\mathfrak{H}$ операторів з генератором iB, $p \in \mathfrak{H}$.

З теореми 3, рівності (14) та [1] випливає, що при $L \in \mathfrak{M}_B$ матриця розсіяння для групи розв'язків $W_L(t)$ є аналітичною та унітарною в комплексній площині. Тому природно вважати, що абстрактне хвильове рівняння описує динаміку розвитку саме незбуреної системи.

2.3. Трансляційне зображення. Нехай F — ізометрія простору $\mathfrak{H}$ на $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, яка задовольняє умову теореми 1. Припустимо, що $L = L_\mu$. Для довільного $d = \begin{pmatrix} x_\gamma \\ p \end{pmatrix}$ з простору H_L покладемо

$$T_\mu d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} F(i\gamma + g)(s), & s \geq 0; \\ F(i\gamma - g)(-s), & s < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Зокрема, при $d_+ = \begin{pmatrix} x_p \\ ip \end{pmatrix}$ і $d_- = \begin{pmatrix} x_p \\ -ip \end{pmatrix}$ одержуємо

$$T_\mu d_+ = \begin{cases} i\sqrt{2}\, F(p)(s), & s \geq 0; \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

$$T_\mu d_- = \begin{cases} 0, & s \geq 0; \\ i\sqrt{2}\, F(p)(-s),, & s < 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\left\| T_\mu d_\pm \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}, N)} = 2\int_0^\infty \|(Fp)(s)\|^2_N \, ds = 2\|p\|^2 = \|d_\pm\|^2_{H_{L_\mu}}.$$

Звідси, беручи до уваги (14), дістаємо, що оператор T_μ є унітарним відображенням простору H_{L_μ} на простір $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, при якому підпростір D_+ (D_-) відображається на підпростір $L_2(\mathbb{R}_+, N)$ $(L_2(\mathbb{R}_-, N))$. На підставі твердження 1 та теореми 1 переконуємось, що $T_\mu D(Q_\mu) = W_2^1(\mathbb{R}, N)$ і

$$T_\mu Q_\mu d = -\frac{d}{ds}(T_\mu d)(s), \qquad d \in D(Q_\mu). \tag{17}$$

Оператор $-d/ds$, $D(-d/ds) = W_2^1(\mathbb{R}, N)$ є генератором унітарної в $L_2(\mathbb{R}, N)$ групи $\mathcal{Y}(t)$ зсувів на t вправо. Тому з рівності (17) випливає $T_\mu W_{L_\mu}(t) = \mathcal{Y}(t) T_\mu$. Отже, оператор T_μ задає трансляційне зображення для групи розв'язків $W_{L_\mu}(t)$.

Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що у випадку $L = L_M$ оператор

$$T_M \begin{pmatrix} x_\gamma \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} F(i\gamma + p)(s), & s \geq 0; \\ F(-i\gamma + p)(-s), & s < 0, \end{cases} \tag{18}$$

задає трансляційне зображення для групи розв'язків $W_{L_M}(t)$.

У випадку, коли L — довільний незбурений оператор, на підставі рівностей (11), (12) переконуємось, що оператор

$$T_L := T_{1\mu} \oplus T_{2M}, \tag{19}$$

де оператори $T_{1\mu}$ та T_{2M} задають трансляційне зображення для груп $W_{L_{1\mu}}(t)$ та $W_{L_{2M}}(t)$ відповідно (і визначаються формулами (16), (18)), задає трансляційне зображення для групи розв'язків $W_L(t)$.

3. ρ-Збурене абстрактне хвильове рівняння. ***3.1. Означення та допоміжні твердження.*** У гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ розглянемо півгрупу ізометричних операторів $F(t) = e^{iBt}$ з генератором iB. Покладемо $\mathfrak{H}_\rho = F(\rho)\mathfrak{H}$. Зрозуміло, що $\mathfrak{H}_{\rho_1} \supset \mathfrak{H}_{\rho_2}$ при $\rho_1 < \rho_2$. У просторі $\mathfrak{H}_\rho$ розглянемо простий максимальний симетричний оператор

$$B_\rho := B, \qquad D(B_\rho) = F(\rho) D(B). \tag{20}$$

Означення 1. *Нехай $\tilde{\mathfrak{H}}$ — підпростір простору $\mathfrak{H}$. Самоспряжений в $\tilde{\mathfrak{H}}$ оператор $\tilde{L}$ із скінченним дискретним спектром на від'ємній півосі будемо називати ρ-збуреним, якщо оператор $\tilde{L}$ має обернений* $(0 \notin \sigma_p(\tilde{L}))$ *і існує таке $\rho \geq 0$, що $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}_\rho$ і $\tilde{L} \supset B_\rho^2$.*

Означення 2. *Диференціально-операторне рівняння* (1) *з ρ-збуреним оператором $\tilde{L}$ у правій частині будемо називати ρ-збуреним абстрактним хвильовим рівнянням.*

Нехай оператор $\tilde{L}$ є ρ-збуреним. Тоді при всіх $f \in D(\tilde{L})$ і $u \in D(B_\rho^2)$ справджується рівність $\left(P_\rho L f, u\right) = \left(f, B_\rho^2 u\right) = \left(P_\rho f, B_\rho^2 u\right)$, де P_ρ — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_\rho$. Отже, $P_\rho D(\tilde{L}) \subset D(B_\rho^* B_\rho^*)$ і

$$P_\rho \tilde{L} f = (B_\rho^*)^2 P_\rho f \qquad \forall f \in D(\tilde{L}). \tag{21}$$

Наявність у оператора $\tilde{L}$ від'ємних власних значень не викликає принципових труднощів у подальшому викладі, але вимагає використання індефінітної метрики і призводить до різкого збільшення обсягу роботи. Тому, далі будемо вважати, що оператор $\tilde{L}$ є додатним, а в пп. 4.4 стисло обговоримо яких змін потребують наведені у цій роботі твердження для загального випадку.

Поповнення лінеалу $D(\tilde{L})$ за нормою $\|u\|_{\tilde{L}} := \sqrt{(\tilde{L}u, u)}$ позначимо через $\mathfrak{H}_{\tilde{L}}$. Оскільки оператор $\tilde{L}$ є ρ-збуреним, то при всіх $u \in D(B_\rho^2)$ справджується рівність $\|u\|_{\tilde{L}} = \|B_\rho u\|$. Поповнення лінеалу $D(B_\rho^2)$ за цією нормою позначимо через $\mathfrak{H}_0$. Повторюючи міркування пп. 2.1 (з заміною оператора B на B_ρ і простору $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_\rho$), приходимо до висновку, що підпростір $\mathfrak{H}_0$ гільбертового простору $\mathfrak{H}_{\tilde{L}}$ можна ототожнити з гільбертовим простором $\{ x_p \mid \forall p \in \mathfrak{H}_\rho \}$ із скалярним добутком (9). При цьому ототожненні лінеал $D(B_\rho^2)$ збігається з лінеалом $\{ x_{B_\rho u} \mid \forall u \in D(B_\rho^2) \}$.

Надалі, в залежності від конкретної ситуації, будемо *однаково вільно користуватись* як позначенням u, так і позначенням $x_{B_\rho u}$ для векторів з $D(B_\rho^2)$, не наголошуючи при цьому на їх тотожності.

На підставі (8) та (21) приходимо до висновку, що для довільних $f \in D(\tilde{L})$ та $x_p \in \mathfrak{H}_0$ справджується рівність

$$(f, x_p)_{\tilde{L}} = (B_\rho^* P_\rho f, p). \tag{22}$$

Аналогічно пп. 2.1 встановлюємо, що у просторі даних $H_{\tilde{L}} = \mathfrak{H}_{\tilde{L}} \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$ ρ-збурене хвильове рівняння визначає унітарну групу розв'язків задачі Коші $W_{\tilde{L}}(t) = e^{Q_{\tilde{L}} t}$. Генератор цієї групи — оператор $Q_{\tilde{L}}$ є замиканням у просторі $H_{\tilde{L}}$ оператора

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\tilde{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad D(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| \{u, v\} \subset D(\tilde{L}) \right\}. \tag{23}$$

Група $W_{\tilde{L}}(t)$ описує динаміку збуреної системи.

3.2. Вхідний та вихідний підпростори. Нехай L — довільний незбурений оператор у просторі $\mathfrak{H}$. Покладемо $D_\pm^\rho = W_L(\pm\rho) D_\pm$, де $W_L(t)$ — група розв'язків абстрактного хвильового рівняння, а підпростори $D_\pm$ визначаються рівностями (13). На підставі теореми 3 маємо

$$D_-^\rho = \left\{ \begin{pmatrix} x_p \\ -ip \end{pmatrix} \middle| p \in \mathfrak{H}_\rho \right\}, \qquad D_+^\rho = \left\{ \begin{pmatrix} x_p \\ ip \end{pmatrix} \middle| p \in \mathfrak{H}_\rho \right\}. \tag{24}$$

З означень ρ-збуреного оператора $\tilde{L}$ та простору $H_{\tilde{L}}$ випливає, що підпростори $D_\pm^\rho$ лежать в $H_{\tilde{L}}$ і є взаємно ортогональними. Але на відміну від випадку абстрактного хвильового рівняння (пп. 2.2) їх сума $D_-^\rho \oplus D_+^\rho = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_\rho$ вже, взагалі кажучи, не збігається з простором $H_{\tilde{L}}$.

Теорема 4. *Підпростори D_-^ρ та D_+^ρ є відповідно вхідним та вихідним підпросторами для групи розв'язків $W_{\tilde{L}}(t)$ ρ-збуреного хвильового рівняння.*

При цьому при всіх $t \geq 0$ справджуються рівності

$$W_L^*(t)\begin{pmatrix} x_p \\ -ip \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{F(t)p} \\ -iF(t)p \end{pmatrix}, \qquad W_{\tilde{L}}(t)\begin{pmatrix} x_p \\ ip \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{F(t)p} \\ iF(t)p \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Доведення. Нехай L_ρ — незбурений оператор ($L_\rho \in \mathfrak{M}_{B_\rho}$) у просторі $\mathfrak{H}_\rho$. З результатів п. 2 випливає, що підпростори D_-^ρ та D_+^ρ є вхідним та вихідним підпросторами для групи розв'язків $W_{L_\rho}(t)$ абстрактного хвильового рівняння (1) з оператором L_ρ у правій частині. Нехай $d_+ = \begin{pmatrix} x_{B_\rho u} \\ iB_\rho u \end{pmatrix}$, де $u \in (B_\rho^3)$. На підставі теореми 3

$$W_{L_\rho}(s)d_+ = \begin{pmatrix} x_{B_\rho F(s)u} \\ iB_\rho F(s)u \end{pmatrix}, \qquad s > 0,$$

де елемент $x_{B_\rho F(s)u} = F(s)u \in D(B_\rho^3)$. З означення ρ-збуреного оператора $\tilde{L}$ та рівностей (10), (23) випливає $W_{L_\rho}(s)d_+ \in D(Q_{\tilde{L}}) \cap D(Q_{L_\rho})$ і $(Q_{L_\rho} - Q_{\tilde{L}})W_{L_\rho}(s)d_+ = 0$. Отже,

$$\left(W_{\tilde{L}}(-t)W_{L_\rho}(t) - I\right)d_+ = \int_0^t \left(W_{\tilde{L}}(-s)W_{L_\rho}(s)d_+\right)' ds =$$

$$= \int_0^\infty W_{\tilde{L}}(-s)(Q_{L_\rho} - Q_{\tilde{L}})W_{L_\rho}(s)d_+ ds = 0.$$

Таким чином,

$$W_{\tilde{L}}(t)d_+ = W_{L_\rho}(t)d_+, \qquad t \geq 0. \tag{26}$$

З урахуванням рівностей (2), (3) і (9) неважко бачити, що множина елементів d_+ розглянутого типу є щільною в D_+^ρ. Тому з рівності (26) та теореми 3 випливає, що друга рівність в (25) є вірною. З цього, враховуючи те, що півгрупа $F(t)$ є цілком неунітарною, випливає, що підпростір D_+^ρ є вихідним. У випадку $d_- = \begin{pmatrix} x_{B_\rho u} \\ -iB_\rho u \end{pmatrix}$, міркуючи аналогічно, дістаємо, що перша рівність в (25) є вірною і підпростір D_-^ρ є вхідним для $W_{\tilde{L}}(t)$. Теорему доведено.

З означення підпросторів $D_\pm^\rho$ та теорем 3, 4 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *На підпросторах $D_\pm^\rho$ дія півгруп $W_L(\pm t)$ та $W_{\tilde{L}}(\pm t)$ є однаковою.*

3.3. Трансляційне зображення. **Твердження 2.** *Нехай $L \in \mathfrak{M}_B$, а оператор $\tilde{L}$ є ρ-збуреним. Тоді існують хвильові оператори $\Omega_\pm(\tilde{L}, L) = s - \lim_{t \to \pm\infty} W_{\tilde{L}}(-t)W_L(t)$ і*

$$\Omega_\pm(\tilde{L}, L)H_L = M_\pm, \qquad M_\pm = \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_{\tilde{L}}(t)D_\pm^\rho}. \tag{27}$$

Доведення. З доведення теореми 4 випливає, що $\Omega_\pm(\tilde{L}, L)d_+ = d_+$ при всіх $d_+ = D_+^\rho$. Тому для довільного $s \in \mathbb{R}$ справджується рівність $\Omega_+(\tilde{L}, L)W_L(s)d_+ = W_{\tilde{L}}(s)\Omega_+(\tilde{L}, L)d_+ = W_{\tilde{L}}(s)d_+$. З урахуванням (15) це означає, що хвильовий оператор $\Omega_+(\tilde{L}, L)$ існує і друга рівність в (27) є вірною. Розглядаючи аналогічно випадок оператора $\Omega_-(\tilde{L}, L)$, завершуємо доведення.

Розглянемо оператор T_L, що визначається рівністю (19). Як показано у пп. 2.3, цей оператор задає трансляційне зображення для групи $W_L(t)$ розв'язків абстрактного хвильового рівняння.

Покладемо

$$\tilde{T}_\pm = \mathcal{Y}(\mp\rho) T_L \Omega_\pm^{-1}(\tilde{L}, L), \tag{28}$$

де $\mathcal{Y}(t)$ — група зсувів на t вправо у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$. З урахуванням твердження 2 та властивостей оператора T_L (пп. 2.3) безпосередньо перевіряється, що оператор $\tilde{T}_-$ ($\tilde{T}_+$) визначає вхідне (вихідне) трансляційне зображення для звуження групи $W_{\tilde{L}}(t)$ на підпростір M_- (M_+). При цьому $\tilde{T}_- D_-^\rho = L_2(\mathbb{R}_-, N)$, $\tilde{T}_+ D_+^\rho = L_2(\mathbb{R}_+, N)$.

4. Матриця розсіяння для ρ-збуреного абстрактного хвильового рівняння. ***4.1. Означення оператора розсіяння та матриці розсіяння.*** Нехай додатний оператор $\tilde{L}$ є ρ-збуреним. Для довільного $f \in M_-$ покладемо $g = P_{M_+} f_-$, де P_{M_+} — ортопроектор в $H_{\tilde{L}}$ на підпростір M_+. Згідно з пп. 3.3 елементи f і g мають зображення $(\tilde{T}_- f)(s)$ та $(\tilde{T}_+ g)(s)$ відповідно у вхідному та вихідному трансляційних зображеннях.

Відображення

$$S: \ (\tilde{T}_- f)(s) = (\tilde{T}_+ g)(s) \tag{29}$$

будемо називати *оператором розсіяння*. Визначений таким чином оператор S є стискуючим оператором у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$. Цей оператор комутує з оператором зсуву і відображає $L_2(\mathbb{R}_-, N)$ в себе [10].

Означення оператора розсіяння у формі (29) не потребує явних посилань на вільну динаміку (її роль відіграють підпростори $D_\pm^\rho$) і є типовим для формалізму Лакса – Філліпса. В багатьох фізичних задачах оператор розсіяння визначається через безпосереднє порівняння „вільної" $W_L(t)$ та „збуреної" $W_{\tilde{L}}(t)$ груп в термінах хвильових операторів

$$\hat{S} = \Omega_+^*(\tilde{L}, L)\Omega_-(\tilde{L}, L).$$

Знайдемо зв'язок між операторами S та $\hat{S}$. З властивості оператора S комутувати зі зсувом та рівностей (28) випливає

$$S T_L \Omega_-^{-1}(\tilde{L}, L) f = \mathcal{Y}(-2\rho) T_L \Omega_\pm^{-1}(\tilde{L}, L) g.$$

Отже, $S = \mathcal{Y}(-2\rho) T_L \Omega_\pm^{-1}(\tilde{L}, L)\, P_{M_+} \Omega_-(\tilde{L}, L) T_L^{-1}$. Оператор $\Omega_+(\tilde{L}, L)$ є ізометричним. Тому, беручи до уваги твердження 2, одержуємо $\Omega_+^*(\tilde{L}, L) = \Omega_+^{-1}(\tilde{L}, L) P_{M_+}$. Таким чином,

$$S = \mathcal{Y}(-2\rho) T_L \Omega_+^*(\tilde{L}, L)\Omega_-(\tilde{L}, L) T_L^{-1} = \mathcal{Y}(-2\rho) T_L \hat{S} T_L^{-1}.$$

Нехай $\mathcal{F}$ — перетворення Фур'є у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$. Розглянемо оператор $\mathfrak{S} = \mathcal{F} S \mathcal{F}^{-1}$. З властивостей оператора розсіяння (детальніше див. [11]) випливає, що у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$ оператор $\mathfrak{S}$ може бути зображений у вигляді оператора множення на функцію $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, значеннями якої є стискуючі оператори у просторі N.

Операторнозначна функція $\mathfrak{S}(\delta)$ називається *матрицею розсіяння*. Вона є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині, стискуючої операторнозначної функції $\mathfrak{S}(z)$, яка називається *матрицею розсіяння Гейзенберга* [1].

4.2. Сингулярності матриці розсіяння. Матриця розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$ відповідає динаміці збуреної системи, що визначається ρ-збуреним хвильовим рівнянням і описується групою розв'язків $W_{\tilde{L}}(t)$. Тому деякі її властивості повинні характеризувати природу збурення.

Означення 3. *Будемо говорити, що матриця розсіяння має сингулярність в:*

a) точці z *нижньої півплощини, якщо в цій точці операторнозначна функція* $\mathfrak{S}(z)$ *не є аналітичною та неперервно оберненою у просторі* N;

b) точці δ *дійсної осі, якщо в цій точці функція* $\mathfrak{S}(\delta)$ *не є аналітичною та унітарною.*

(Матриця розсіяння аналітична в точці δ, якщо в її околі функція $\mathfrak{S}(z)$ може бути аналітично продовжена через дійсну вісь.)

Розглянемо випадок, коли $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$, а оператор $\tilde{L}$ є незбуреним $(\in \mathfrak{M}_B)$. Згідно з означенням 1 цей оператор є 0-збуреним. Тому оператор

$$\tilde{T}_- = T_L\Omega_-^{-1}(\tilde{L}, L) \qquad (\tilde{T}_+ = T_L\Omega_+^{-1}(\tilde{L}, L))$$

задає вхідне (вихідне) трансляційне зображення для групи $W_{\tilde{L}}(t)$ у просторі даних $H_{\tilde{L}}$. При цьому, згідно з наслідком 2, є вірною рівність $\Omega_{\pm}(\tilde{L}, L)d_{\pm} = d_{\pm}$ $(d_{\pm} \in D_{\pm})$ і, отже,

$$\tilde{T}_- d_- = T_L d_-, \qquad \tilde{T}_+ d_+ = T_L d_+. \tag{30}$$

У пп. 2.3 було показано, що трансляційне зображення для групи $W_{\tilde{L}}(t)$ задає також оператор $T_{\tilde{L}}$, що визначається рівністю (19). Знайдемо зв'язок між операторами $T_{\tilde{L}}$ та $\tilde{T}_{\pm}$.

Безпосередньо з рівностей (16), (18), (19) випливає, що при всіх $d_- \in D_-$ та $d_+ \in D_+$ справджуються рівності

$$(T_{\tilde{L}}\, d_-)(s) = J_{\tilde{L}}(T_{L_\mu} d_-)(s), \qquad (T_{\tilde{L}}\, d_+)(s) = (T_{L_\mu} d_+)(s), \tag{31}$$

де оператор $J_{\tilde{L}}$ є унітарним та самоспряженим у просторі N. Цей оператор визначається рівностями $J_{\tilde{L}}\big|_{N_1} = I$, $J_{\tilde{L}}\big|_{N_2} = -I$, де N_i — взаємно ортогональні підпростори простору N такі, що $F\mathfrak{H}_i = L_2(\mathbb{R}_+, N_i)$, а $\mathfrak{H}_i$ — підпростори простору $\mathfrak{H}$ з розкладу (5) теореми 2 для випадку незбуреного оператора $\tilde{L}$. З рівностей (31) та їх аналога для випадку оператора L випливає

$$(T_L d_-)(s) = E_-(T_{\tilde{L}} d_-)(s), \qquad (T_L d_+)(s) = (T_{\tilde{L}} d_+)(s), \tag{32}$$

де $E_- = J_L J_{\tilde{L}}$ — унітарний у просторі N оператор. З рівностей (30) – (32) випливає $\tilde{T}_- W_{\tilde{L}}(t) d_- = \mathcal{Y}(t) T_L d_- = E_- T_{\tilde{L}} W_{\tilde{L}}(t) d_-$, $t \in \mathbb{R}$, і аналогічно $\tilde{T}_+ W_{\tilde{L}}(t) d_+ = T_{\tilde{L}} W_{\tilde{L}}(t) d_+$. Звідси з урахуванням (15) маємо $\tilde{T}_- = E_- T_{\tilde{L}}$, $\tilde{T}_+ = T_{\tilde{L}}$. З останніх двох рівностей випливає, що у випадку, коли оператор L є незбуреним, відповідний оператор розсіяння S є оператором множення у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$ на унітарний в N оператор $E = E_-^{-1}$. Тому матриця розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$ може бути аналітично продовжена на всю комплексну площину $\mathbb{C}$ так, що $\mathfrak{S}(z) = E$ при всіх $z \in \mathbb{C}$. Таким чином, матриця розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$ не має жодної сингулярності, що природно для функції, яка характеризує збурення одної вільної динаміки $\left(W_{\tilde{L}}(t)\right)$ по відношенню до іншої $(W_L(t))$.

Нехай $\tilde{L}$ — довільний ρ-збурений оператор. Розглянемо підпростори D_-^{ρ} і D_+^{ρ}, що визначаються рівностями (24) і є відповідно вхідним та вихідним підпростором для групи розв'язків $W_{\tilde{L}}(t)$. Покладемо $K_\rho = H_{\tilde{L}} \ominus \left(D_-^{\rho} \oplus D_+^{\rho}\right)$, $Z(t) = P_{K_\rho} W_{\tilde{L}}(t)\Big|_{K_\rho}$, де P_{K_ρ} — ортопроектор у просторі даних $H_{\tilde{L}}$ на підпростір K_ρ. Неважко встановити [1], що множина операторів $Z(t)$ в K_ρ є півгрупою стискуючих операторів. Генератор цієї півгрупи є максимальним дисипативним оператором в K_ρ. Позначимо його через Y.

Один з глибоких результатів схеми Лакса – Філліпса полягає в тому, що спектр оператора Y однозначно визначає множину сингулярностей матриці розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$. В найбільш повному обсязі цей зв'язок зручно досліджувати, використовуючи відомий результат В. Адамяна та Д. Арова [12] про подібність матриці розсіяння деякій характеристичній функції. Це дозволяє застосовувати до аналізу матриці розсіяння добре розвинутий апарат теорії характеристичних функцій [13]. Зокрема, з результатів [6] випливає така теорема.

Теорема 5. *Нехай додатний оператор* $\tilde{L}$ *є* ρ*-збуреним, а* $\mathfrak{S}(\delta)$ *— матриця розсіяння для групи розв'язків* $W_{\tilde{L}}(t)$. *Тоді*:

a) $0 \in \sigma_\alpha(\mathfrak{S}(z))$ *тоді і тільки тоді, коли* $-iz \in \sigma_\alpha(Y^*)$, $(\alpha \in \{p, r, c\}$, $\operatorname{Im} z < 0)$;

b) матриця розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$ *аналітична та унітарна на множині* $\mathbb{R} \setminus \left\{i\sigma(Y_s^*)\right\}$, *де* Y_s^* *— цілком несамоспряжена компонента*[1] *оператора* Y^*.

Наслідок 3. *Множина точок сингулярності матриці розсіяння* $\mathfrak{S}(\delta)$ *збігається з множиною* $i\sigma(Y_s^*)$.

***Зауваження.* 1.** За побудовою, оператор Y не залежить від вибору незбуреного розширення L. Тому спектр оператора Y^*, а отже, і множина точок сингулярності матриці розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$ *не залежать* від вибору вільної динаміки $W_L(t)$.

2. Згідно з означенням 1 ρ-збурений оператор $\tilde{L}$ є також $(\rho + \alpha)$-збуреним при всіх $\alpha \geq 0$. Розглядаючи цей оператор як $(\rho + \alpha)$-збурений і повторюючи міркування пп. 3.4, дістаємо, що у цьому випадку матриця розсіяння $\mathfrak{S}_\alpha(\delta)$ визначається через трансляційні зображення, що побудовані за підпросторами $D_\pm^{\rho+\alpha} = W_{\tilde{L}}(\pm\alpha) D_\pm^{\rho}$. Неважко перевірити [1], що $\mathfrak{S}_\alpha(z) = e^{-2i\alpha\delta}\mathfrak{S}(z)$. Отже, множина точок сингулярності матриці розсіяння для групи $W_{\tilde{L}}(t)$ *не залежить* від вибору параметра $\alpha \geq 0$.

4.3. Випадок ρ***-збуреного оператора з скінченним дискретним спектром на від'ємній півосі.*** Припустимо, що спектр ρ-збуреного оператора $\tilde{L}$ на від'ємній півосі складається з скінченної кількості нормальних власних значень $-\eta_1^2, \ldots, -\eta_m^2$, $\eta_j > 0$, і стисло обговоримо, які зміни в цьому випадку необхідно внести в наведені вище твердження. Надалі, без особливих роз'яснень, будемо вільно використовувати стандартну „індефінітну" термінологію [14].

Поповнення лінеалу $D(\tilde{L})$ за нормою $\|u\|_{\tilde{L}} = \sqrt{\left(|\tilde{L}|u, u\right)}$, де $|\tilde{L}|$ — модуль

[1] Подібно до канонічного розкладу стискуючого оператора на унітарну та цілком неунітарну компоненти максимальний дисипативний оператор єдиним чином розкладається на кососамоспряжену та цілком несамоспряжену компоненти.

оператора $\tilde{L}$, позначимо через $\mathfrak{H}_{\tilde{L}}$. У цьому гільбертовому просторі розглянемо індефінітну метрику $[\cdot,\cdot]$, яка на $D(\tilde{L})$ визначається так:

$$[u,u]_{\tilde{L}} := \left(\tilde{L}u,u\right). \tag{33}$$

Простір $\mathfrak{H}_{\tilde{L}}$ з індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]$ є простором Понтрягіна з рангом індефінітності κ, що дорівнює кратності від'ємного спектра оператора $\tilde{L}$.

Лема 2. *На лінеалі* $D(B_\rho^2)$ *індефінітна метрика* (33) *є нормою, що еквівалентна нормі* $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$.

Доведення. З рівності (33) та означення 1 випливає $[u,u]_{\tilde{L}} = \left\|B_\rho u\right\|^2$ $(\forall\, u\in D(B_\rho^2))$. Отже, індефінітна метрика $[\cdot,\cdot]$ є нормою на $D(B_\rho^2)$. При цьому $[u,u]_{\tilde{L}} = \left(\tilde{L}u,u\right) \le \left(\left|\tilde{L}\right|u,u\right) = \|u\|_{\tilde{L}}^2$. Таким чином, для завершення доведення достатньо показати, що при всіх $u\in D(B_\rho^2)$ справджується рівність $\|u\|_{\tilde{L}}^2 \le \mathrm{const}\,[u,u]_{\tilde{L}}$.

Нехай $E(\lambda)$ — спектральна функція оператора $\tilde{L}$. Покладемо $u_- = E(0)u$. Враховуючи (33), одержуємо

$$\|u\|_{\tilde{L}}^2 = [u,u]_{\tilde{L}} - 2\left(\tilde{L}u_-,u_-\right). \tag{34}$$

Нехай $\left\{f_{jk}\right\}_{k=1}^{r_j}$, $j = 1,\ldots,m$, — ортонормований базис простору $\ker\left(\tilde{L}+\eta_j^2 I\right)$. Тоді

$$-\left(\tilde{L}u_-,u_-\right) = \sum_{j=1}^{m}\eta_j^2\sum_{k=1}^{r_j}\left|(u,f_{jk})\right|^2. \tag{35}$$

Згідно з рівністю (21) елемент $P_\rho f_{jk}$ належить простору $\ker\left(B_\rho^* B_\rho^* + \eta_j^2 I\right)$, що з урахуванням леми 1 дає $P_\rho f_{jk}\in \ker\left(B_\rho^* + i\eta_j I\right)$. Тому

$$\eta_j^2\left|(u,f_{jk})\right|^2 = \left|(u,i\eta_j P_\rho f_{jk})\right|^2 = \left|(B_\rho u,f_{jk})\right|^2 \le \left\|B_\rho u\right\|^2.$$

Використовуючи цю оцінку в рівності (35), маємо $-\left(\tilde{L}u_-,u_-\right)\le\kappa\left\|B_\rho u\right\|^2$. На підставі цієї нерівності та рівності (34) приходимо до висновку $\|u\|_{\tilde{L}}^2 \le$ $\le (1+2\kappa)[u,u]_{\tilde{L}}$, $u\in D(B_\rho^2)$, що і завершує доведення.

З леми 2 випливає, що залишається вірним дане в пп. 3.1 зображення елементів простору $\mathfrak{H}_0$ — поповнення лінеалу $D(B_\rho^2)$ за нормою (33).

Простір даних $H_{\tilde{L}} = \mathfrak{H}_{\tilde{L}} \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$ з індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]_{H_{\tilde{L}}} = [\cdot,\cdot]_{\tilde{L}} \oplus$ $\oplus\,(\cdot,\cdot)$ є простором Понтрягіна. В цьому просторі ρ-збурене хвильове рівняння визначає π-унітарну групу $W_{\tilde{L}}(t)$ розв'язків задачі Коші. Повторюючи доведення теореми 4, дістаємо, що для цієї групи підпростори D_-^ρ і D_+^ρ, що визначені рівностями (24), є відповідно вхідним та вихідним. Ці підпростори є додатними в просторі Понтрягіна $H_{\tilde{L}}$. Але побудувати за ними, аналогічно пп. 3.3, трансляційні зображення для групи $W_{\tilde{L}}(t)$ в загальному випадку неможливо, оскільки на підпросторах $M_\pm$ індефінітна метрика не обов'язково визначає скалярний добуток. Це означає, що означення оператора розсіяння, дане у пп. 4.1, не придатне для випадку індефінітної метрики. Існує стандартна процедура [9], яка дозволяє усунути ці труднощі. Вона полягає в тому, що замість підпросторів $D_{\pm}^{\rho}$ розглядаються підпростори $\tilde{D}_{\pm}^{\rho} = (I - P_{\sigma})D_{\pm}^{\rho}$, де P_{σ} — проектор Рісса на частину спектра генератора $Q_{\tilde{L}}$ групи $W_{\tilde{L}}(t)$, що не лежить на уявній осі. За цими підпросторами будується трансляційне зображення для групи $W_{\tilde{L}}(t)$ і подібно пп. 4.1 визначається оператор розсіяння і матриця розсіяння. Враховуючи це і спираючись на результати роботи [15], можна довести таку теорему.

Теорема 6. *Нехай* ρ*-збурений оператор* $\tilde{L}$ *має скінченний дискретний спектр на від'ємній півосі. Тоді матриця розсіяння* $\mathfrak{S}(\delta)$ *для групи* $W_{\tilde{L}}(t)$ *є граничним значенням мероморфної в нижній півплощині функції* $\mathfrak{S}(z)$, *всі полюси якої є першого порядку і знаходяться на уявній осі в точках* $z_j = -i\eta_j$, $j = 1, \dots, m$, *таких, що* $P_{\rho}\ker(\tilde{L} + \eta_j^2 I) \neq \{0\}$. *Для решти точок* z *з нижньої півплощини залишається вірним твердження а) теореми* 5.

4.4. Приклади. **А.** У просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}_+)$ розглянемо простий максимальний симетричний оператор $B = id/ds$, $D(B) = \overset{0}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Безпосередньою перевіркою рівності (4) встановлюємо, що в цьому випадку клас $\mathfrak{M}_B$ незбурених операторів складається лише з розширень Фрідріхса L_{μ} та Крейна L_M

$$L_{\mu}(L_M) = -\frac{d^2}{ds^2},$$

$$D(L_{\mu})(D(L_M)) = \left\{u(s) \in W_2^2(\mathbb{R}_+) \middle| u(0) = 0 \ \left(\frac{d}{ds}u(0) = 0\right)\right\}.$$

Рівняння (1) з оператором L_{μ} (або L_M) у правій частині визначає незбурену еволюцію системи і є класичним рівнянням коливання струни на півосі $\partial_t^2 u(s,t) = \partial_s^2 u(s,t)$ при умові, коли її кінець або закріплений $(u(0,t) = 0)$, або не існує початкової швидкості $(\partial_s u(0,t) = 0)$.

Згідно з означенням 1 самоспряжений оператор

$$L_{\theta} = -\frac{d^2}{ds^2}, \quad D(L_{\theta}) = \left\{u(s) \in W_2^2(\mathbb{R}_+) \middle| \partial_s u(0) + \theta u(0) = 0\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

є 0-збуреним. Підставляючи цей оператор в праву частину рівняння (1), одержуємо, що динаміка коливання струни на півосі $\mathbb{R}_+$ є 0-збуреною, якщо її кінець закріплений пружно $\partial_s u(0,t) + \theta u(0,t) = 0$.

З вигляду оператора B зрозуміло, що у просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$ півгрупа $F(t) = e^{iBt}$ є півгрупою операторів зсуву на t вправо

$$F(t)u(s) = \begin{cases} u(s-t), & s \geq t; \\ 0, & 0 \leq s < t. \end{cases}$$

Враховуючи це, одержуємо, що самоспряжений у просторі $\tilde{\mathfrak{H}} \subseteq L_2(\mathbb{R}_+)$ оператор $\tilde{L}$ (з скінченним дискретним спектром на від'ємній півосі і такий, що $0 \notin \sigma_p(\tilde{L})$) є ρ-збуреним, якщо $D(\tilde{L}) \supset \overset{0}{W}{}_2^2(\rho, +\infty)$ і $\tilde{L}\big|_{\overset{0}{W}{}_2^2(\rho,+\infty)} = -\frac{d^2}{ds^2}$. З цього, зокрема, випливає, що рівняння вигляду

$$\partial_s^2 u(s,t) = \partial_s^2 u(s,t) + g(s)u(s,t), \quad \partial_s u(0,t) + \theta u(0,t) = 0,$$

де $g(s) \geq 0$ і $\operatorname{supp} g(s) \subset (0, \rho)$ є ρ-збуреним.

B. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$. Розглянемо перетворення Радона R, яке на функціях $u(x)$ з $S(\mathbb{R}^3)$ визначається так:

$$(Ru)(s, w) = \tilde{u}(s, w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x \cdot w = s} u(x) ds_x,$$

де $s \in \mathbb{R}$, w — одиничний вектор в $\mathbb{R}^3$, ds_x — евклідова міра гіперплощини $x \cdot w = s$.

Функцію $\tilde{u}(s, w)$ зручно розглядати як функцію від s із значеннями у допоміжному просторі $N = L_2(S^2)$, де S^2 — одинична сфера в $\mathbb{R}^3$. Використовуючи властивості перетворення Радона, неважко показати [5], що замикання оператора Γ, який на функціях $u(x)$ з $S(\mathbb{R}^3)$ визначається формулою

$$(\Gamma u)(s, w) = (\partial_s Ru)(s, w), \qquad s \geq 0,$$

ізометрично відображає простір $L_2(\mathbb{R}^3)$ на простір $L_2(\mathbb{R}_+, N)$. Звідси випливає, що оператор

$$B = i\Gamma^{-1} \frac{d}{ds} \Gamma, \qquad D(B) = \Gamma^{-1} \overset{0}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+, N) \tag{36}$$

є простим максимальним симетричним оператором у просторі $L_2(\mathbb{R}^3)$. В [5] показано, що при такому виборі оператора B оператор $L = -\Delta$, $D(L) = W_2^2(\mathbb{R}^3)$ є незбуреним у просторі $L_2(\mathbb{R}^3)$. Отже, вільне хвильове рівняння в $\mathbb{R}^3$ визначає незбурену динаміку.

Нехай $\left\{Y_m^l(w)\right\}_{m=0}^{\infty}$, $l = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, —ортонормований базис з сферичних гармонік у просторі $L_2(S^2)$. Використовуючи зв'язок між перетвореннями Фур'є та Радона [16, 17], можна показати, що самоспряжений оператор $\tilde{L}$ із скінченним дискретним спектром на від'ємній півосі є 0-збуреним, якщо

$$\tilde{L} \supset -\Delta|_{\mathcal{D}}, \qquad \mathcal{D} = \left\{ u(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, u(0) = 0, \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|^{\alpha_m}} Y_m\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0 \right\},$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_m = 2$ при непарних і $\alpha_m = 3$ при парних m (в останньому випадку інтеграл розуміється у сенсі головного значення).

З рівності (36) зрозуміло, що $F(t) = \Gamma^{-1} \mathcal{F}_+(t) \Gamma$, де $\mathcal{F}_+(t)$ — півгрупа зсувів на t вправо у просторі $L_2(\mathbb{R}_+, N)$. Порівняно з випадком **A** півгрупа $F(t)$ має більш складну структуру. Використовуючи аналог теореми Пелі – Вінера для перетворення Радона [16], можна показати, що справедлива така теорема.

Теорема 7. *Підпростір $\mathfrak{H}_\rho$ простору $L_2(\mathbb{R}^3)$ складають ті і тільки ті функції $u(x)$, які дорівнюють нулю при $|x| < \rho$ і для всіх сферичних гармонік $Y_m(w)$ порядку $m \geq 1$ задовольняють рівності*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|^{\beta_k}} Y_m\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0,$$

де $\beta_k \in \left\{2k\right\}_{k=1}^{[(m+1)/2]}$ при непарних та $\beta_k \in \left\{2k+1\right\}_{k=1}^{[(m+1)/2]}$ при парних m.

З теореми 7, зокрема, випливає, що хвильове рівняння, збурення якого зосереджене в шарі радіуса ρ, є ρ-збуреним.

1. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т.3. – 324 с.
3. *Кужіль С. О.* Про схему розсіяння Лакса – Філліпса для одного класу диференціально-операторних рівнянь // Допов. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 22 – 24.
4. *Кужель С. А.* Схема рассеяния для одного класса уравнений второго порядка // Функцион. анализ и его прил. – 1996. – **30**, № 1. – С. 22 – 26.
5. *Кужіль С. О.* Про абстрактну схему розсіяння Лакса – Філліпса для диференціально-операторних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 452 – 463.
6. *Kuzhel S. A.* Abstract wave equation; definition and properties of solutions – Kiev, 1996. – 45 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukr. Inst. Math.; 96.14).
7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
8. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431 – 495.
9. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния для автоморфных функций. – М.: Мир, 1979. – 324 с.
10. *Кужель А. В., Третьяков В. Д.* Об одном обобщении схемы Лакса – Филлипса в теории рассеяния // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 19 – 21.
11. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. АН МССР. – 1966. – **1**, № 2. – С. 3 – 64.
12. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функциях сжатий // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 1. – С. 9 – 12.
13. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
14. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 351 с.
15. *Кужель С. А.* Абстрактная схема рассеяния Лакса – Филлипса в пространствах Понтрягина. – Киев, 1994. – 39 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 32.94).
16. *Helgason S.* The Random transform. – Boston; Basel: Birkhauser, 1980. – 192 p.
17. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 328 с.

Одержано 03.01.97