УДК 517. 518.476

О. И. Кузнецова (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ И НЕРАВЕНСТВА ТИПА СИДОНА

We consider different variants of the strong summation over polyhedrons of the N-dimensional Fourier series and related estimates for integral norms of linear means of the Dirichlet kernels (the Sidon type inequalities).

Розглянуто різні варіанти сильного підсумовування по поліедрах N-вимірних рядів Фур'є та пов'язані з ними оцінки інтегральних норм лінійних середніх ядер Діріхле (нерівності типу Сідона).

Пусть функция $f \in L(T^N)$, $\|f\|_L = \int\limits_{T^N} |f(u)|\,du < \infty$, $T^N = [-\pi, \pi)^N$. Определим ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k \in Z^N} \hat{f}(k)\, e^{ikx}, \qquad kx = k_1 x_1 + \ldots + k_N x_N, \tag{1}$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{T^N} f(u)\, e^{-iku}\, du,$$

Z^N — целочисленная решетка в R^N. В отличие от одномерного, в кратном случае нет канонического способа задания частичной суммы ряда (1). Пусть V — замкнутая ограниченная область в R^N, содержащая начало координат O внутри себя. Полагаем для $n > 0$

$$S_{nV} f(x) = \sum_{k \in nV \cap Z^N} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

($nV = \{x \in R^N\colon\ x/n \in V\}$ — гомотет V). Сумму ряда (1) естественно определить как предел, если он существует, при $n \to \infty$ частичных сумм $S_{nV} f$:

$$S_{nV} f = (2\pi)^{-N} f * D_{nV}$$

— свертка функции f и ядра Дирихле

$$D_{nV}(x) = \sum_{k \in nV \cap Z^N} e^{ikx}.$$

соответствующего множеству V.

В дальнейшем V — замкнутый ограниченный полиэдр в R^N, звездный относительно O, $O \in \operatorname{int} V$, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через O; W — множество полиэдров с указанными свойствами. Достаточные условия регулярности линейных методов суммирования в $C(T^N)$ по полиэдрам множества W изучены в [1], причем показано, что все условия в определении W являются необходимыми.

W_b — подмножество W, определенное следующим образом. Набор действительных чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ „плохо" приближаем (рациональными числами), если неравенство

$$\|\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_N k_N\| < a^{-N-1}, \quad a = \max_{1 \le i \le N} |k_i|, \tag{2}$$

имеет не более конечного числа решений в целых числах $k = (k_1, \ldots, k_N)$ ($\|x\|$ — расстояние от x до ближайшего целого).

Полиэдр V принадлежит множеству W_b, если коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей $\sum \alpha_i x_i - 1 = 0$, его определяющих, образуют наборы „плохо" приближаемых чисел. Заметим, что множество наборов α, для которых неравенство (2) имеет бесконечно много решений в целых числах, есть множество нулевой меры Лебега в R^N [2, с. 36], т. е. почти все наборы α „плохо" приближаемы.

W_a — подмножество W_b полиэдров, для которых α — наборы алгебраических чисел.

Справедливы следующие теоремы о сильном суммировании ряда (1).

Теорема 1. *Пусть полиэдр $V \in W_b$. Для любых $f \in C(T^N)$, $p \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$*

$$(n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \left| S_{lV} f(0) \right|^p \le c^p p^{Np} \|f\|_\infty^p, \tag{3}$$

где постоянная $c = c(N, V) > 0$.

Пусть Q — множество функций φ, определенных на полуоси $[0, \infty)$, неубывающих и непрерывных в нуле, причем $\varphi(0) = 0$. Для $V \in W_b$ и $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$h_n(f, \varphi, V, x) = (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \varphi\left(\left| f(x) - S_{lV} f(x) \right| \right).$$

Теорема 2. *Пусть полиэдр $V \in W_b$.*

I. *Если $\varphi \in Q$ такова, что*

$$\varlimsup_{u \to \infty} \varphi(u) u^{-1/N} < \infty,$$

то для любой $f \in C(T^N)$ равномерно по x справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} h_n(f, \exp(\varphi) - 1, V, x) = 0.$$

II. *Если же*

$$\varlimsup_{u \to \infty} \varphi(u) u^{-1/N} = \infty,$$

то существует функция $F \in C(T^N)$, для которой

$$\varlimsup_{n \to \infty} h_n(f, \exp(\varphi) - 1, V, 0) = \infty.$$

Теорема 3. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $1 \le p < \infty$, $\{\nu_j\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того чтобы для любой $f \in C(T^N)$*

$$(n+1)^{-1} \sum_{j=0}^{n} \left| S_{\nu_j V} f(0) \right|^p \le c \|f\|_\infty^p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

необходимо, а если $\{\nu_j\}$ — выпуклая последовательность $\{\nu_{j+1} - \nu_j \uparrow\}$, то и достаточно, чтобы

$$\log \nu_j \le c_1 j^{\min\left(\frac{1}{2N}, \frac{1}{pN}\right)}. \tag{5}$$

Для $V \in W_a$ теоремы 1 – 3 доказаны в [3, 4] (см. там же историю вопроса и подробную библиографию). Как показано в этих работах, утверждение II теоремы 2, а также необходимость условия (5) в теореме 3 имеют место для любого полиэдра V, $0 \in \operatorname{int} V$, и следуют из оценки нормы оператора взятия частичной суммы в $C(T^N)$ [5]

$$\sup_{|f| \le 1} \left\| S_{nV} f \right\|_\infty = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} \left| D_{nV}(x) \right| dx \asymp \log^N n, \tag{6}$$

причем $\{\nu_j\}$ — не обязательно выпуклая последовательность. Доказательство достаточности теорем 1 – 3 аналогично случаю $V \in W_a$, поскольку полиэдры из W_b (как и полиэдры из W_a) имеют следующее свойство.

Лемма 1. *Для любого полиэдра $V \in W_b$ существует постоянная $d = d(V) > 0$ такая, что множества $(n + dn^{-N-1})V \setminus nV$, $n \in \mathbb{N}$, не содержат точек решетки Z^N.*

Доказательство. Если $\Gamma = \{x \in R^N: \sum \alpha_i x_i - 1 = 0\}$ — одна из гиперплоскостей, определяющих полиэдр V, то, поскольку неравенство (2) имеет не более конечного числа решений в целых числах $k \in Z^N$, либо имеем $\sum \alpha_i k_i - n = 0$ для некоторых $k \in Z^N$ и $n \in \mathbb{N}$ (α — набор рациональных чисел), либо существует константа $c_\Gamma > 0$ такая, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in Z^N$

$$\left| \sum \alpha_i k_i - n \right| > c_\Gamma a^{-N-1}, \quad a = \max |k_i|.$$

Для $k \in (n+1)V \backslash nV$ $a \le cn$ при некотором $c > 0$. Так как расстояние от точки k до грани $n\Gamma$ равно $\left| \sum \alpha_i k_i - n \right| \left(\sum \alpha_i^2 \right)^{-1/2}$, полагаем

$$d = c^{-N-1} \min_\Gamma \left(c_\Gamma \left(\sum \alpha_i^2 \right)^{-1/2} \right).$$

Из теоремы 2 следует, что для любых $A > 0$ и $f \in C(T^N)$

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n} \exp\left(A \left| f(x) - S_{lV} f(x) \right|^{1/N} \right) - 1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

равномерно на T^N.

Лемма 2. *Пусть полиэдр $V \in W_b$. Существуют постоянные $A > 0$ и $c > 0$ такие, что*

$$\sup_{|f| \le 1} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \exp\left(A \left| S_{lV} f(0) \right|^{1/N} \right) \le c, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Доказательство. Разложим функцию e^z в ряд и воспользуемся оценкой (3) и формулой Стирлинга. Тогда

$$\sup_{|f| \le 1} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \exp\left(A \left| S_{lV} f(0) \right|^{1/N} \right) =$$

$$= \sup_{|f| \le 1} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \sum_{l=1}^{n} \left| S_{lV} f(0) \right|^{p/N} \le c_1 \sum_{p=0}^{\infty} (Aec^{1/N})^p.$$

Осталось выбрать $A < \frac{1}{ec^{1/N}}$.

Следующие утверждения при $N = 1$ называются неравенствами типа неравенства Сидона [6].

Теорема 4. *Пусть полиэдр* $V \in W_b$, $\{a_j\}$ — *последовательность действительных чисел. Тогда*

$$\int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x) \right| dx \le c \sum_{j=1}^{n} |a_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|a_j|}{n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|} \right)^N \right]. \tag{8}$$

Доказательство. При $N = 1$, $V = [-1, 1]$ теорема доказана Фридли [7]. Докажем теорему для $N > 1$. Пусть L_Φ — пространство Орлича [8] функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, определенное $\mathcal{N}$-функцией

$$\Phi(u) = \int\limits_0^{|u|} \varphi(t)\, dt,$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{Ae}{N-1} \right)^{N-1} \dfrac{t}{t_N} & \text{при} \quad 0 \le t < t_N; \\ e^{At^{1/N}} t^{\frac{1-N}{N}} & \text{при} \quad t \ge t_N, \end{cases}$$

A — постоянная из леммы 2, $t_N = \left(\frac{N-1}{A} \right)^N$, φ — строго возрастающая функция, $\varphi(0) = 0$. Пусть ψ — функция, обратная к φ. Тогда

$$\Psi(u) = \int\limits_0^{|u|} \psi(t)\, dt$$

— $\mathcal{N}$-функция, дополнительная к Φ. Поскольку при достаточно больших t $\psi(t) = O(\ln^N t)$, а при t, близких к нулю, $\psi(t) = ct$, существует постоянная $c_1 = c_1(N, A)$ такая, что

$$\Psi(u) \le c_1 |u| \left[1 + \left(\log^+ |u| \right)^N \right]. \tag{9}$$

$\Phi(u) = O\left(e^{A|u|^{1/N}} \right)$ при всех u. Следуя [6], для набора действительных чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ полагаем

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[(j-1)n^{-1},\, jn^{-1}]},$$

где χ_A — характеристическая функция множества $A \subset R$. Пусть для $f \in C(T^N)$

$$I_n f(0) = \sum_{j=1}^{n} S_{jV} f(0) \chi_{[(j-1)n^{-1},\, jn^{-1}]}.$$

Тогда

$$\frac{1}{n}\int_{T^N}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right|dx = \sup_{|f|\le 1}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j S_{jV} f(0)\right| =$$

$$= \sup_{|f|\le 1}\int_0^1 |\Gamma(a_1,\ldots,a_n) I_n f(0)|\,dt.$$

Применяя неравенство Гельдера [8, с. 91], получаем

$$\frac{1}{n}\int_{T^N}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right|dx \le \|\Gamma(a_1,\ldots,a_n)\|_{\Psi}\sup_{|f|\le 1}\|I_n f(0)\|_{\Phi}. \tag{10}$$

Из определения нормы в пространстве L_Φ следует

$$\|g\|_\Phi \le \int_0^1 \Phi(g)\,dt + 1.$$

Поэтому

$$\sup_{|f|\le 1}\|I_n f(0)\|_\Phi \le \sup_{|f|\le 1}\int_0^1 \Phi(I_n f(0))\,dt + 1 \le$$

$$\le c\sup_{|f|\le 1}\int_0^1 \exp\left(A|I_n f(0)|^{1/N}\right)dt + 1 =$$

$$= c\sup_{|f|\le 1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(A\left|S_{jV} f(0)\right|^{1/N}\right) + 1.$$

Согласно лемме 2 последняя сумма при любом n конечна. Следовательно, из (10) получаем

$$\frac{1}{n}\int_{T^N}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right|dx \le c\|\Gamma(a_1,\ldots,a_n)\|_\Psi \le c\int_0^1 \Psi(\Gamma(a_1,\ldots,a_n))\,dt + c.$$

Из последнего неравенства, учитывая (9), имеем

$$\frac{1}{n}\int_{T^N}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right|dx \le c_1\int_0^1 |\Gamma|\left[1+\left(\log^+|\Gamma|\right)^N\right]dt + c_1 =$$

$$= \frac{c_1}{n}\sum_{j=1}^{n}|a_j|\left[1+\left(\log^+|a_j|\right)^N\right] + c_1. \tag{11}$$

Обозначим

$$\|a_n\|_1 = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}|a_j|.$$

Тогда, заменяя в (11) a_j на $a_j/\|a_n\|_1$, получаем оценку (8).

Теорема 5. *Пусть полиэдр* $V\in W_b$, $1<q\le 2$, $\{a_j\}$ — *последовательность действительных чисел,* $\{\nu_j\}$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того чтобы при любом* $n\in\mathbb{N}$ *выполнялось неравенство*

$$\frac{1}{n}\int_{T^N}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{\nu_j V}(x)\right| dx \leq c\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |a_j|^q\right)^{1/q}, \tag{12}$$

необходимо, а если $\{\nu_j\}$ *— выпукла, то и достаточно, чтобы*

$$\log \nu_j \leq c_1 j^{\frac{q-1}{qN}}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточности применим к сумме

$$\sup_{|f|\leq 1}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j S_{\nu_j V} f(0)\right|$$

неравенство Гельдера, затем теорему 3 (оценку (4)) при $p = \dfrac{q}{q-1}$.

Для доказательства необходимости полагаем в (11) $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$. Тогда из (11) следует

$$\int_{T^N}\left|D_{\nu_j V}(x)\right| dx \leq c n^{1-\frac{1}{q}},$$

и необходимость условия теоремы вытекает из (6).

При $N = 1$, $\nu_j = j$ неравенство (11), по существу, содержащееся в работе [9], было доказано в [10].

В заключение отметим, что двойственность между сильной суммируемостью и неравенствами типа Сидона при $N = 1$ установлена в [6]. Аналогичный результат, без изменения доказательства, имеет место и в кратном случае для любого ограниченного множества V, $0 \in \operatorname{int} V$.

1. *Подкорытов А. Н.* Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1980. – № 1. – С. 51 – 58.
2. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
3. *Кузнецова О. И.* О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 275 – 279.
4. *Кузнецова О. И.* О частичных суммах по полиэдрам рядов Фурье ограниченных функций // Anal. math. – 1993. – **19**. – P. 267 – 272.
5. *Подкорытов А. Н.* Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1982. – № 7. – С. 110 – 111.
6. *Fridli S., Schipp F.* Strong summability and Sidon type inequalities // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1995. – **60**. – P. 277 – 289.
7. *Fridli S.* An inverse Sidon type inequality // Stud. math. – 1993. – **105**, № 3. – P. 283 – 308.
8. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
9. *Фомин Г. А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1973. – **23**, № 2. – С. 213 – 222.
10. *Bojanic R., Stanojević Č. V.* A class of L^1 convergence // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – **269**. – P. 677 – 683.

Получено 16.12.96