УДК 517.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О НЕПРЕРЫВНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВАХ *

For a system of nonlinear difference equations, we establish conditions of the existence and uniqueness of its solution bounded on the entire real axis and study its properties.

Одержані умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних різницевих рівнянь і досліджено його властивості.

Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in R = (-\infty, +\infty)$, Λ — вещественная, постоянная $(n \times n)$-матрица, $f(t, x)$ — заданная вещественная вектор-функция, $x(t)$ — неизвестная вектор-функция.

При различных предположениях уравнения вида (1) изучались многими математиками (см., например, [1 – 6]). Целью настоящей статьи является установление условий существования и единственности непрерывного и ограниченного на всей вещественной оси решения системы (1) и исследование его свойств.

1. Обозначим через λ_i, $i = 1, \ldots, n$, собственные значения матрицы Λ и предположим выполненными следующие условия:

1) $0 < |\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, n$;

2) вектор-функция $f(t, x)$ является непрерывной по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le l\,|x - y|,$$

где $(t, x), (t, y) \in R \times R^n$, $|x| = \max\limits_{(1 \le i \le n)} |x_i|$, $l = \mathrm{const} > 0$;

3) $\sup\limits_{t \in R} |f(t, 0)| = M < \infty$.

Для простоты в дальнейшем будем считать, что $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\Lambda_1(\lambda_1), \ldots \ldots, \Lambda_k(\lambda_k))$, $1 \le k \le n$, где Λ_i, $i = 1, \ldots, k$, — квадратные $(n_i \times n_i)$-матрицы вида

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ и ε — сколь угодно малая положительная постоянная (в силу условия 1 этого можно достичь с помощью неособой замены переменных $x(t) = Cy(t)$).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда при достаточно малом* l *существует единственное непрерывное и ограниченное при* $t \in R$ *решение* $\gamma(t)$ *системы уравнений* (1).

Доказательство. Обозначим через C^0 множество непрерывных на R вектор-функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Министерстве Украины по делам науки и технологий.

$$\sup_{t \in R} |x(t)| \le N, \tag{2}$$

где N — некоторая положительная постоянная. На множестве C^0 введем расстояние между его элементами $x(t)$, $y(t)$ с помощью соотношения

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sup_{t \in R} |x(t) - y(t)|.$$

Тогда оно будет полным метрическим пространством и для доказательства теоремы 1 остается показать, что преобразование T:

$$Tx(t) = \Lambda x(t-1) + f(t-1, x(t-1))$$

имеет в C^0 единственную неподвижную точку.

Сначала покажем, что преобразование T переводит пространство C^0 в себя. Действительно, пусть $\lambda^* + l + \varepsilon < 1$, где $\lambda^* = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, k\}$ (в силу условия 1 это неравенство всегда выполняется при достаточно малых l и ε), $N \ge M/(1 - (\lambda^* + l + \varepsilon))$ и $x(t) \in C^0$. Тогда вектор-функция

$$Tx(t) = \Lambda x(t-1) + f(t-1, x(t-1))$$

является, очевидно, непрерывной при $t \in R$ и в силу условий 1 – 3, (2) получаем

$$\begin{gathered}|Tx(t)| \le |\Lambda x(t-1)| + |f(t-1, x(t-1))| \le \\ \le |\Lambda||x(t-1)| + |f(t-1, x(t-1)) - f(t-1, 0)| + |f(t-1, 0)| \le \\ \le (\lambda^* + \varepsilon)|x(t-1)| + l|x(t-1)| + M \le \\ \le (\lambda^* + l + \varepsilon)\|x(t)\| + M \le (\lambda^* + l + \varepsilon)N + M \le N.\end{gathered}$$

Отсюда следует $\sup_{t \in R} |Tx(t)| \le N$ и, таким образом, вектор-функция $Tx(t)$ принадлежит пространству C^0.

Теперь покажем, что преобразование T является сжатым. Действительно, если $x(t), y(t) \in C^0$, то

$$\begin{gathered}|Tx(t) - Ty(t)| \le |\Lambda||x(t-1) - y(t-1)| + \\ + |f(t-1, x(t-1)) - f(t-1, y(t-1))| \le \\ \le (\lambda^* + \varepsilon)\|x(t) - y(t)\| + l\|x(t) - y(t)\| = (\lambda^* + l + \varepsilon)\|x(t) - y(t)\|.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\rho(Tx(t), Ty(t)) \le (\lambda^* + l + \varepsilon)\,\rho(x(t), y(t)),$$

т. е. преобразование T является сжатым.

Тем самым доказано, что в пространстве C^0 преобразование T имеет единственную неподвижную точку $\gamma(t)$. Вектор-функция $\gamma(t)$ является единственным непрерывным и ограниченным при всех $t \in R$ решением системы уравнений (1), которое можно построить с помощью метода последовательных приближений. При этом последовательные приближения $x_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, определяются соотношениями

$$x_0(t) = 0, \quad x_m(t) = Tx_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 1 доказана.

Исследуем окрестность решения $\gamma(t)$. Для этого выполним в (1) преобразование

$$x(t) = y(t) + \gamma(t). \tag{3}$$

В результате получим

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \varphi(t, y(t)), \tag{4}$$

где $\varphi(t, y(t)) = f(t, y(t)+\gamma(t)) - f(t, \gamma(t))$. Легко видеть, что вектор-функция $\varphi(t, y)$ удовлетворяет условию 2 и $\varphi(t, 0) \equiv 0$.

Обозначим $F(t, y) = \Lambda y + \varphi(t, y)$ и положим

$$F^0(\tau, y) = y,$$
$$F^m(\tau+m, y) = F\left(\tau+m-1,\ F^{m-1}(\tau+m-1,\ y)\right), \tag{5}$$
$$m = 1, 2, \ldots,$$

где $\tau \in [0, 1)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда существует семейство непрерывных при всех* $t \geq 0$ *решений системы уравнений* (4) $y = y(t, \omega(t))$, *зависящее от произвольной, непрерывной при* $t \in [0, 1)$ *вектор-функции* $\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$, *удовлетворяющей условию*

$$\omega^1 = \Lambda\omega(0) + \varphi(0, \omega(0)), \tag{6}$$

где $\omega^1 = (\omega_1^1, \ldots, \omega_n^1)$, $\omega_i^1 = \lim\limits_{t\to 1-0} \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, *таких, что имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\omega(t)$ — произвольная непрерывная при $t \in [0, 1)$ вектор-функция, удовлетворяющая условию (6). Обозначим $\tau = t - [t]$, где $[t]$ — целая часть t, и положим $y(t) = \omega(t)$ при $t \in [0, 1)$. Поскольку $\tau \in [0, 1)$ при всех $t \geq 0$, то $y(\tau) = \omega(\tau)$ для произвольного $t \in [0, +\infty)$ и в силу (4) получаем

$$
\begin{gathered}
y(\tau+1) = \Lambda\omega(\tau) + \varphi(\tau, \omega(\tau)) = F(\tau, \omega(\tau)) = F^1(\tau+1, \omega(\tau)),\\
y(\tau+2) = F(\tau+1, F^1(\tau+1, \omega(\tau))) = F^2(\tau+2, \omega(\tau)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y(\tau+[t]) = y(t) =\\
= F(\tau+[t]-1, F^{[t]-1}(\tau+[t]-1, \omega(\tau))) = F^{[t]}(\tau+[t], \omega(\tau)).
\end{gathered} \tag{8}
$$

Используя (6), нетрудно убедиться, что решение $y(t)$ системы уравнений (4), задаваемое соотношением (8), является непрерывным при всех $t \geq 0$. Покажем, что оно удовлетворяет условию (7). В самом деле, поскольку $|y(\tau)| \leq L$, $L = \text{const} > 0$, $\tau \in [0, 1)$, то в силу условий 1, 2 можно последовательно получить

$$
\begin{gathered}
|y(\tau+1)| \leq (\lambda^* + l + \varepsilon) L,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
|y(t)| = |y(\tau+[t])| \leq (\lambda^* + l + \varepsilon)^{[t]} L.
\end{gathered}
$$

Так как $\lambda^* + l + \varepsilon < 1$ при достаточно малых l и ε, то из последнего соотношения вытекает (7). Теорема 2 доказана.

2. Если выполняются условия 2, 3 теоремы 1, а вместо условия 1 выполняется условие 1′) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, то теорема 1 сохраняет свою силу. Доказательство отличается от доказательства теоремы 1 лишь тем, что в этом случае преобразование T имеет вид

$$Tx(t) = \Lambda^{-1} x(t+1) - \Lambda^{-1} f(t, x(t)).$$

Выполняя в (1) преобразование (3), получаем систему уравнений (4), которую можно привести к виду

$$\tilde{y}(t) = \Lambda^{-1}\tilde{y}(t+1) + \tilde{\varphi}(t+1, \tilde{y}(t+1)), \tag{9}$$

где $\tilde{\varphi}(t, \tilde{y})$ — некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию 2 и $\tilde{\varphi}(t, 0) \equiv 0$.

В самом деле, выполним в (4) замену переменных

$$\Lambda y(t) + \varphi(t, y(t)) = \tilde{y}(t), \tag{10}$$

где $\tilde{y}(t)$ принадлежит пространству непрерывных и ограниченных при $t \in (-\infty, 1]$ функций $C^0_{(-\infty, 1]}$. Тогда нетрудно показать, что при достаточно малом l система уравнений (10) имеет в $C^0_{(-\infty, 1]}$ единственное решение $y(t)$ такое, что

$$y(t) = \Lambda^{-1}\tilde{y}(t) + \tilde{\varphi}(t, \tilde{y}(t)),$$

где $\tilde{\varphi}(t, \tilde{y})$ — некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию 2, $\tilde{\varphi}(t, 0) \equiv 0$, и, следовательно, в новых переменных система уравнений (4) запишется в виде (9).

Для системы уравнений (9) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 1′, 2, 3. *Тогда существует семейство непрерывных при* $t \in (-\infty, 1]$ *решений системы уравнений* (9) $y = y(t, \kappa(t))$, *зависящее от произвольной, непрерывной при* $t \in (0, 1]$ *вектор-функции* $\kappa(t) = (\kappa_1(t), \ldots, \kappa_n(t))$, *удовлетворяющей условию*

$$\kappa^0 = \Lambda^{-1}\kappa(1) + \tilde{\varphi}(1, \kappa(1)), \tag{11}$$

где $\kappa^0 = (\kappa^0_1, \ldots, \kappa^0_n)$, $\kappa^0_i = \lim\limits_{t \to 0+0} \kappa_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, *таких, что имеет место соотношение*

$$\lim_{t \to -\infty} |\tilde{y}(t)| = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим $\tau = t + [|t|]$ и положим $\tilde{y}(t) = \kappa(t)$ при $t \in (0, 1]$, где $\kappa(t)$ — произвольная, непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию (11). Так как $\tau \in (-1, 0]$ при всех $t \leq 0$, то $\tilde{y}(\tau + 1) = \kappa(\tau + 1)$ для произвольного $t \in (-\infty, 0]$ и в силу (9) получаем

$$\tilde{y}(\tau) = \Lambda^{-1}\kappa(\tau+1) + \tilde{\varphi}(\tau+1, \kappa(\tau+1)) =$$
$$= \tilde{F}(\tau+1, \kappa(\tau+1)) = \tilde{F}^1(\tau+1, \kappa(\tau+1)),$$
$$\tilde{y}(\tau-1) = \Lambda^{-1}\tilde{y}(\tau) + \tilde{\varphi}(\tau, \tilde{y}(\tau)) =$$
$$= \tilde{F}(\tau, \tilde{F}^1(\tau+1, \kappa(\tau+1))) = \tilde{F}^2(\tau, \kappa(\tau+1)), \tag{13}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{y}(\tau - [|t|]) = \tilde{y}(t) = \tilde{F}(\tau - [|t|] + 1, \tilde{F}^{[|t|]}(\tau - [|t|] + 2, \kappa(\tau+1))) =$$
$$= \tilde{F}^{[|t|]+1}(\tau - [|t|] + 1, \kappa(\tau+1)).$$

Принимая во внимание (11), можно убедиться, что решение системы (9), задаваемое соотношениями (13), является непрерывным при всех $t \leq 1$. Покажем, что оно удовлетворяет условию (12).

Действительно, так как $|\kappa(t)| \leq M$, $M = \mathrm{const} > 0$ при $t \in (0, 1]$, $|\Lambda^{-1}| \leq \lambda_*^{-1} + \varepsilon_1$, где $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$, ε_1 — сколь угодно малая положительная постоянная, то при достаточно малых l и ε_1 имеем $\lambda_*^{-1} + l + \varepsilon_1 < 1$ и из (13) получаем

$$|\tilde{y}(\tau)| \leq M(\lambda_*^{-1} + l + \varepsilon_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\tilde{y}(\tau - [|t|])| = |\tilde{y}(t)| \leq M(\lambda_*^{-1} + l + \varepsilon_1)^{[|t|]+1}.$$

Следовательно, решение $\tilde{y}(t)$ удовлетворяет соотношению (12). Теорема 3 доказана.

3. Рассмотрим случай, когда выполняются условия 2, 3 теоремы 1 и собственные значения λ_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию 1″) $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_{p+j}|$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, $p + q = n$. Для удобства запишем систему уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \tilde{\Lambda} x(t) + \tilde{f}(t, x(t), y(t)), \\ y(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}} y(t) + \tilde{\tilde{f}}(t, x(t), y(t)), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\tilde{\Lambda} = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k_1})$, $\tilde{\tilde{\Lambda}} = \operatorname{diag}(\Lambda_{k_1+1}, \ldots, \Lambda_{k_1+k_2})$, $k_1 \leq p$, $k_2 \leq q$, $n_1 + \cdots + n_{k_1} = p$, $n_{k_1+1} + \cdots + n_{k_1+k_2} = q$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_q)$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p)$, $\tilde{\tilde{f}} = (\tilde{\tilde{f}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{f}}_q)$. При выполнении условий 1″, 2, 3 и достаточно малом l система уравнений (14) имеет единственное непрерывное и ограниченное при всех $t \in R$ решение $(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\tilde{\gamma}}(t))$. Доказательство этого утверждения отличается от доказательства теоремы 1 лишь тем, что в этом случае преобразование $T = (\tilde{T}, \tilde{\tilde{T}})$ имеет вид

$$\tilde{T} x(t) = \tilde{\Lambda} x(t-1) + \tilde{f}(t-1, x(t-1), y(t-1)),$$

$$\tilde{\tilde{T}} y(t) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1} y(t+1) - \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1} \tilde{f}(t, x(t), y(t)).$$

Для исследования окрестности решения $(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\tilde{\gamma}}(t))$ выполним в (1) преобразование

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{\gamma}(t), \quad y(t) = \tilde{y}(t) + \tilde{\tilde{\gamma}}(t). \tag{15}$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1) &= \tilde{\Lambda} \tilde{x}(t) + \bar{f}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \\ \tilde{y}(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}} \tilde{y}(t) + \bar{\bar{f}}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\bar{f}(t, \tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{f}(t, \tilde{x} + \tilde{\gamma}, \tilde{y} + \tilde{\tilde{\gamma}}) - \tilde{f}(t, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}})$, $\bar{\bar{f}}(t, \tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\tilde{f}}(t, \tilde{x} + \tilde{\gamma}, \tilde{y} + \tilde{\tilde{\gamma}}) - \tilde{\tilde{f}}(t, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}})$. Нетрудно проверить, что функции $\bar{f}(t, \tilde{x}, \tilde{y})$, $\bar{\bar{f}}(t, \tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяют условию 2, $\bar{f}(t, 0, 0) \equiv 0$, $\bar{\bar{f}}(t, 0, 0) \equiv 0$ и, таким образом, изучение структуры множества решений системы (14), находящихся в окрестности решения $(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\tilde{\gamma}}(t))$, сводится к исследованию структуры множества решений системы (16), находящихся в окрестности ее тривиального решения.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1″, 2, 3. *Тогда существует замена переменных*

$$\tilde{x}(t) = \bar{x}(t), \quad \tilde{y}(t) = \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t)) \tag{17}$$

такая, что $(n-p)$*-мерная вектор-функция* $\psi(t, \bar{x})$ *является непрерывной при всех* $t \in R$, $\bar{x} \in R^p$, *удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered}\psi(t, 0) \equiv 0, \\ \left|\psi(t, \bar{x}'') - \psi(t, \bar{x}')\right| \leq K_1 \left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right|,\end{gathered} \tag{18}$$

$K_1 = \text{const} > 0$, $(t, \bar{x}'')$, $(t, \bar{x}') \in R \times R^p$, *и в новых переменных* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *система уравнений* (16) *принимает вид*

$$\begin{aligned}\bar{x}(t+1) &= \tilde{\Lambda}\bar{x}(t) + f^1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)), \\ \bar{y}(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}}\bar{y}(t) + f^2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)),\end{aligned} \tag{19}$$

где вектор-функции $f^1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))$, $f^2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))$ *являются непрерывными при всех* $t \in R$, $\bar{x} \in R^p$, $\bar{y} \in R^q$, *удовлетворяют условию* 2 *и* $f^2(t, \bar{x}(t), 0) \equiv 0$.

Доказательство. Действительно, выполняя в (16) замену переменных (17), получаем (19), где

$$f^1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t))),$$

$$f^2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \bar{\bar{f}}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t))) + \tilde{\tilde{\Lambda}}\psi(t, \bar{x}(t)) -$$

$$- \psi(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t)))).$$

Отсюда вытекает, что для доказательства теоремы 4 достаточно доказать существование решения $\psi(t, \bar{x})$ системы функциональных уравнений

$$\psi(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \bar{f}(t, \bar{x}, \psi(t, \bar{x}))) = \tilde{\tilde{\Lambda}}\psi(t, \bar{x}) + \bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \psi(t, \bar{x})) \tag{20}$$

с указанными в теореме свойствами.

Для построения решения системы уравнений воспользуемся методом последовательных приближений. При этом последовательные приближения $\psi_m(t, \bar{x})$, $m = 0, 1, \dots$, определим с помощью следующих соотношений:

$$\psi_0(t, \bar{x}) = 0,$$

$$\psi_m(t, \bar{x}) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\psi_{m-1}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \bar{f}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))) - \tag{21}$$

$$- \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})), \quad m = 1, 2, \dots .$$

Сначала покажем, что вектор-функции $\psi_m(t, \bar{x})$, $m = 0, 1, \dots$, определенные соотношениями (21), являются непрерывными при $t \in R$, $\bar{x} \in R^p$ и удовлетворяют условиям

$$\psi_m(t, 0) \equiv 0, \tag{22}$$

$$\left|\psi_m(t, \bar{x}'') - \psi_m(t, \bar{x}')\right| \leq K_1\left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right|, \quad m = 0, 1, \dots, \tag{23}$$

где K_1 — некоторая положительная, достаточно большая, постоянная.

Принимая во внимание условия 2 и (21), последовательно можно убедиться, что вектор-функции $\psi_m(t, \bar{x})$, $m = 0, 1, \dots$, являются непрерывными при $t \in R$, $\bar{x} \in R^p$ и удовлетворяют условию (22).

Поскольку

$$\psi_1(t, \bar{x}) = -\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, 0),$$

то в силу условия 2 имеем

$$\left|\psi_1(t, \bar{x}'') - \psi_1(t, \bar{x}')\right| \leq \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left|\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}'', 0) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{x}', 0)\right| \leq l\left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right)\left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right|,$$

где $\tilde{\bar{\lambda}}_* = \min\{|\lambda_j|,\ j = p+1, \ldots, n\}$, ε_2 — сколь угодно малая положительная постоянная, т. е. в случае $m = 1$ условие (23) выполняется $\left(K_1 > l\left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right)\right)$. Предположим, что условие (23) доказано уже для некоторого $m \geq 1$, и покажем, что оно имеет место при $m+1$. В самом деле, в силу (21), (23) и условия 2 имеем

$$|\psi_{m+1}(t,\bar{x}'') - \psi_{m+1}(t,\bar{x}')| \leq \left|\tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\right| \Big|\psi_m(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x}'' + \bar{f}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))) -$$

$$- \psi_m(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x}' + \bar{f}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}')))\Big| + \left|\tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\right| \Big|\bar{\bar{f}}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}'')) -$$

$$- \bar{\bar{f}}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}'))\Big| \leq \left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) K_1\left(\left|\tilde{\Lambda}\right|\left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right| + l\left(\left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right| +\right.\right.$$

$$\left.\left. + K_1|\bar{x}'' - \bar{x}'|\right)\right) + \left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) l\,(|\bar{x}'' - \bar{x}'| + K_1|\bar{x}'' - \bar{x}'|) \leq$$

$$\leq K_1\left(\left(\tilde{\lambda}^* + \varepsilon_2\right)\left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) + \left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) l\,(1 + K_1) +\right.$$

$$\left. + \left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) l\, K_1^{-1}(1 + K_1)\right)\left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right|,$$

где $\tilde{\lambda}^* = \max\{|\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, p\}$. Поскольку при достаточно большом K_1 и достаточно малых l и ε_2

$$\left(\tilde{\lambda}^* + \varepsilon_2\right)\left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) + \left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) l\,(1 + K_1) + \left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right) l\, K_1^{-1}(1 + K_1) \leq 1,$$

то

$$\left|\psi_{m+1}(t,\bar{x}'') - \psi_{m+1}(t,\bar{x}')\right| \leq K_1\left|\bar{x}'' - \bar{x}'\right|$$

и, следовательно, условие (23) имеет место при $(t, \bar{x}'')$, $(t, \bar{x}') \in R \times R^p$ и при всех $m \geq 0$.

Теперь покажем, что при всех $m \geq 1$ выполняется оценка

$$|\psi_m(t,\bar{x}) - \psi_{m-1}(t,\bar{x})| \leq K_2\,\theta^{m-1}|\bar{x}|, \tag{24}$$

где $K_2 = \text{const} > 0$, $0 < \theta < 1$.

Действительно, в силу (21) и условия 2 при $m = 1$ получаем

$$|\psi_1(t,\bar{x}) - \psi_0(t,\bar{x})| = \left|-\tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\bar{\bar{f}}(t,\bar{x},0)\right| \leq l\left(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2\right)|\bar{x}|,$$

т. е. в этом случае оценка (24) выполняется $(K_2 = l(\tilde{\bar{\lambda}}_*^{-1} + \varepsilon_2))$. Предположим, что оценка (24) доказана уже для некоторого $m \geq 1$ и покажем, что она не изменится при переходе от m к $m+1$. В самом деле, принимая во внимание условие 2, (21), (22), получаем

$$|\psi_{m+1}(t,\bar{x}) - \psi_m(t,\bar{x})| \leq \left|\tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\right| \Big|\psi_m(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \bar{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))) -$$

$$- \psi_{m-1}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \bar{f}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})))\Big| + \left|\tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\right| \Big|\bar{\bar{f}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \bar{\bar{f}}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x}))\Big| \le \Big|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\Big|\Big|\psi_m(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}+\bar{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))) - \\
&\qquad - \psi_{m-1}(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}+\bar{f}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})))\Big| + \\
&\qquad + \Big|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\Big|\Big|\psi_{m-1}(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}+\bar{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))) - \\
&- \psi_{m-1}(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}+\bar{f}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})))\Big| + \Big|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\Big|\Big|\bar{\bar{f}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \\
&- \bar{\bar{f}}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x}))\Big| \le \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)K_2\theta^{m-1}\left(\left|\tilde{\Lambda}\right||\bar{x}|+\left|\bar{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right|\right) + \\
&\qquad + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)K_1\left(\left|\bar{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))-\bar{f}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x}))\right| + \right. \\
&- \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)l\left|\psi_m(t,\bar{x})-\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right| \le \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)K_2\theta^{m-1}\left(\left(\tilde{\lambda}^*+\varepsilon_2\right)|\bar{x}| + \right. \\
&\qquad + \left. l\left(|\bar{x}|+K_2(1-\theta)^{-1}|\bar{x}|\right)\right) + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)K_1\,l\,K_2\theta^{m-1}|\bar{x}| + \\
&\qquad + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)l\,K_2\theta^{m-1}|\bar{x}| \le K_2\theta^{m-1}\Big[\left(\tilde{\lambda}^*+\varepsilon_2\right)\left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right) + \\
&+ \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)\left(1+K_2(1-\theta)^{-1}\right)l + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)K_1 l + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)l\Big]|\bar{x}|.
\end{aligned}
$$

Так как $\tilde{\lambda}^*\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}<1$, то для достаточно малых l и ε_2 имеем

$$
\begin{aligned}
&\left(\tilde{\lambda}^*+\varepsilon_2\right)\left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right) + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)\left(1+K_2(1-\theta)^{-1}\right)l + \\
&\qquad + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)K_1 l + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}+\varepsilon_2\right)l \le \theta < 1
\end{aligned}
$$

и, таким образом, оценка (24) справедлива при всех $m \ge 1$.

Непосредственно из (24) вытекает, что последовательность вектор-функций $\psi_m(t,\bar{x})$, $m = 0, 1, \ldots$, определенных соотношениями (21), равномерно сходится при $t \in R$, $\bar{x} \in R^p$ к непрерывной вектор-функции $\psi(t,\bar{x}) = \lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(t,\bar{x})$, которая удовлетворяет системе уравнений (20) и условиям (18) (в этом легко убедиться, если перейти в (21), (22), (23) к пределу при $m \to \infty$). Теорема 4 доказана.

Таким образом, в результате преобразования (17) исследование окрестности тривиального решения системы уравнений (16) сводится к исследованию окрестности тривиального решения системы (19). Поскольку система уравнений

$$
\bar{x}(t+1) = \tilde{\Lambda}\bar{x}(t) + f^1(t,\bar{x}(t),0)
$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и $f^2(t,\bar{x},0) \equiv 0$, то система уравнений (19) имеет семейство непрерывных при $t \in [0,\infty)$ решений $\bar{x}(t,\omega(t),0)$, зависящее от произвольной, непрерывной при $t \in [0,1)$ вектор-функции $\omega(t)$ размерности p, удовлетворяющей условию $\omega^1 = \tilde{\Lambda}\omega(0) + f^1(0,\omega(0),0)$, таких, что $\lim\limits_{t\to\infty}|\bar{x}(t)| = 0$. Отсюда и из (17), (18) вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Если выполняются условия* 1″, 2, 3, *то существует семейство непрерывных при* $t \in [0,+\infty)$ *решений* $(\tilde{x}(t) = \bar{x}(t,\omega(t))$, $\tilde{y}(t) = \psi(t,\ \bar{x}(t,$

$\omega(t)))$ *системы уравнений* (16) *таких, что имеют место соотношения*

$$\lim_{t\to+\infty}|\tilde{x}(t)| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}|\tilde{y}(t)| = 0. \tag{25}$$

Построенное выше семейство решений системы уравнений (16), удовлетворяющих условию (25), не исчерпывает всех решений этой системы, находящихся в окрестности ее тривиального решения. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $1''$, 2, 3. *Тогда существует семейство непрерывных при* $t\in(-\infty, 1]$ *решений* $(\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t,\kappa(t)),\ \tilde{y}(t) = \tilde{y}(t,\kappa(t)))$ *системы уравнений* (16) ($\kappa(t)$ — *произвольная, непрерывная при* $t\in(0, 1]$ *вектор-функция размерности* $n-p$) *таких, что имеют место соотношения*

$$\lim_{t\to-\infty}|\tilde{x}(t)| = 0, \quad \lim_{t\to-\infty}|\tilde{y}(t)| = 0. \tag{26}$$

Рассматривая систему уравнений (16) как систему алгебраических уравнений относительно функций $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$, нетрудно показать, что при достаточно малом l она имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{x}(t+1) + \hat{f}(t, \tilde{x}(t+1), \tilde{y}(t+1)), \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\tilde{y}(t+1) + \hat{\hat{f}}(t, \tilde{x}(t+1), \tilde{y}(t+1)), \end{aligned} \tag{27}$$

где $\hat{f}(t,\tilde{x},\tilde{y})$, $\hat{\hat{f}}(t,\tilde{x},\tilde{y})$ — некоторые вектор-функции, удовлетворяющие условию 2, и $\hat{f}(t,0,0)\equiv 0$, $\hat{\hat{f}}(t,0,0)\equiv 0$.

Для системы уравнений (27) справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* $1''$, 2. *Тогда существует замена переменных*

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) + g(t, \hat{y}(t)), \quad \tilde{y}(t) = \hat{y}(t) \tag{28}$$

такая, что p*-мерная вектор-функция* $g(t,\hat{y})$ *является непрерывной при всех* $t\in R$, $\hat{y}\in R^{n-p}$, *удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} g(t, 0) &\equiv 0, \\ |g(t,\hat{y}'') - g(t,\hat{y}')| &\le P_1|\hat{y}'' - \hat{y}'|, \end{aligned} \tag{29}$$

где P_1 — *достаточно большая положительная постоянная,* $(t,\hat{y}'')$, $(t,\hat{y}')\in R\times R^{n-p}$, *и в новых переменных* $\hat{x}$, $\hat{y}$ *система уравнений* (27) *принимает вид*

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \tilde{\Lambda}^{-1}\hat{x}(t+1) + \hat{f}^{\,1}(t, \hat{x}(t+1), \hat{y}(t+1)), \\ \hat{y}(t) &= \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\hat{y}(t+1) + \hat{\hat{f}}^{\,2}(t, \hat{x}(t+1), \hat{y}(t+1)), \end{aligned} \tag{30}$$

где вектор-функции $\hat{f}^{\,1}(t,\hat{x},\hat{y})$, $\hat{\hat{f}}^{\,2}(t,\hat{x},\hat{y})$ *являются непрерывными при всех* $t\in R$, $\hat{x}\in R^{p}$, $\hat{y}\in R^{n-p}$, *удовлетворяют условию* 2 *и* $\hat{f}^{\,1}(t,0,\hat{y})\equiv 0$.

Выполняя в (27) замену переменных (28), получаем (30), где

$$\begin{aligned} \hat{f}^{\,1}(t, \hat{x}(t+1), \hat{y}(t+1)) &= \tilde{\Lambda}^{-1}g(t+1, \hat{y}(t+1)) \;+ \\ &+\; \hat{f}(t, \hat{x}(t+1) + g(t+1, \hat{y}(t+1)), \hat{y}(t+1)) \;- \\ &-\; g(t, \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\hat{y}(t+1) + \hat{\hat{f}}(t, \hat{x}(t+1) + g(t+1,\hat{y}(t+1)), \hat{y}(t+1))), \\ \hat{\hat{f}}^{\,2}(t, \hat{x}(t+1), \hat{y}(t+1)) &= \hat{\hat{f}}(t, \hat{x}(t+1) + g(t+1, \hat{y}(t+1)), \hat{y}(t+1)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы 7 достаточно доказать существование решения $g(t, \hat{y})$ системы функциональных уравнений

$$g(t, \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\hat{y} + \hat{\hat{f}}(t, g(t+1, \hat{y}), \hat{y})) = \\ = \tilde{\Lambda}^{-1} g(t+1, \hat{y}) + \hat{f}(t, g(t+1, \hat{y}), \hat{y}) \tag{31}$$

с указанными в теореме свойствами. Доказательство существования решения системы (31) проводится точно так же, как было доказано существование соответствующего решения системы уравнений (20). При этом последовательные приближения $g_m(t, \hat{y})$, $m = 0, 1, \ldots$, определяются с помощью соотношений

$$g_0(t, \hat{y}) = 0,$$

$$g_m(t, \hat{y}) = \tilde{\Lambda} g_{m-1}(t-1, \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\hat{y} + \hat{\hat{f}}(t-1, g_{m-1}(t, \hat{y}), \hat{y}) - \\ - \tilde{\Lambda}\hat{f}(t-1, g_{m-1}(t, \hat{y}), \hat{y}), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Теперь нетрудно доказать теорему 6. Действительно, поскольку система уравнений

$$\hat{y}(t) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\hat{y}(t+1) + \hat{\hat{f}}^{2}(t, 0, \hat{y}(t+1))$$

имеет такой же вид, как и система уравнений (9), то аналогично можно показать, что она имеет семейство непрерывных при $t \in (-\infty, 1]$ решений $\hat{y}(t) = \hat{y}(t, \kappa(t))$ ($\kappa(t)$ — произвольная, непрерывная при $t \in (0, 1]$ вектор-функция размерности $n-p$, удовлетворяющая условию $\kappa^0 = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\kappa(1) + \hat{\hat{f}}^{2}(0, 0, \kappa(1))$) таких, что $\lim_{t\to-\infty} |\hat{y}(t)| = 0$. Тогда в силу $\hat{f}^{1}(t, 0, \hat{y}) \equiv 0$ система уравнений (30) имеет семейство решений $(0, \hat{y}(t, \kappa(t)))$. Отсюда и из (28) непосредственно вытекает, что система (27) имеет семейство решений $(\tilde{x}(t) = g(t, \hat{y}(t, \kappa(t)))$, $\tilde{y}(t) = \hat{y}(t, \kappa(t)))$, удовлетворяющих условию (26). Теорема 6 доказана.

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 307 с.
2. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 137 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
4. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
5. *Пелюх Г. П.* О поведении решений систем нелинейных разностных уравнений // Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 73 – 80.
6. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №1. – С. 140 – 145.

Получено 25.06.98