УДК 512.546

И. В. Протасов (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ТОПОЛОГИИ НА ГРУППАХ

We prove that there exist ZFC models in which every nondiscrete topological Abelian group can be decomposed into countable number of dense subsets. This statement is an answer to the question raised by Comfort and van Mill. We also prove that every submaximal left-topological Abelian group is σ-discrete.

Доведено існування моделей ZFC, в яких кожну недискретну топологічну абелеву групу можна розкласти на зліченне число щільних підмножин. Це твердження є відповіддю на запитання, поставлене Комфортом та ван Міллом. Показано, що кожна субмаксимальна лівотопологічна абелева група σ-дискретна.

Топологическое пространство называется k-разложимым, если его можно разбить на k плотных подмножеств. Топологическое пространство без изолированных точек называется k-неразложимым, если его нельзя разбить на k плотных подмножеств. Условимся опускать кардинал k, если $k = 2$. Все рассматриваемые топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми.

Комфорт и ван Милл доказали [1], что неразложимая топологическая абелева группа содержит бесконечную булеву подгруппу. Булевыми называются группы экспоненты 2. Теорема Комфорта – ван Милла уточнена в работе [2]. Неразложимая топологическая абелева группа содержит счетную открытую булеву подгруппу. Этот результат усилен в статье [3]. Каждая $\aleph_0$-неразложимая топологическая абелева группа содержит счетную булеву подгруппу.

Все известные примеры неразложимых топологических групп [4, 5] построены с помощью аксиомы Мартина — теоретико-множественного предположения, независимого от системы аксиом ZFC. Комфорт и ван Милл поставили вопрос [1] о возможности построения неразложимой топологической абелевой группы в системе аксиом ZFC без дополнительных теоретико-множественных предположений. В данной работе получен отрицательный ответ на этот вопрос. Более того, доказано существование моделей ZFC, в которых все недискретные топологические абелевы группы $\aleph_0$-разложимы.

Топологическое пространство X без изолированных точек называется максимальным, если в любой более сильной топологии пространство X имеет изолированные точки. Топологическое пространство без изолированных точек называется субмаксимальным, если любое его плотное подмножество открыто. Каждое максимальное пространство субмаксимально, а каждое субмаксимальное пространство неразложимо.

Архангельский и Коллинз поставили следующий вопрос [6]: верно ли, что каждое субмаксимальное пространство σ-дискретно, т. е. представимо в виде объединения счетного числа дискретных подмножеств? Шредер анонсировал [7] отрицательный ответ на этот вопрос в предположении существования измеримых кардиналов. С другой стороны, в работе [8] доказана σ-дискретность любой субмаксимальной левотопологической группы, мощность которой неизмерима по Уламу. Напомним, что группа G, снабженная топологией, называется левотопологической, если отображение $x \to gx$ непрерывно для любого элемента $g \in G$. Естественно возникает вопрос о σ-дискретности субмаксимальной левотопологической группы произвольной мощности. В данной работе получен положительный ответ на этот вопрос для широкого класса левотопологических групп, включающего все абелевы группы.

Основные результаты данной работы доказываются с помощью техники ультрафильтров. В статье [9] каждой топологической группе сопоставлена некоторая полугруппа ультрафильтров. Полугруппа ультрафильтров левотопологической группы определена в статье [10].

1. Полугруппа ультрафильтров неразложимой группы. Пусть G — дискретная группа, βG — чех-стоунова компактификация группы G. Элементами пространства βG являются все возможные ультрафильтры на группе G, а базу топологии образуют множества $\overline{A} = \{p \in \beta G: A \in p\}$, где A пробегает все подмножества группы G. Отождествим группу G с подмножеством главных ультрафильтров из βG, а подмножество $\beta G \setminus G$ свободных ультрафильтров обозначим через G^*.

Операция умножения элементов группы G естественно продолжается на множество βG. Произведение pq ультрафильтров p, q определим указанием всех подмножеств $A \subset G$, которые являются элементами ультрафильтра pq:

$$A \in pq \Leftrightarrow \{g \in G: g^{-1}A \in q\} \in p.$$

Возьмем произвольное подмножество $P \in p$ и для каждого элемента $x \in P$ выберем некоторое подмножество $Q_x \in q$. Тогда подмножество $\bigcup\{xQ_x: x \in \in P\}$ принадлежит ультрафильтру pq и любой элемент ультрафильтра pq содержит подмножество такого вида. Таким образом, мы описали базу ультрафильтра pq.

Операция умножения ультрафильтров ассоциативна, непрерывна по первому аргументу при фиксированном втором аргументе и непрерывна по второму аргументу, если фиксированный первый аргумент является главным ультрафильтром. Подмножество G^* является замкнутой подполугруппой полугруппы βG.

Такая конструкция продолжения операции умножения на βG возникла и широко применяется в комбинаторике чисел (см. обзоры [11 – 15]).

Для произвольного фильтра φ на группе G обозначим

$$\overline{\varphi} = \bigcap\{\overline{A}: A \in \varphi\}, \qquad \varphi^* = \overline{\varphi} \cap G^*.$$

Поскольку топология на группе G, инвариантная относительно левых сдвигов, однозначно определяется фильтром τ окрестностей единицы, условимся левотопологическую группу обозначать парой (G, τ). Различные характеризации фильтров τ на группе G, для которых (G, τ) — левотопологическая группа, получены в статье [10].

Для левотопологической группы (G, τ) подмножество $\overline{\tau}$ состоит из всех ультрафильтров, сходящихся к единице, и является замкнутой подполугруппой полугруппы βG [10]. Полугруппа $\overline{\tau}$ называется полугруппой ультрафильтров левотопологической группы (G, τ), а ее подполугруппа τ^* — полугруппой свободных ультрафильтров.

Для изучения полугруппы ультрафильтров неразложимой левотопологической группы привлечем некоторые определения и результаты из статьи [16].

Пусть (G, τ) — левотопологическая группа. Ультрафильтр $p \in \overline{\tau}$ называется τ-поглощающим, если $\operatorname{int}\operatorname{cl} P \in p$ для любого подмножества $P \in p$. Через $\operatorname{int} A$ и $\operatorname{cl} A$ обозначаются внутренность и замыкание подмножества A. Множество D_τ всех τ-поглощающих ультрафильтров является замкнутым идеалом полугруппы $\overline{\tau}$ и, следовательно, содержит минимальный идеал M_τ полугруппы $\overline{\tau}$.

Фильтр φ на группе (G, τ) с базой, состоящей из открытых подмножеств, называется o-фильтром. Максимальный фильтр в классе o-фильтров называется o-ультрафильтром. Для ультрафильтра $p \in \overline{\tau}$ через $o(p)$ обозначим максимальный o-фильтр, который содержится в ультрафильтре p. Фильтр $o(p)$ называется открытой оболочкой ультрафильтра p.

Ультрафильтр $p \in \overline{\tau}$ является τ-поглощающим тогда и только тогда, когда $o(p)$ — o-ультрафильтр. Идеал D_τ является объединением попарно непересекающихся замкнутых правых идеалов полугруппы $\overline{\tau}$ вида $\overline{\varphi}$, где φ — o-ультрафильтр и $\tau \subset \varphi$.

1.1. **Лемма.** *Пусть (G, τ) — левотопологическая группа, φ — o-ультрафильтр на G, $\tau \subset \varphi$. Если $|\overline{\varphi}| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, то группа (G, τ) n-разложима.*

Доказательство. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные ультрафильтры из $\overline{\varphi}$. Выберем $P_i \in p_i$ так, чтобы $P_i \bigcap P_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Обозначим $Q_i = \operatorname{int} \operatorname{cl} P_i$. Так как ультрафильтр p_i τ-поглощающий, то $Q_i \in p_i$. Поскольку φ — o-ультрафильтр и $p_i \in \overline{\varphi}$, то $Q_i \in \varphi$. Положим $Q = Q_1 \bigcap \ldots \bigcap Q_n$, $D_i = P_i \bigcap Q$. Так как $D_1, \ldots, D_n$ — плотные подмножества в Q, то подпространство Q однородного пространства (G, τ) n-разложимо. Следовательно, группа (G, τ) n-разложима.

1.2. **Лемма.** *Пусть (G, τ) — левотопологическая группа, φ — o-ультрафильтр на G, $\tau \subset \varphi$. Если $|\overline{\varphi}| < n$, $n \in \mathbb{N}$, то группа (G, τ) n-неразложима.*

Доказательство. Допустим противное и зафиксируем разбиение группы $G = D_1 \bigcup \ldots \bigcup D_n$ плотными подмножествами. Так как $|\overline{\varphi}| < n$, то найдутся подмножество $U \in \varphi$ и подмножество разбиения D_i такие, что $U \bigcap D_i = \varnothing$. Поскольку подмножество U имеет непустую внутренность, подмножество D_i не является плотным — противоречие.

Топологическое пространство X назовем точно n-разложимым, $n \in \mathbb{N}$, если X n-разложимо и $(n+1)$-неразложимо.

1.3. **Теорема.** *Левотопологическая группа (G, τ) точно n-разложима, $n \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда $|\overline{\varphi}| = n$ для любого o-ультрафильтра φ на G, удовлетворяющего условию $\tau \subset \varphi$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 1.1, 1.2.

По теореме Елькина [17] топологическое пространство неразложимо тогда и только тогда, когда семейство всех его открытых подмножеств содержит базу ультрафильтра. Из теоремы 1.3 вытекает следующее уточнение теоремы Елькина для левотопологических групп.

1.4. **Теорема.** *Левотопологическая группа (G, τ) неразложима тогда и только тогда, когда полугруппа τ^* содержит ультрафильтр с базой из открытых подмножеств.*

1.5. **Теорема.** *Левотопологическая группа (G, τ) субмаксимальна тогда и только тогда, когда любой ультрафильтр из τ^* имеет базу из открытых подмножеств.*

Доказательство. Согласно теореме 1.2 из [6], топологическое пространство X субмаксимально тогда и только тогда, когда любое подмножество $A \subset \subset X$ с пустой внутренностью является замкнутым.

Пусть группа (G, τ) субмаксимальна, $p \in \tau^*$, e — единица группы G. Если $\operatorname{int} P = \varnothing$ для некоторого подмножества $P \in p$, то подмножество P замкнуто и, следовательно, $e \in P$. Значит, p — главный ультрафильтр и $p \notin \tau^*$. Поэтому $\operatorname{int} P = \varnothing$ для любого подмножества $P \in p$, т. е. p имеет базу из открытых подмножеств.

Пусть любой ультрафильтр из τ^* имеет базу из открытых подмножеств. Допустим, что существует незамкнутое подмножество $A \subset G$ с пустой внутренностью. Так как группа (G, τ) левотопологическая, можно считать, что $e \in \operatorname{cl} A \setminus A$. Выберем ультрафильтр p, сходящийся к e, так, чтобы $A \in p$. Тогда $p \in \tau^*$ и $\operatorname{int} P = \varnothing$ для любого $P \in p$, $P \subset A$ — противоречие.

1.6. **Теорема.** *Левотопологическая группа* (G, τ) *максимальна тогда и только тогда, когда* $|\tau^*| = 1$.

Доказательство. Достаточно заметить, что топологическое пространство максимально тогда и только тогда, когда к каждой его точке сходится лишь один свободный ультрафильтр.

1.7. ***Замечание.*** Согласно теореме Малыхина [18], максимальная топологическая группа содержит счетную открытую булеву подгруппу и, следовательно, ее дисперсионный характер счетен. Напомним, что дисперсионный характер топологического пространства — это минимальная из мощностей его открытых подмножеств. Существование максимальных топологических групп не зависит от ZFC [10] (теорема 7.3). В то же время максимальные левотопологические группы произвольного дисперсионного характера можно построить в ZFC [10, с. 23]. Пространство максимальной левотопологической группы, вообще говоря, нерегулярно. В письме автору Малыхин поставил следующий вопрос: существуют ли в ZFC максимальные регулярные однородные пространства? Недавно автор доказал, что на любой бесконечной группе можно определить в ZFC максимальную регулярную топологию счетного дисперсионного характера с непрерывными левыми сдвигами. Таким образом, получен положительный ответ на вопрос Малыхина. Соответствующая конструкция будет изложена в отдельной статье. Вопрос о существовании максимальных регулярных левотопологических групп несчетного дисперсионного характера открыт.

1.8. ***Замечание.*** Покажем, что любую недискретную топологию на группе, в которой непрерывны левые сдвиги, можно усилить до максимальной с сохранением дисперсионного характера. Пусть (G, τ) — недискретная левотопологическая группа дисперсионного характера γ. Обозначим через G_γ^* семейство всех ультрафильтров на группе G дисперсионного характера γ. Дисперсионный характер ультрафильтра — это минимальная из мощностей его елементов. Тогда G_γ^* — замкнутая подполугруппа в G^* и $G_\gamma^* \cap \tau^* \neq \varnothing$. Выберем произвольный идемпотент $p \in G_\gamma^* \cap \tau^*$ и обозначим через μ фильтр на группе G с базой $\{P \cup \{e\} \colon P \in p\}$, e — единица группы G. Тогда (G, μ) — максимальная левотопологическая группа [10, с. 23] и $\tau \subset \mu$.

Предположим, что полугруппа ультрафильтров левотопологической группы (G, τ) содержит ультрафильтр p с базой из открытых подмножеств. Из определения операции умножения ультрафильтров непосредственно следует, что p — левый нуль полугруппы $\bar{\tau}$, т. е. $pq = p$ для любого $q \in \bar{\tau}$. Согласно теореме 1.4, полугруппа ультрафильтров неразложимой левотопологической группы содержит левый нуль. В силу теоремы 1.5 полугруппа свободных ультрафильтров субмаксимальной левотопологической группы является полугруппой левых нулей. В заключение этого пункта мы получим некоторую информацию о полугруппе ультрафильтров точно n-разложимой группы.

Для идемпотентов $p, q \in \beta G$ запись $p \underset{l}{\sim} q$ означает, что $pq = p$, $qp = q$. Легко проверить, что $p \underset{l}{\sim} q$ тогда и только тогда, когда $(\beta G)p = (\beta G)q$. Обозначим $L(p) = \{q \in \beta G \colon q^2 = q,\ q \underset{l}{\sim} p\}$.

1.9. **Теорема.** *Пусть* (G, τ) — *точно* n-*разложимая группа*, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *каждый минимальный правый идеал полугруппы* $\bar{\tau}$ *содержит не более* n *элементов*;

в) *существует не более* n *минимальных левых идеалов полугруппы* $\bar{\tau}$;

с) $|\bar{\tau} \cap L(p)| \leq n$ *для любого идемпотента* $p \in \bar{\tau}$.

Доказательство. а. Пусть R — минимальный правый идеал полугруппы $\overline{\tau}$, $p \in R$. Так как $R \subset M_\tau$ и $M_\tau \subset D_\tau$, то p — τ-поглощающий ультрафильтр. Следовательно, $o(p)$ — o-ультрафильтр. Согласно теореме 1.3, $|\overline{o(p)}| = n$. Так как $\overline{o(p)}$ — правый идеал полугруппы $\overline{\tau}$ и $R \subset \overline{o(p)}$, то $|R| \le \le n$.

в. Поскольку любой левый идеал пересекает любой правый идеал, то утверждение а) влечет утверждение в).

с. Допустим, что $|\overline{\tau} \cap L(p)| > n$ для некоторого идемпотента $p \in \overline{\tau}$. Выберем различные ультрафильтры $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \overline{\tau} \cap L(p)$. Обозначим через ψ фильтр на группе G такой, что $\psi = \left\{ e, p_1, \ldots, p_{n+1} \right\}$, где e — единица группы G. Тогда (G, ψ) — левотопологическая группа [10, с. 18]. Так как $\tau \subset \psi$, то группа (G, ψ) $(n+1)$-неразложима. Поскольку $p_1, \ldots, p_{n+1} \in L(p)$, то $\left\{ p_1, \ldots, p_{n+1} \right\}$ — минимальный правый идеал полугруппы $\overline{\psi}$. Однако, это противоречит утверждению а).

1.10. ***Вопрос.*** Пусть полугруппа ультрафильтров левотопологической группы (G, τ) содержит левый нуль. Верно ли, что группа (G, τ) неразложима?

1.11. ***Вопрос.*** Пусть полугруппа свободных ультрафильтров левотопологической группы (G, τ) является полугруппой левых нулей. Верно ли, что группа (G, τ) субмаксимальна?

Для левотопологических групп с конечными полугруппами ультрафильтров ответы на оба вопроса положительны.

2. Теорема о *P*-точке. В этом пункте мы доказываем основной результат данной работы — существуют модели ZFC, в которых любая недискретная топологическая абелева группа $\aleph_0$-разложима.

Ультрафильтр p на группе G называется правосократимым, если $qp = rp$ влечет $q = r$. Для ультрафильтра p на счетной группе G следующие утверждения равносильны [19, 20]:

а) p — правосократимый ультрафильтр;

в) $p = qp$ влечет $q = e$, e — единица группы G;

с) существует семейство подмножеств $\{ P_x \in p : x \in G \}$ такое, что $xP_x \cap \cap yP_y = \varnothing$ для всех различных элементов $x, y \in G$.

С другой стороны, ультрафильтр p на счетной группе G не является правосократимым тогда и только тогда, когда существует идемпотент $q \in G^*$ такой, что $p = qp$.

Свободный ультрафильтр p на группе G называется простым, если $p = qr$ влечет $q \in G$ либо $r \in G$. Заметим, что простой ультрафильтр на счетной группе правосократим.

2.1. **Лемма.** *Пусть (G, τ) — счетная левотопологическая группа. Если существует правосократимый ультрафильтр $p \in \tau^*$, то группа (G, τ) $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Для каждого элемента $x \in G$ выберем подмножество $P_x \in p$ так, чтобы $xP_x \cap yP_y = \varnothing$ для всех $x \ne y$. Так как p — свободный ультрафильтр, можно считать, что $e \notin P_x \cup xP_x$ для всех $x \in G$, e — единица группы G. Положим $A_0 = \{e\}$, $A_1 = P_e$. Допустим, что уже определены подмножества $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Положим $A_{n+1} = \bigcup \{ xP_x : x \in A_n \}$. Проверим следующие два свойства семейства подмножеств $\{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$.

1. $A_{n+1} \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_n) = \varnothing$. Ясно, что $A_0 \cap A_1 = \varnothing$. Предположим

доказанным утверждение $A_n \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \varnothing$. Допустим, что $A_{n+1} \cap \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_n) \neq \varnothing$ и выберем элемент $g \in A_{n+1} \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_n)$. Так как $g \in A_{n+1}$, то $g \in xP_x$ для некоторого $x \in A_n$. Поскольку $g \in A_0 \cup \ldots \cup A_n$, то $g = e$ либо $g \in yP_y$ для некоторого $y \in A_i$, $1 \leq i \leq n$. Первый случай невозможен, так как $e \notin xP_x$. Во втором случае $x = y$ и, следовательно, $A_n \cap \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \neq \varnothing$ — противоречие.

2. $A_{n-1} \subset \mathrm{cl}\, A_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $p \in \bar{\tau}$, то $e \in \mathrm{cl}\, P_x$ для всех $x \in G$. Так как (G, τ) — левотопологическая группа, то $x \in \mathrm{cl}\, xP_x$.

Положим $X = \bigcup \{ A_{n-1} : n \in \mathbb{N} \}$ и зафиксируем произвольное разбиение множества $\mathbb{N} = \bigcup \{ N_n : n \in \mathbb{N} \}$ бесконечными подмножествами N_n. Обозначим $D_i = \bigcup \{ A_{n-1} : n \in \mathbb{N}_i \}$. Ввиду (1) $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Ввиду (2) каждое подмножество D_i плотно в X. Следовательно, X — $\aleph_0$-разложимое подпространство группы (G, τ). Так как пространство левотопологической группы однородно, то (G, τ) $\aleph_0$-разложима.

Пусть $G = \otimes \{ G_n : n \in \mathbb{N} \}$ — прямое произведение групп G_n, e_n — единица группы G_n. Элемент g группы G запишем в виде вектора $g = (g_1, \ldots, g_n, \ldots)$, где $g_n \in G_n$ и $g_n = e_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного их числа. Положим $pr_n g = g_n$, $e = (e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ — единица группы G. Обозначим через $\min g$ и $\max g$ номера первой и последней неединичной координаты элемента $g \in G$, $g \neq e$. Для подмножества $A \subset G$ положим $\max A = \{ \max g : g \in A \}$. Для ультрафильтра p на группе G обозначим через $\max p$ ультрафильтр на $\mathbb{N}$ с базой $\{ \max P : P \in p \}$. Для подмножества $X \subset \beta G$ положим $\max X = = \{ \max p : p \in X \}$.

Допустим, что все сомножители G_n прямого произведения $G = = \otimes \{ G_n : n \in \mathbb{N} \}$ являются конечными группами. Обозначим $U_n = \{ g \in \in G : \min g > n \}$, τ_0 — фильтр на группе G с базой $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$. Так как (G, τ_0) — предкомпактная топологическая группа, то полугруппа $\bar{\tau}_0$ содержит все идемпотенты полугруппы βG [9] (следствие 7.2). Это замечание используется при доказательстве леммы 2.3.

2.2. **Лемма.** *Пусть* $G = \otimes \{ G_n : n \in \mathbb{N} \}$ *— прямое произведение конечных групп* G_n. *Пусть* τ *— фильтр на группе* G *такой, что* $g\bar{\tau} \cap \bar{\tau} = \varnothing$ *для всех* $g \in G$, $g \neq e$. *Если множество* $\max \tau^*$ *бесконечно, то существует простой ультрафильтр* $p \in \tau^*$.

Доказательство. Выберем ультрафильтры $p_n \in \tau^*$, $n \in \mathbb{N}$, так, чтобы все ультрафильтры $\max p_n \in \max \tau^*$ были различными. Пусть p — предельная точка множества $X = \{ p_n : n \in \mathbb{N} \}$. Можно считать, что $\max p_n \neq \max p$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что p — простой ультрафильтр. Допустим противное: $p = qr$, $q, r \in G^*$. Положим $Y = (G \setminus \{ e \})r$. Тогда $p \in \mathrm{cl}\, X \cap \mathrm{cl}\, Y$. Так как пространство βG экстремально несвязно, а подмножества X, Y счетны, то, по лемме Фролика [21], $X \cap \mathrm{cl}\, Y \neq \varnothing$ либо $Y \cap \mathrm{cl}\, X \neq \varnothing$.

В первом случае $p_n = sr$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $s \in \beta G$. Так как $p_n \in G^*$ и все группы G_n конечны, то $\max p_n = \max r = \max qr = \max p$. Получено противоречие с выбором ультрафильтра p.

Во втором случае выберем различные элементы $x, y \in G \setminus \{ e \}$ такие, что

$xr, yr \in \operatorname{cl} X$. Так как $\operatorname{cl} X \subset \overline{\tau}$, то $xr, yr \in \overline{\tau}$ и $\overline{\tau} \cap yx^{-1}\overline{\tau} \neq \varnothing$, что противоречит условию леммы.

Свободный ультрафильтр p на множестве $\mathbb{N}$ называется P-точкой в пространстве $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigcup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$, $A_i \notin p$, существует подмножество $A \in p$ такое, что $|A \cap A_i| < \aleph_0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Мы используем это определение в следующей эквивалентной форме. Для любого отображения $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ справедлива следующая альтернатива:

а) существует такое подмножество $A \in p$, что подмножество $f(A)$ одноэлементно;

в) существует такое подмножество $B \in p$, что сужение отображения f на B имеет конечные прообразы точек.

Несложно найти P-точку в $\mathbb{N}^*$, используя некоторые дополнительные к ZFC теоретико-множественные предположения, например аксиому Мартина. Однако, согласно теореме Шелаха [22], существуют модели ZFC без P-точек в $\mathbb{N}^*$.

2.3. **Лемма.** *Пусть* $G = \otimes\{ G_n : n \in \mathbb{N} \}$ *— прямое произведение конечных групп,* $m \in \mathbb{N}$ *и* $g^m = e$ *для всех* $g \in G$. *Пусть* τ *— фильтр на группе* G *такой, что* (G, τ) *— топологическая группа. Предположим, для любого ультрафильтра* $q \in \tau^*$ *существуют ультрафильтры* $r \in \tau_0^*$, $t \in \tau^*$ *такие, что* $q = rt$. *Тогда* $\max p$ *—* P*-точка в* $\mathbb{N}^*$ *для любого* $p \in \tau^*$.

Доказательство. Возьмем произвольный ультрафильтр $p \in \tau^*$. Для $n \in \mathbb{N}$, $P \in p$ положим

$$X(n, P) = \{ g \in G : \min g > n,\ \max g \in \max P \}.$$

Рассмотрим фильтр μ на группе G с базой $\{ X(n, P) : n \in \mathbb{N},\ P \in p \}$. Тогда (G, μ) — левотопологическая группа [10] (теорема 3.8).

Обозначим через ρ фильтр на группе G с базой $\{ U \cap V : U \in \tau,\ V \in \mu \}$. Очевидно, что (G, ρ) — левотопологическая группа. Поскольку множество $S = \{ q \in \tau^* : \max q = \max p \}$ является левым идеалом полугруппы τ^*, то S содержит некоторый идемпотент r. Так как $r \in \tau_0^*$, то $r \in \mu^*$. Следовательно, $r \in \rho^*$ и множество ρ^* непусто. Заметим, что $\max q = \max p$ для всех $q \in \rho^*$.

Зафиксируем произвольное отображение $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Предположим вначале, что существуют $q \in \rho^*$, $Q \in q$ такие, что $f(\max x) \le \min x$ для всех $x \in Q$. Согласно условию леммы, $q = rt$ для некоторых $r \in \tau_0^*$, $t \in \tau^*$. Так как $q, r \in \tau_0^*$, то $t \in \tau_0^*$. Пользуясь соотношением $q = rt$, выберем $g \in G$, $T \in t$ так, чтобы $gT \subset Q$ и $\max g < \min y$ для всех $y \in T$. Тогда $f(\max y) \le \min g$ для всех $y \in T$. Положим $T_i = \{ y \in T : f(\max y) = i \}$, $i \le \min g$. Так как $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{\min g}$, то $T_j \in t$ для некоторого $j \le \min g$. Следовательно, отображение f постоянно на множестве $\max T_j \in \max p$.

Допустим, что для каждого ультрафильтра $q \in \rho^*$ найдется подмножество Q_q, удовлетворяющее условию $f(\max x) > \min x$ для всех $x \in Q_q$. Положим $U' = \bigcup \{ Q_q : q \in \rho^* \}$, $U = U' \cup \{ e \}$. Ясно, что $U \in \rho$. Выберем $V \in \tau$, $X(n, P) \in \mu$ так, чтобы $V \cap X(n, P) \subset U$. Подберем $W \in \tau$ так, что $WW \ldots W \subset V$ с m сомножителями в левой части. Положим $A = W \cap X(n, P)$ и покажем, что сужение отображения f на множество $\max A$ имеет конечные прообразы точек. Допустим противное. Выберем $k \in \mathbb{N}$ и элементы $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ из A так, чтобы

$$f(\max a_i) = k, \quad \max a_i < \max a_j, \quad i < j.$$

Выберем индексы $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$ так, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ и

$$pr_j a_{i_1} = pr_j a_{i_2} = \ldots = pr_j a_{i_m}, \quad j \le k.$$

Положим $b = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$. По условию леммы, $x^m = e$ для всех $x \in G$. Следовательно, $\min b > k$. Так как $\max b = \max a_{i_m}$, то $b \in U$ и $f(\max b) > > \min b$. Но тогда $f(\max a_{i_m}) > k$ — противоречие.

Итак, мы доказали, что для ультрафильтра $\max p$ и отображения f справедлива альтернатива а), в) из определения P-точки.

2.4. **Лемма.** *Пусть* $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ *— семейство групп порядка* 2, $B = = \otimes \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ *— булева группа. Пусть* τ *— фильтр на группе* B *такой, что* (B, τ) *—* $\aleph_0$*-неразложимая топологическая группа. Тогда множество* $\max \tau^*$ *конечно и ультрафильтр* $\max p$ *является* P*-точкой в* $\mathbb{N}^*$ *для любого* $p \in \tau^*$.

Доказательство. Предположим, что множество $\max \tau^*$ бесконечно. По лемме 2.2 существует простой ультрафильтр $q \in \tau^*$. Так как q — правосократимый ультрафильтр, в силу леммы 2.1 группа (G, τ) $\aleph_0$-разложима. Следовательно, множество $\max \tau^*$ конечно.

Возьмем произвольный ультрафильтр $p \in \tau^*$. Согласно лемме 2.1, p не является правосократимым. Значит, $p = rp$ для некоторого идемпотента $r \in B^*$. Так как $r \in \tau_0^*$, то, согласно лемме 2.3, ультрафильтр $\max p$ является P-точкой в пространстве $\mathbb{N}^*$.

2.5. **Теорема.** *Если существует* $\aleph_0$*-неразложимая топологическая абелева группа* (G, τ) *то существует* P*-точка в пространстве* $\mathbb{N}^*$.

Доказательство. Ввиду [3] группа (G, τ) содержит счетную открытую булеву подгруппу B. Так как (G, τ) — $\aleph_0$-неразложима, то B также $\aleph_0$-неразложима и применима лемма 2.4.

3. О σ-дискретности субмаксимальных групп. Пусть γ — ординал, $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — семейство групп, e_α — единица группы G_α. Отличный от единицы e элемент группы $G = \otimes \{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ однозначно записывается в виде

$$g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \cdots g_{\alpha_n}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n, \quad g_{\alpha_1} \ne e_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_n} \ne e_{\alpha_n}.$$

Обозначим $\operatorname{supp} g = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Тогда подмножество $G \setminus \{e\}$ группы G разбивается на подмножества

$$X_n = \{g \in G : |\operatorname{supp} g| = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.1. **Лемма.** *Пусть* H *— подгруппа прямого произведения* $G = \otimes \{G_\alpha : \alpha < < \gamma\}$ *счетных групп* G_α. *Пусть* τ *— фильтр на группе* H *такой, что* (H, τ) *— неразложимая левотопологическая группа. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

а) *группа* (H, τ) *имеет счетную открытую подгруппу*;

в) *подмножество* $X_n \cap H$ *нигде не плотно в* (H, τ) *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В силу теоремы 1.4 полугруппа τ^* содержит ультрафильтр p с базой из открытых подмножеств. Будем считать, что p — ультрафильтр на группе G и $H \in p$. Для каждого $\alpha < \gamma$ обозначим через $pr_\alpha p$ ультрафильтр на группе G_α с базой $\{pr_\alpha P: P \in p\}$. Так как p — идемпотент полугруппы βG, то $pr_\alpha p$ — идемпотент полугруппы βG_α. Заметим, что главный ультрафильтр q на G_α является идемпотентом полугруппы βG_α тогда и только тогда, когда $q = e_\alpha$. Поэтому для любого элемента $x \in G_\alpha$, $x \neq e_\alpha$, найдется такое подмножество $P_x \in p$, что $x \notin pr_\alpha P_x$.

Для ультрафильтра p имеются следующие две возможности.

а) $X_m \in p$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Так как p — идемпотент полугруппы βG, то найдутся $g \in X_m \cap H$, $P \in p$, $P \subset X_m \cap H$ такие, что $gP \subset X_m$. Пусть $\operatorname{supp} g = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Выберем $P' \in p$, $P' \subset P$ так, чтобы $g_\alpha^{-1} \notin pr_\alpha P'$ для всех $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Тогда $pr_\alpha y \neq e_\alpha$ для всех $y \in gP'$ и $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Так как $gP' \subset X_m$, то $pr_\alpha y = e_\alpha$ для всех $y \in gP'$, $\alpha \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Значит, $gP' \subset G_{\alpha_1} \times \ldots \times G_{\alpha_m}$. Поскольку подмножество gP' левотопологической группы (H, τ) имеет непустую внутренность, то подгруппа $H \cap G_{\alpha_1} \times \ldots \times G_{\alpha_m}$ открыта в (H, τ).

в) $X_n \notin p$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольный элемент $g \in X_n \cap H$ и окрестность U единицы группы (H, τ). Пусть $\operatorname{supp} g = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $Y = \{x \in H: pr_\alpha x \neq e_\alpha$ для некоторого $\alpha \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}\}$. Так как $X_1 \cup \ldots \cup X_n \notin p$, то $Y \in p$. Выберем открытое подмножество $P \in p$, $P \subset Y \cap U$ так, чтобы $g_{\alpha_1}^{-1} \notin pr_{\alpha_1} P, \ldots, g_{\alpha_n}^{-1} \notin pr_{\alpha_n} P$. Тогда $pr_{\alpha_1} gx \neq e_{\alpha_1}, \ldots, pr_{\alpha_n} gx \neq e_{\alpha_n}$ для всех $x \in P$. Так как $P \subset Y$, то для любого элемента $x \in P$ найдется такой индекс $\alpha_x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, что $pr_{\alpha_x} gx \neq e_{\alpha_x}$. Значит, $gP \cap X_n = \varnothing$. Таким образом, в окрестности gU элемента $g \in X_n$ мы нашли открытое подмножество gP, непересекающееся с X_n, и лемма доказана.

3.2. **Теорема.** *Пусть группа H вложима в прямое произведение счетных групп, τ — фильтр на H такой, что (H, τ) — левотопологическая группа. Если (H, τ) неразложима, то ее пространство имеет первую категорию. Если (H, τ) субмаксимальна, то ее пространство представимо в виде объединения счетного числа дискретных замкнутых подмножеств.*

Доказательство. Пусть группа (H, τ) неразложима. Воспользуемся леммой 3.1. В случае а) выберем по представителю из каждого левого смежного класса группы (H, τ) по счетной открытой подгруппе. Получим разбиение (H, τ) на счетное число дискретных подмножеств. В случае в) искомое разбиение дают подмножества $\{e\}$, $\{X_n \cap H\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть группа (H, τ) субмаксимальна. Так как (H, τ) неразложима, то, согласно доказанному выше, существует ее разбиение на счетное число нигде не плотных подмножеств. В силу теоремы 1.2 из [6] каждое нигде не плотное подмножество субмаксимального пространства дискретно и замкнуто.

Поскольку каждая абелева группа вложима в прямое произведение счетных групп, из теоремы 3.2 вытекает такое следствие.

3.3. ***Следствие.*** *Пространство неразложимой левотопологической абелевой группы имеет первую категорию. Пространство субмаксимальной левотопологической абелевой группы σ-дискретно.*

1. *Comfort W. W., van Mill J.* Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **120**, № 3. – P. 687 – 696.

2. *Протасов И. В.* Абсолютно разложимые группы // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 383–392.
3. *Протасов И. В.* Разбиения прямых произведений групп // Там же. – 1997. – **49**, № 10. – С. 1385 –1395.
4. *Малыхин В. И.* Экстремально несвязные и близкие к ним группы // Докл. АН СССР. – 1975. – **220**, № 1. – С. 27–30.
5. *Зеленюк Е. Г., Протасов И. В.* Неразложимые и экстремально несвязные топологии на группах // Докл. НАН Украины. – 1997. – № 3. – С. 7–11.
6. *Archangel'skii A. V., Collins P. J.* On submaximal spaces // Topology Appl. – 1995. – **64**, № 3. – P. 219–241.
7. *Schröder J.* On sub-, pseudo-, and quasimaximal spaces // Eight Praque Topological Symp. 1996 (Abstracts). – Pt 2. – P.22.
8. *Protasov I. V., Tkačenko M. G., Tkachuk V. V., Wilson R. G., Yachenko I. V.* Almost all submaximal groups are σ-discrete. – Mexico, 1996. – 18 p. – (Preprint, UAM).
9. *Протасов И. В.* Ультрафильтры и топологии на группах // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 163–180.
10. *Протасов И. В.* Фильтры и топологии на полугруппах // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1994. – Вип. 3. – С. 15–28.
11. *Hindman N.* Ultrafilters and combinatorial number theory // Lect. Notes Math. – 1979. – **751**. – P.46–184.
12. *Hindman N.* Ultrafilters and Ramsey theory – an update // Ibid. – 1989. – **1401**. – P. 97–118.
13. *Hindman N.* The semigroup $\beta\mathbb{N}$ and its applications to number theory // Anal. and Topolog. Theory of Semigroups (K. Hofmann, J. Lawson, J. Pym, eds). Gruyter Exposition in Math. – 1990. – **1**. – P. 347–360.
14. *Hindman N.* Recent results on the algebraic structure of βS // Ann. N. Y. Acad. Sci. – 1995. – **767**. – P. 73–84.
15. *Hindman N.* Algebra in βS and its applications to Ramsey theory // Math Jap. – 1996. – **44**, № 3. – P. 581–625.
16. *Протасов И. В.* Идеалы полугруппы ультрафильтров топологической группы // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 506 –511.
17. *Елькин И. В.* Ультрафильтры и неразложимые пространства // Вестн. Моск. ун-та. – 1969. – № 5. – С. 51–56.
18. *Малыхин В. И.* Об экстремально несвязных топологических группах // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 6. – С. 59–66.
19. *Strauss D.* $\mathbb{N}^*$ does not contain an algebraic and topological copy of $\beta\mathbb{N}$ // J. London Math. Soc. – 1992. – **46**, № 3. – P. 463–470.
20. *Hindman N.* Minimal ideal and cancellation in $\beta\mathbb{N}$ // Semigroup Forum. – 1982. – **25**. – P. 291–340.
21. *Comfort W. W.* Ultrafilters: some old and some new results // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – **83**. – P. 417–455.
22. *Shelach S.* Proper forcing // Lect. Notes Math. – 1982. – **940**. – P. 75–214.

Получено 19.11.96