УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. IV *

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko in 1965, we analyze the applications to autonomous systems of differential equations and equations with pulse action.

Проаналізовано застосування чисельно-аналітичного методу, запропонованого А. М. Самойленком у 1965 р., до автономних систем диференціальних рівнянь та рівнянь з імпульсною дією.

Настоящая статья является четвертой частью работы [1 – 3], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, теорем, лемм, формул и т. д. Здесь продолжается исследование численно-аналитического метода, который для простоты будем называть одним словом „метод".

3.4. Абстрактная схема метода. В п. 1 работы [1] приведена одна возможная „операторная" интерпретация метода. Более того, в п. 2.1 [1], дав подходящую трактовку так называемому уравнению Ляпунова – Шмидта, нам удалось вскрыть определенные связи между численно-аналитическим методом и уравнением Ляпунова – Шмидта. (Во избежание недоразумений мы не случайно говорим об уравнении, а не о „методе" Ляпунова – Шмидта, ибо последнее понятие, как таковое, в известной нам литературе не упоминается).

Многочисленные разработки и применения численно-аналитического метода к разного класса краевым задачам делают, как нам кажется, полезным изложение общей схемы метода еще и в следующей абстрактной форме.

Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных вектор-функций $y\colon D \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_m) \to \operatorname{col}(y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))$, $D \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим через $K(D) \subset C(D)$ пространство функций $C(D)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$U(y) = \operatorname{col}(U_1(y), \ldots, U_n(y)) = 0. \tag{103}$$

Принимая во внимание, что основным назначением рассматриваемого нами метода является исследование решений краевых задач, назовем (103) абстрактным краевым условием. Очевидно, что, например, в случае периодических краевых условий $K(D)$ является пространством периодических функций.

Пусть $A\colon C(D) \to R_A$ — оператор с областью определения $D(A) = C(D)$ и областью значений $R_A = A\,C(D) \subset C(D)$ — задает уравнение

$$y = Ay. \tag{104}$$

Ставится задача решения уравнения (104), удовлетворяющего абстрактным краевым условиям (103), т. е. решения $y \in K(D)$.

Если бы A был оператором типа $A: K(D) \to K(D)$, то разрешимость уравнения (104) можно было бы изучать в пространстве $K(D)$, используя общие теоремы о неподвижных точках операторов.

Однако это невозможно в том общем случае, когда в R_A содержатся точки из $C(D) \setminus K(D)$. В такой ситуации следует наряду с (104) подходящим образом ввести в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$z = \tilde{A} z, \tag{105}$$

причем таким образом, чтобы

* Выполнена при частичной поддержке INTAS (грант N 96-0915), а также гранта OTKA TO 19095.

$$D_{\tilde{A}} = R_{\tilde{A}} = K(D).$$

Естественно, что операторы A, $\tilde{A}$ должны быть взаимосвязанными, а именно:

1) любое решение абстрактной краевой задачи (104), (103) является также решением и уравнения (105);

2) каждое решение $z \in K(D)$ уравнения (105), подчиненное некоторому дополнительному условию

$$Bz = 0, \tag{106}$$

заданному на решениях уравнения (105) и удовлетворяемому всеми решениями задачи (103), (104), является одновременно и решением исходной абстрактной задачи (104), (103).

Так как $\tilde{A} : K(D) \to K(D)$, то решения уравнения (105) при соответствующих условиях могут быть построены различными итерационными процессами, в частности методом последовательных приближений

$$z_{k+1} = \tilde{A} z_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где подходящее нулевое приближение z_0 имеет определенный произвол. Эта свобода выбора z_0 используется в численно-аналитическом методе для удовлетворения условия (106). В рассматриваемом методе для нахождения предельной функции $z^* = \lim_{k\to\infty} \tilde{A} z_k$ используется аналитический аппарат метода последовательных приближений типа Пикара, а для решения вспомогательного (алгебраического) уравнения (106) — численные методы.

Заметим, что в конкретном случае краевой задачи (104), (103) несложно построить как расширение оператора A — оператор $\tilde{A}$, так и оператор B (см., например, гл. I книги А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [4]).

Перейдем к изложению результатов, касающихся использования метода применительно к автономным системам дифференциальных уравнений и уравнениям с импульсным воздействием.

3.5. Автономные системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим случай, когда правая часть системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x, f \in \mathbb{R}^n,$$

не зависит от t. Тогда из основных уравнений метода (см. формулы (1), (2) из [1])

$$x(t, z) = z + \int_0^t f(s, x(s, z))\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s, z))\,ds, \tag{107}$$

$$\Delta(z) = \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s, z))\,ds = 0 \tag{108}$$

вытекает, что в автономном случае

$$x(t, z) = z, \quad \Delta(z) = f(z) = 0.$$

Таким образом, численно-аналитический метод, определенный соотношением (см. формулу (7) из [1])

$$x_m(t, z) = z + \int_0^t \left[f(s, x_{m-1}(s, z)) - \frac{t}{T}\int_0^T f(\tau, x_{m-1}(\tau, z))\,d\tau \right] ds,$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad x_0(t, z) = z,$$

„улавливает" только стационарные решения автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n; \\ x(0) = x(T). \end{cases} \tag{109}$$

В отличие от неавтономных систем, где период искомого решения известен заранее, в автономном случае помимо начальных условий периодического решения необходимо найти и его период T. Кроме того, в расширенном фазовом пространстве T-периодические решения $x = x(t)$ автономной системы (109) не будут изолированными. Последнее обстоятельство полностью исключает применимость теоремы об индексе.

Это подсказывает идею выделить по какому-нибудь признаку из всей серии гипотетических нетривиальных T-периодических решений $x = x(t+\varphi)$ одно конкретное решение $x = x_0(t)$, и именно к нему строить последовательные приближения. При этом естественно изменить и систему параметров, определяющих T-периодическое решение, и вместо вектора начальных значений $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ рассматривать вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, \mu)$. Здесь $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ — локальные координаты на гиперповерхности Γ коразмерности 1, „трансверсальной" к искомому решению (аналог сечения Пуанкаре), а $\mu = T/(2\pi)$ задает период T периодического решения.

Заметим, что в новых координатах из-за трансверсальности Γ начальные параметры $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, \mu$, вообще говоря, уже изолированы. Однако, поскольку *a priori* неизвестно даже существование периодического решения, выбор Γ неоднозначен и не очевиден.

В книге А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [5] для решения этой проблемы был предложен следующий подход. Очевидно, что любое периодическое решение пересекает каждое из множеств

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_i(x) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

де $f = \operatorname{col}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Если хотя бы одно из Γ_j есть гиперповерхность (в приложениях это, как правило, выполняется), то можно положить

$$\Gamma = \Gamma_j = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_0(c), \ c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) \in D_c\}.$$

Следующий этап состоит во введении замены переменных

$$x = \Phi(\theta, y); \quad \theta = \frac{t}{\mu} = t\frac{2\pi}{T}, \tag{110}$$

позволяющей изучать задачу (109) вблизи гипотетического решения $x = x_0(t)$. Функция $\Phi(\theta, y)$ 2π-периодична по первому аргументу и для каждого конкретного случая определяется информацией о системе (109) в первом приближении. Кроме того, функция

$$\Phi(\theta, y) \colon [0, 2\pi] \times D_1 \to D$$

удовлетворяет обычным требованиям к замене переменных, а именно, непрерывно дифференцируема по переменным θ, y и удовлетворяет условию $\det\left[\dfrac{\partial\Phi(\theta, y)}{\partial y}\right] \neq 0$.

После преобразования координат в момент $\theta = 0$ гиперповерхность Γ перейдет в поверхность

$$\overline{\Gamma} = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y = y_0(c)\},$$

где $x_0(c) = \Phi(0, y_0(c))$.

В результате замены (110) уравнение (109) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = F(\theta, y, \mu), \tag{111}$$

где $F(\theta, y, \mu) = \left[\frac{\partial\Phi(\theta, y)}{\partial y}\right]^{-1}\left[\mu f(\Phi(\theta, y)) - \frac{\partial\Phi(\theta, y)}{\partial y}\right]$.

Предположим, что схема метода позволяет найти 2π-периодическое решение $y = y^*(\theta, c^*, \mu^*) = \lim_{m\to\infty} y_m(\theta, c^*, \mu^*)$ уравнения (111), где

$$y_m(\theta, c, \mu) = y_0(c) + \int_0^\theta \Big[F(\theta, y_{m-1}(\theta, c, \mu), \mu) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(s, y_{m-1}(\theta, c, \mu), \mu)\, ds\Big] d\theta, \quad m = 1, 2, \ldots; \quad y_0(\theta, c, \mu) = y_0(c),$$

а (c^*, μ^*) — корень определяющего уравнения

$$\Delta(c, \mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\Big(\theta, y^*(\theta, c, \mu), \mu\Big) d\theta = 0.$$

Тогда функция

$$x = x^*(t) = \Phi\left(\frac{t}{\mu^*}, y^*\left(\frac{t}{\mu^*}, c^*, \mu^*\right)\right)$$

является нетривиальным периодическим с периодом $T^* = 2\pi\mu^*$ решением уравнения (109), причем $x^*(0) = x_0(c^*)$ и само $x^*(t)$ совпадает с гипотетическим решением $x = x_0(t)$. Очевидно, что $x = x^*(t + \varphi)$ задает однопараметрическое семейство решений уравнения (109).

Впервые численно-аналитическим методом автономные системы исследовались в работах Ле Лыонг Тая [6, 7], А. М. Самойленко, Ле Лыонг Тая [8] с использованием замены $x = \Phi(\theta, y) = e^{A\theta}y + f_0(\theta)$ в предположении, что *a priori* известно значение одной из координат искомого решения при $t = 0$.

***Задача* 11.** Указать классы автономных систем, которые после преобразования вида (110) допускают исследование численно-аналитическим методом.

3.6. Автономные системы с периодическим внешним воздействием. Установим сначала одно общее утверждение о разрешимости неавтономной периодической краевой задачи вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x(T), \quad x, f \in \mathbb{R}^n. \tag{112}$$

Определение 1 (условия Каратеодори). *Будем говорить, что заданная на множестве* $[0, T]\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *вектор-функция* $f(t, x)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, если:*

НК.1) *при каждом* $x\in\Omega$ *функция* $f(\cdot, x)$ *измерима;*

НК.2) *для почти всех* $t\in[0, T]$ *функция* $f(t, \cdot)$ *непрерывна;*

НК.3) *для всех* $x, y\in\Omega$ *и почти всех* $t\in[0, T]$ *имеют место покоординатные оценки*

$$|f(t, x)| \le m(t), \quad |f(t, x) - f(t, y)| \le L(t)|x - y|,$$

причем элементы вектора $m(t)$ *и матрицы* $L(t)$ *суммируемы на отрезке* $[0, T]$.

Будем считать также, что для области Ω *выполняется предположение*

НК.4) $\Omega_\beta := \{z \in \Omega:\ B(z,\beta) \subset \Omega\} \neq \varnothing$, *в котором символом* $B(z,\beta)$ *обозначается выпуклое множество тех* $x \in \mathbb{R}^n$, *для которых покоординатно* $|x - z| \leq \beta$, *где* $\beta = \max\limits_{t\in[0,T]} (Km)(t)$, K — *линейный интегральный оператор, определенный на (классах) суммируемых вектор-функций с помощью формулы*

$$(Kx)(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t x(s)\,ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T x(s)\,ds. \tag{113}$$

Здесь

$$|x| = |(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \mathrm{col}\,(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|),$$

$$\max_t |x(t)| = \mathrm{col}\,(\max_t |x_1(t)|, \ldots, \max_t |x_n(t)|).$$

Введем следующее линейное преобразование $\sim$ пространства суммируемых функций в себя

$$\tilde{x}(t) = \int\limits_0^t \left[x(s) - \frac{t}{T}\int\limits_0^T x(u)\,du\right] ds$$

и предупорядочение $\rhd$ конуса n-мерных векторов $x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$ с неотрицательными компонентами

$$x \rhd y \iff (\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}:\ x_i > y_i).$$

Теорема 20. *Предположим, что в уравнении* (112) *функция* $f(t,x)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори* НК.1 – НК.3, *причем относительно области* Ω *справедливо ограничение* НК.4. *Пусть спектральный радиус* $r(S) < 1$, *где* S — *композиция линейного интегрального оператора* (113) *с умножением на переменную матрицу* $L(t)$:

$$Sx = K(Lx). \tag{114}$$

Дополнительно предполагаем, что при некотором m *на границе* $\partial\Omega_1$ *некоторой подобласти* $\Omega_1 \subset \Omega$ *для соответствующей операторной функции (см.* (13) *в* [1])

$$\Delta_m(z) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x_m(s,z))\,ds \tag{115}$$

выполняется соотношение

$$|\Delta_m| \rhd \Theta_m(z), \quad z \in \partial\Omega_1, \tag{116}$$

где

$$\Theta_m(z) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T L(t)(I - S)^{-1} S^m \left|\tilde{f}(t,z)\right| dt.$$

Тогда если степень Лере – Шаудера $\deg(\Delta_m, \partial\Omega_1, 0) \neq 0$, *то существует, по крайней мере, одно решение* $x = x^*(t)$ *периодической краевой задачи* (112) *такое, что его начальное значение* $x^*(0) \in \Omega_1$.

Доказательство. Из условий теоремы, как это показано в лемме 17 и следствии 16 из работы M. Rontó, S. I. Trofimchuk [9], следует, что соответствующее краевой задаче (112) параметризованное интегральное уравнение (107) (см. (2) в [1]) имеет единственное решение для каждого $z \in \Omega_\beta$, и при этом на Ω_β задана однозначная непрерывная определяющая функция $\Delta(z)$ вида (108).

В силу сделанных предположений линейная деформация конечномерного векторного поля $\Delta_m(z)$ вида (115) в $\Delta(z)$

$$\Delta(\lambda, z) = \Delta_m(z) + \lambda[\Delta(z) - \Delta_m(z)], \quad \lambda \in [0, 1],$$

является невырожденной на $\partial\Omega_1$. Действительно, в противном случае найдутся такие $z_0 \in \partial\Omega_1$ и $\lambda_0 \in [0, 1]$, что

$$\Delta_m(z_0) = -\lambda_0[\Delta(z_0) - \Delta_m(z_0)].$$

Поскольку, согласно лемме 17 [9], справедлива оценка

$$|\Delta(z) - D_m(z)| \leq \Theta_m(z),$$

то в этом случае $|\Delta_m(z_0)| \leq |\Delta(z_0) - \Delta_m(z_0)| \leq \Theta_m(z_0)$, что противоречит неравенству (116). Это и завершает доказательство теоремы.

На основании теоремы 20 можно получить следующий результат, касающийся существования периодических решений возмущенных автономных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(t), \quad t \in [0, T], \quad x, f, g \in \mathbb{R}^n, \tag{117}$$

где функция $g(t)$ удовлетворяет условию $g(0) = g(T)$.

Теорема 21 ([9], теорема 24). *Предположим, что функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица* НК.3 *с матрицей L и непрерывно продолжается с Ω на $\mathbb{R}^n$ с той же матрицей Липшица (указанное продолжение обозначим символом $\check{f}$). Пусть имеет место неравенство*

$$T\lambda_{\max}(L) < q_0 = 3{,}4161306\ldots \tag{118}$$

и при каждом $z \in \partial\Omega$ равномерно для всех $h \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$|f(z)| \rhd \Theta_0 := \frac{1}{T} L \int_0^T (I - KL)^{-1} |\tilde{g}_h(t)|\, dt, \tag{119}$$

в котором по определению положим

$$g_h(t) := g(t + h),$$

где в правой части стоит обозначенное тем же символом периодическое продолжение функции $g(\cdot)$ на всю действительную ось.

Кроме того, предположим, что $f(\cdot)$ имеет в области Ω единственный нуль z_0 ненулевого топологического индекса

$$\operatorname{ind}(f, z_0) \neq 0.$$

Тогда уравнение (117) *имеет хотя бы одно T-периодическое решение.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что, не ограничивая общности, можно предположить выполненным тождество $\int_0^T g(t)\,dt \equiv 0$. В противном случае систему следует записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \frac{1}{T}\int_0^T g(s)\,ds + \left(g(t) - \frac{1}{T}\int_0^T g(s)\,ds\right).$$

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \check{f}(x) + g_h(x), \quad h \in [0, T]. \tag{120}$$

Выясним теперь вид построенных по нулевому приближению $x_0(t, z) = z$ нулевых определяющих функций $\check{\Delta}_0(z,h)$. Нетрудно заметить, что в наших условиях

$$\check{\Delta}_0(z,h) = \frac{1}{T}\int_0^T [\check{f}(z) + g_h(t)]dt = \check{f}(z) + \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt = \check{f}(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

причем при всех $z \in \partial\Omega$

$$\check{\Delta}(z,h) \equiv f(z) \quad \forall h \in [0, T].$$

Применим к T-периодической краевой задаче для уравнения (120) теорему 20 в случае, когда $m = 0$. Предположение (119) влечет выполнение на $\partial\Omega$ для уравнения (120) соотношения (116) при $m = 0$, где K и S — операторы вида (113), (114), ибо

$$\widetilde{f(z) + g} = \tilde{f}(z) + \tilde{g} = \tilde{g} \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Правая часть (116)

$$\frac{1}{T} L \int_0^T (I - S)^{-1} S^m |\tilde{g}_h(t)| dt$$

корректно определена в силу предположения (118), которое в данном случае эквивалентно неравенству

$$r(S) = \frac{T}{q_0} \lambda_{\max}(L) < 1$$

для оператора (114).

Поскольку $\check{\Delta}_0(z,h) \triangleright \Theta_0(z) \quad \forall z \in \partial\Omega$ и $\deg(\check{\Delta}_0(z,h), \partial\Omega, 0) = \operatorname{ind}(f, z_0) \neq$ $\neq 0$, то на основании теоремы 20 заключаем о существовании T-периодического решения $P(t, h)$ уравнения (120) такого, что $P(0, h) \in \Omega$.

Покажем, что $P(t, 0) : [0, T] \to \Omega$. В самом деле, если это не так, то для некоторого $h^* \in [0, T]$ должно выполняться включение $P(0, h^*) \in \partial\Omega$. Но так как $P(t, h^*)$ является T-периодическим решением уравнения (120) при $h = h^*$, то из этого следует, что $\Delta(P(0, h^*), h^*) = 0$. Последнее равенство приводит к противоречию нашему предположению. Далее, поскольку $P(t, 0) : [0, T] \to \Omega$ и $\check{f}(z) \equiv f(z) \quad \forall z \in \Omega$, то можно утверждать, что $P(t, 0)$ является периодическим решением уравнения (117). Доказательство теоремы завершено.

Пример 7. Рассмотрим задачу о 2π-периодических решениях уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \sin x = e(t), \quad t \in [0, 1], \quad x \in S^1 = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}, \tag{121}$$

где $\alpha > 0$, $e(t) \in L^1[0, 1]$. Уравнение (121) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -\alpha \sin x + e(t). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта система удовлетворяет условию Липшица НК.1 и условию подлинейного роста $|f(t, x)| \le L(t)|x| + g(t)$ с матрицей

$$L(t) = L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, спектральный радиус оператора (114)

$$r(S) = \frac{1}{q_0} \lambda_{\max}(L) = \frac{\sqrt{\alpha}}{q_0},$$

причем $r(S) < 1$, если только

$$\alpha < q_0^2 \approx 11{,}669948\ \ldots . \tag{122}$$

При таких условиях определяющая функция $\Delta(x, y)$ однозначно определена для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$. С помощью соответствующих вычислений получаем

$$\Delta_0(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\alpha \sin x + \bar{e} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \bar{e} := \frac{1}{T} \int_0^T e(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\Delta_0(x_0, y_0) = 0 \iff y_0 = 0 \wedge \sin x_0 = \frac{\bar{e}}{\alpha}.$$

Если $|\bar{e}| < \alpha$, то приближенное определяющее уравнение $\Delta_0(x, y) = 0$ имеет два различных корня в $S^1 \times \mathbb{R}$. Без ограничения общности можно положить, что $\bar{e} \ge 0$, и тогда два различных корня таковы:

$$x_1 = \arcsin \frac{\bar{e}}{\alpha}, \quad x_2 = \pi - \arcsin \frac{\bar{e}}{\alpha}.$$

Заметим, что выполнение неравенства $|\bar{e}| < \alpha$ также необходимо для существования решения уравнения (121). В этом можно убедиться, если проинтегрировать (121) на $[0, 1]$.

В дальнейшем будем рассматривать окрестность точки $(x_1, 0)$ (вторая точка $(x_2, 0)$ может быть изучена аналогичным образом). Прежде всего выберем Θ_0. Для этого оценим интеграл

$$L \int_0^1 (I - KL)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{e}| \end{pmatrix} dt,$$

где оператор K определен согласно (113)

$$(Kx)(t) = (1 - t) \int_0^t x(s)\, ds + t \int_t^1 x(s)\, ds.$$

Если $(I - KL)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{e}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{cases} \varphi_1 = K\varphi_2, \\ \varphi_2 = \alpha K \varphi_1 + |\tilde{e}|. \end{cases}$$

Непосредственным вычислением получаем $\varphi_2 = \alpha K^2 \varphi_2 + |\tilde{e}|$. Поэтому $\varphi_2 \leq \alpha |\varphi_2|_0 K^2 \cdot 1 + |\tilde{e}|$. Так как $\max_{t\in[0,1]} \left[K^2 \cdot 1 \right](t) = 1/6$, то $|\varphi_2|_0 \leq |\tilde{e}|_0 \dfrac{6}{6-\alpha}$, как только $\alpha < 6$.

Заметим, что мы ограничились здесь наиболее простыми оценками. При необходимости условие $\alpha < 6$ более тонкими оценками может быть ослаблено до (122).

Объединяя последие две формулы, находим

$$\varphi_2 \leq K^2 \cdot 1 |\tilde{e}|_0 \frac{6}{6-\alpha} + |\tilde{e}|.$$

Так как $\int\limits_0^1 K^2 \cdot 1\, dt = \dfrac{1}{10}$, то $\int\limits_0^1 \varphi_2(s)\, ds \leq |\tilde{e}|_0 \dfrac{0,6\alpha}{6-\alpha} + \int\limits_0^1 |\tilde{e}(s)|\, ds$.

Далее,

$$\int\limits_0^1 \varphi_1(s)\, ds = \int\limits_0^1 K\varphi_2\, ds \leq \int\limits_0^1 \left(\left[K^3 \cdot 1 \right] |\tilde{e}|_0 \frac{6}{6-\alpha} + K|\tilde{e}| \right) ds =$$

$$= \int\limits_0^1 K|\tilde{e}|\, ds + |\tilde{e}|_0 \frac{0,2\alpha}{6-\alpha},$$

поскольку $\int\limits_0^1 K^3 \cdot 1 = \dfrac{1}{30}$. В итоге получаем

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^1 |\tilde{e}|\, ds + |\tilde{e}|_0 \dfrac{0,6\alpha}{6-\alpha} \\ \int\limits_0^1 \alpha K |\tilde{e}|\, ds + |\tilde{e}|_0 \dfrac{0,2\alpha^2}{6-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Удобно выбрать область Ω в виде прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm\pi/2$, $y = \pm c$ $(c > 0)$. Очевидно, что неравенство $\Delta_0(x_0, y_0) \geq \Theta_0$ выполняется, если только

$$\begin{gathered} \alpha - \tilde{e} > \alpha \int\limits_0^1 K|\tilde{e}|\, ds + |\tilde{e}|_0 \frac{0,2\alpha^2}{6-\alpha}, \\ c > \int\limits_0^1 \alpha |\tilde{e}(s)|\, ds + |\tilde{e}|_0 \frac{0,6\alpha}{6-\alpha}. \end{gathered} \tag{123}$$

Более того,

$$\deg(\Delta_0(x,y), \partial\Omega, 0) = \operatorname{ind}(\Delta_0(x,y), (x_1, 0)) =$$

$$= \operatorname{sign}\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, все условия теоремы 21 выполнены. Поэтому, согласно этой теореме, уравнение (121) имеет, по крайней мере, одно периодическое решение с начальным значением при $t = 0$, лежащим в указанном прямоугольнике.

Рассмотрим частный случай уравнения (121). Положим, что $e(t) = \pi\cos\pi t$. Тогда $\tilde{e}(t) = \sin\pi t$, $|\tilde{e}|_0 = 1$, $\bar{e} = 0$. Можно проверить, что неравенство (123) выполняется, если только

$$\alpha < 4{,}81269\ \ldots, \quad c = \frac{0{,}6\alpha}{6-\alpha} + \frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, для периодического возмущения $e(t) = \pi\cos\pi t$ при всех $\alpha <$ $< 4{,}81269\ \ldots$ существует, по крайней мере, одно периодическое решение $x(t, \alpha)$ уравнения (121) такое, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}x(0,\alpha)\right| < \frac{0{,}6\alpha}{6-\alpha} + \frac{2}{\pi}, \quad |x(0,\alpha)| < \frac{\pi}{2}.$$

***Замечание* 8.** Сравним полученные нами оценки с условиями, фигурирующими в работе A. Granas, R. B. Guenther, J. W. Lee [10] (теорема 10.3). В цитируемой работе рассматривалось уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x)\frac{dx}{dt} + \alpha\sin x = e(t).$$

Условие (B) в упомянутой теореме 10.3 имеет вид

$$\alpha + \int_0^1 |e(t)|dt < \frac{\pi}{2}.$$

Это условие для уравнения (121), когда $e(t) = \pi\cos\pi t$, не выполняется. Таким образом, теорема 21 в определенной мере дополняет результаты работы [10].

3.7. Уравнения с импульсным воздействием. Впервые численно-аналитический метод к импульсным системам был применен в 1967 г. в работе А. М. Самойленко [11]. Точнее говоря, исследуемая система имела вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \dfrac{dx}{dt}\right), \quad x \neq x_0, \\[2ex] \Delta\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_0} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_0+} - \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_0} = \begin{cases} \varepsilon I\left(\dfrac{dx}{dt}\right), & \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_0+} \geq 0; \\[2ex] 0, & \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_0-} < 0, \end{cases} \end{cases}$$

и в современной классификации импульсных систем (см. монографию А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка [12] и книгу A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk [13]) ее бы отнесли к разрывным динамическим системам.

В [11], опираясь на алгоритм численно-аналитического метода, удалось обосновать применение метода усреднения к этой системе и построить аппроксимирующие решения. Анализируя дальнейшие применения метода к импульсным системам, мы отметим целостность и завершенность исследования [11]. Последующие приложения метода имели более формальный характер и давали условия его применимости к системам с импульсами в фиксированные (или, реже и не всегда вполне удачно, в нефиксированные) моменты времени.

Первой и наиболее важной в ряду этих работ следует считать статью Н. А. Перестюка, В. Н. Шовкопляса [14] (см. также 21 раздел книги [12] или раздел 4.3 монографии [13]). Несколько уточненная версия [14] также составляет содержание §16 монографии D. D. Bainov, P. S. Simeonov [15], в которой изучалось применение метода к периодической импульсной системе вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x); \quad t \neq t_i, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{124}$$

$$\Delta x\big|_{t_i} = H_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, p; \quad 0 < t_1 < \ldots < t_p < T, \tag{125}$$

$$x(0) = x(T). \tag{126}$$

При этом, как обычно, предполагается, что в компактной области Ω правые части (124), (125) непрерывны по совокупности переменных и липшицевы по переменной x:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \le K_0 \| x - y \|,$$

$$\| H_i(x) - H_i(y) \| \le K_i \| x - y \|, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad x, y \in \Omega,$$

а также существуют такие константы M_i и функция $m(t) \in L_1[0, T]$, что

$$\| H_i(x) \| \le M_i \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad \sup_{x \in \Omega} \| f(t,x) \| \le m(t).$$

Решение задачи (124) – (126) было найдено как предел следующей равномерно сходящейся последовательности функций

$$x_m(t, z) = z + \int_0^t \left[f(s, x_m(s,z)) - \overline{f H^{(m)}} \right] ds + \sum_{0 < t_i < t} H_i(x_m(t_i, z)), \tag{127}$$

$$x_0(t, z) \equiv z, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\overline{f H^{(m)}} = \frac{1}{T} \left[\int_0^T f(s, x_m(s,z)) ds + \sum_{i=1}^{p} H_i(x_m(t_i, z)) \right].$$

Была доказана следующая теорема.

Теорема 22. *Предположим, что* $m(t) \equiv M = M_i$ *и:*

I1) *существует непустое замкнутое множество* Ω_β, *принадлежащее* Ω *вместе со своей* $\beta = TM/2 + pM$ *окрестностью;*

I2) *выполнено неравенство*

$$\frac{K_0 T}{3} + p K_1 + \frac{p T K_0 K_1}{6} < 1. \tag{128}$$

Тогда если система (124) – (126) *имеет* T*-периодическое решение* $x = \varphi(t, z)$, *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $z \in \Omega_\beta$, *то решение является пределом равномерно сходящейся последовательности периодических функций*

$$\varphi(t, z) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, z) = x^*(t, z),$$

определяемых соотношением (127).

Замечание 9. На самом деле, в [12, 13] предполагались более жесткие условия: вместо β фигурировало $\beta' = TM/2 + 2pM$, а вместо неравенства (128) предполагалось

$$\frac{T K_0}{3} + 2 p K_1 + \frac{p T K_0 K_1}{3} < 1.$$

В книге [15] были проведены более аккуратные вычисления, что позволило ослабить требования к импульсной системе. Более точно, в [15] были предложены даже еще менее ограничительные соотношения

$$\beta'' = \frac{TM}{2} + MQ,$$

$$-1 + \frac{T K_0}{3} + Q K_1 < K_0 K_1 \left(\frac{TQ}{3} - S \right) < 1,$$

где

$$Q = \sup \left\{ \left(1 - \frac{t}{T}\right) i[0, t] + \frac{t}{T} i[t, T] : t \in [0, t] \right\},$$

$$S = \sup\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{0<\tau_k<t}\alpha(\tau_k)+\frac{t}{T}\sum_{t<\tau_k<T}\alpha(\tau_k):\ t\in[0,t]\right\}.$$

Теорема 22 позволила свести вопрос о существовании T-периодических решений к вопросу о нулях определяющей функции

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\left[\int_0^t f(s, x^*(s,z))\,ds+\sum_{i=1}^{p} H_i(x^*(t_i,z))\right].$$

Методы исследования определяющего уравнения $\Delta(z)=0$, приведенные в [12], ничем не отличаются от методов из [11] и работы А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [16] и мы не будем на этом останавливаться.

Как приложения указанной выше теоремы 22, в [12] были также рассмотрены скалярные импульсные системы $(x\in\mathbb{R})$ в стандартной по Н. Н. Боголюбову форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t,x);\quad t\neq t_i,\quad 0\le t\le T, \tag{129}$$

$$\Delta x\Big|_{t_i} = \varepsilon H_i(x),\quad i=1,2,\dots,p;\ \ 0<t_1<\dots<t_p<T. \tag{130}$$

Теорема 23. *Пусть правые части T-периодической импульсной системы* (129), (130) *удовлетворяют тем же требованиям, что и в системе* (124), (125). *Если усредненная система*

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f_0(y) \equiv \frac{\varepsilon}{T}\left[\int_0^T f(s,y)\,ds+\sum_{i=1}^{p} H_i(y)\right]$$

имеет изолированное положение равновесия $y=y_0$, $f_0(y_0)=0$, и индекс отображения $f_0(y)$ в точке y_0 отличен от нуля, то система уравнений (129), (130) *при достаточно малых значениях параметра ε имеет T-периодическое решение $x=\varphi(t,\varepsilon)$ такое, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(t,\varepsilon)=y_0$.*

В итерационном соотношении (127) легко заметить определенную „несимметричность” вследствие некоторого пренебрежения к „исправлению” импульсной части. Действительно, в (127) корректируется только подынтегральная функция. Следует ожидать, что предположив, в соответствии с общей идеей метода (см. п. 3.4), новую модификацию метода, где такая „несимметричность” исчезает, мы иногда сможем улучшить сходимость метода. Результаты статьи Е. П. Трофимчук [17] показали справедливость таких предположений.

В [17] для отыскания решений задачи (124) – (126) была составлена рекуррентная последовательность функций $x_m(t,z)$, также удовлетворяющих краевому условию (126):

$$x_{m+1}(t,z) = z+\int_0^T\left[f(s,x_m(s,z)-K_0\,\widetilde{fH^{(m)}}\right]ds\ +$$

$$+\sum_{0<t_i<t}\left[H_i(x_m(t_i,z))-K_i\widetilde{fH^{(m)}}\right],\quad m=0,1,\dots,\quad x_0(t,z)\equiv z, \tag{131}$$

где среднее $\widetilde{fH^{(m)}}$ определялось с учетом весовых коэффициентов таким образом:

$$\widetilde{fH^{(m)}} = \frac{1}{\tau}\left[\int_0^T f(s,x_m(s,z))\,ds+\sum_{i=1}^{p} H_i(x_m(t_i,z))\right]$$

при $\tau = K_0 T + K_1 + \dots + K_p$. (Мы предполагаем, что константы K_i не равны нулю одновременно. В противном случае задача становится тривиальной.)

Как видно, правая часть (131) уже имеет указанное свойство симметрии. Кроме того, реализация на практике итерационного процесса (131), по сути, не сложнее, чем схемы (127), так как в обоих случаях основные вспомогательные вычисления — подсчет средних $\widetilde{fH^{(m)}}$ и $\overline{fH^m}$ — одинаковы.

Введем в рассмотрение кусочно-непрерывную функцию $M(t): I \to \mathbb{R}_+$:

$$M(t) = \left[\frac{1-\left(K_0 t + \sum\limits_{t_i<t} K_i\right)}{\tau}\right]\left[\int\limits_0^T m(u)du + \sum_{t_i<t} M_i\right] +$$

$$+ \left[\frac{K_0 t + \sum\limits_{t_i<t} K_i}{\tau}\right]\left[\int\limits_t^T m(u)du + \sum_{t_i<t} M_i\right].$$

Пусть $\beta^* = \sup_{t\in I} M(t)$, ($\beta^* \le \int_0^T m(u)du + \sum_i M_i$, так как $(a-x)y + x(b-y) \le ab$ при произвольных $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$). Предположим, что множество Ω_{β^*} непусто. При $z \in \Omega_{\beta^*}$ функции $x_m(t,z) \in \Omega$, поскольку

$$\|x_m(t,z) - z\| \le M(t) \le \beta^*. \tag{132}$$

Перед тем, как сформулировать результат, касающийся сходимости схемы (131), введем следующие обозначения:

$$\alpha_1^*(t) = \left[1 - \frac{\left(K_0 t + \sum\limits_{t_i<t} K_i\right)}{\tau}\right]\left(K_0 t + \sum_{t_i<t} K_i\right) \le \frac{\tau}{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^p \max\left\{0, \left[2\left(K_0 t_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_j\right) - \tau + \frac{2}{3}K_i\right]K_i^2\right\} \le \sum_{j=1}^p K_j^2.$$

Теорема 24. *Пусть множество Ω_{β^*} непусто и выполнено неравенство $q = \tau/3 + \gamma < 1$. Тогда интегральное уравнение, соответствующее формуле (131), в рассматриваемой области имеет единственное решение $x^*(t,z)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений (131). При этом верны оценки*

$$\left\|x^*(t,z) - x_m(t,z)\right\| \le \beta^*\left[q\alpha_1^*(t) + \gamma\right]q^{m-2}(1-q)^{-1}, \quad m \ge 2,$$

$$\left\|x^*(t,z) - z\right\| \le M(t) \le \beta^*,$$

$$\left\|x^*(t,z) - x_1(t,z)\right\| \le \min\left\{2\beta^*, \beta^*(q\alpha_1^*(t)+\gamma)(1-q)^{-1}\right\}.$$

Функция $x^*(t,z^*)$ будет решением краевой задачи (124)–(126), как только непрерывная функция

$$\Delta^*(z) = \frac{K_0}{\tau}\left[\int\limits_0^T f(s, x^*(s,z))ds + \sum_{i=1}^p H_i(x^*(t_i,z))\right]$$

обратится в нуль в точке $z = z^*$.

Интересно отметить, что соображения, аналогичные приведенным выше [17], позднее и независимо развивались А. М. Самойленко и Ю. В. Теплинским в монографии [18]. Там была рассмотрена периодическая задача управления импульсными системами, что требовало рассмотрения интегрального уравнения вида

$$x(t,z) = z + \int_0^t [\, f(s, x(s,z) - u_1 \,]\, ds + \sum_{0<t_i<t} [\, H_i(x(s,z) - u_2 \,]. \tag{133}$$

При этом рассматривались варианты „импульсного управления" при

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{p}\left[\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds + \sum_{i=1}^{p} H_i(x(t_i,z))\right],$$

„дифференциального управления", когда

$$u_1 = \frac{1}{T}\left[\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds + \sum_{i=1}^{p} H_i(x(t_i,z))\right], \quad u_2 = 0,$$

и „смешанного управления", когда

$$u_1 = \frac{1}{T}\left[\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds + \sum_{i=1}^{p} H_i(x(t_i,z))\right],$$

$$u_2 = \frac{1}{p}\left[\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds + \sum_{i=1}^{p} H_i(x(t_i,z))\right],$$

Очевидно, первые два варианта могут быть применены к отысканию T-периодического решения импульсной системы. Это было проделано в [18] опять-таки при условии управления дифференциальной частью. Стоит отметить, что при этом получены и несколько менее точные оценки сходимости. Например, вместо (128) предполагалось

$$\frac{K_0 T}{2} + 2pK_1 < 1, \quad K_0 = K_1.$$

Работа [18] является также единственной, где использовались симметричные свойства импульсной системы. Сформулируем следующий результат.

Теорема 25. *Пусть T-периодическая система уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon f(t,x); \quad t \neq t_i, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \Delta x\big|_{t_i} = \varepsilon H(t)\big|_{t_i}, \quad i \in Z, \end{cases}$$

такова, что $H(-t) = -H(t)$, $f(t,x) = -f(-t,x)$ *и на отрезке* $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ *импульсные моменты расположены симметрично относительно нуля.*

Тогда любая точка $z \in \Omega_\beta$ является начальным значением T-периодического решения этой системы.

Отметим, что применение метода к исследованию импульсных систем с нефиксированными моментами импульсного воздействия обосновывается в монографии [12]. Эта работа указывает на возможность такого применения, однако важная техническая лемма 21.3 из [12] содержит некоторые погрешности, как и соответствующие положения в статье S. G. Hristova, D. D. Bainov [19], и мы не будем останавливаться поэтому на этих результатах.

***Задача* 12.** Исправить неточность в лемме 21.3 работы [12] для систем с фиксированными моментами импульсного воздействия вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x),$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x).$$

Среди других работ на эту тему следует указать также статьи М. У. Ахметова [20], а также М. У. Ахметова и Н. А. Перестюка [21]. В [21] метод применялся к исследованию периодической импульсной системы вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x, y), \quad t \neq t_i,$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i} = Bx + I_i^{(1)}(x,y), \quad \Delta y\Big|_{t=t_i} = I_i^{(2)}(x,y),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, A, B — вещественные $(n \times n)$-матрицы и $\det(E+B) \neq$ $\neq 0$. Полученные в [21] результаты дополняют и обобщают исследования [14].

Отметим также работы S. G. Hristova, D. D. Bainov [19, 22, 23]. В [19] задача (124), (125) исследуется численно-аналитическим методом при двухточечных краевых условиях

$$Ax(0) + Cx(T) = d, \quad A, C \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det(C) \neq 0.$$

При этом рассматриваются как системы с фиксированными, так и нефиксированными моментами импульсного воздействия. На неточность леммы [19] в случае нефиксированных моментов импульсного воздействия мы уже указывали. В [23] рассматривается импульсная система с запаздыванием вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i} = I_i(x(t_i)),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, последовательность точек $\{t_i \in \mathbb{R},\ t_{i+1} > t_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, фиксирована. В [23] указаны условия, при которых к этой задаче может быть применен метод отыскания периодических решений, использующий и объединяющий идеи численно-аналитического метода и метода Галеркина. Одновременно с работами [19, 22, 23] была также опубликована и статья G. H. Sarafova, D. D. Bainov [24], в которой метод применялся для исследования периодических решений импульсной системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f\Big(t, x, \int_0^t \varphi(t,s,x(s))\,ds\Big), \quad t \neq t_i(x),$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i(x)} = I_i(x), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

При этом теоремы существования были доказаны для случаев $t = t_i$ и $t = t_i(x)$.

Отметим и статьи С. С. Гулька [25], Р. Н. Бутрис [26], также рассматривающие применение идей метода к интегро-дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием. Так, первая часть [26] посвящена отысканию периодических решений нелинейных (глобально липшицевых в области своего определения) систем дифференциально-операторных уравнений с импульсным воздействием вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, Ax), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x\Big|_{t = t_i} = I_i(x, Ax).$$

Ее автор следует, в основном, идеям [14]. Стоит отметить, что оператор A при этом подчиняется весьма жестким ограничениям, например,

$$(Ax)(t) = (Ax)(t+\tau), \quad \|(Ax)(t) - (Ay)(t)\| \leq q\|x(t) - y(t)\|.$$

Этот недостаток частично устранен во второй части этой же работы [26], где аналогичным образом проведено исследование системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \int\limits_{a(t)}^{b(t)} g(s, x(s))\, ds), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x\Big|_{t = t_i} = I_i(x, \int\limits_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(s, x(s))\, ds)$$

с периодическими функциями $a(t)$ и $b(t)$.

В статье [25] комбинация идей метода с использованием результатов работы К. В. Цидыло, С. С. Гулька [27] позволила доказать, при определенных условиях, существование единственного T-периодического решения системы

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds + \sum_{0 < s_j < t} I_j(x(s_j - 0)) \right), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x\Big|_{t = t_i} = I_i(x), \quad i, j = 0, 1, \ldots .$$

Отметим, наконец, что результаты [11] были обобщены в статье А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка [28].

***Задача* 13.** Обосновать метод для задачи (124) – (126) в случае, когда в соответствующих условиях Липшица вместо констант K_0, K_i фигурируют матрицы.

1. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №1. – С. 93 – 108.
2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Там же. – №2. – С. 225 – 243.
3. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Там же. – №7. – С. 960 – 979.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
6. *Ле Лыонг Тай.* Численно-аналитический метод исследования автономных систем дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, №3. – С. 309 – 317.
7. *Ле Лионг Тай.* Чисельно-аналітичний метод для автономних систем з малим збуренням // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 1978. – Вип. 20. – С. 66 – 72.
8. *Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай.* Численно-аналитический метод для автономных систем с малым возмущением // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, №3. – С. 214 – 220.
9. *Rontó M., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for nonlinear differential equations. – Miskolc, 1996. – 19 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; 96-01).
10. *Granas A., Guenther R. B., Lee J. W.* Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems // J. math. pures et appl. – 1991. – **70**, №2. – P. 153 – 196.

11. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, №5. – С. 96 – 104.
12. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
13. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – **14**. – 462 p.
14. *Перестюк Н. А., Шовкопляс В. Н.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, №5. – С. 517 – 524.
15. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Impulsive differential equations: periodic solutions and applications. – Longman Sci. and Techn., Pitman Monographs, 1993. – 228 p.
16. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
17. *Трофимчук С. И.* Исследование численно-аналитическим методом с улучшенной сходимостью решений краевой задачи для импульсной системы // Асимптотические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 32 – 37.
18. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
19. *Hristova S. G., Bainov D. D.* Numerical-analytic method for finding the solution of a boundary-value problem for a system of differential equations with impulses // Math. Rep. Toyama Univ. – 1987. – **10**. – С. 1 – 22.
20. *Ахметов М. У.* Периодические решения некоторых систем дифференциальных уравнений // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка. – 1982. – Вип. 24, – С. 3 – 7.
21. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* Периодические решения систем с импульсным воздействием // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. – №1. – С. 13 – 17.
22. *Hristova S. G., Bainov D. D.* Numerical-analytic method for finding periodic solutions of nonlinear systems of difference-differential equations with impulses // Computing. – 1987. – **38**. – P. 363 – 368.
23. *Hristova S. G., Bainov D. D.* A projection-iterrative method for finding periodic solutions of nonlinear systems of difference-differential equations with impulses // J. Approxim. Theory. – 1987. – **49**, №4. – P. 311 – 320.
24. *Sarafova S. G., Bainov D. D.* Periodic solutions of nonlinear integro-differential equations with an impulse effect // Period. math. hung. – 1987. – **18**. – №2. – P. 99 – 113.
25. *Гулька С. С.* Один достаточный признак существования периодических решений нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 32 – 37.
26. *Бутрис Р. Н.* Периодические решения нелинейных систем операторно-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №9. – С. 1260 – 1264.
27. *Цидыло К. В., Гулька С. С.* О периодических решениях нелинейных систем с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – №10. – С. 21 – 23.
28. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* О методе усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, №3. – С. 411 – 418.

Получено 14.08.98