УДК 517.9

**С. Тадзима** (Ниигата ун-т, Япония)

# ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАМЕ И ФАЗА БУСЛАЕВА

The perturbed Lamé equation with one gap potential is investigated. An explicit form of the geometric phase which is contained in the leading term of series of an asymptotic solution is obtained.

Досліджується збурене рівняння Ламе з 1-зонним потенціалом. Одержано явний опис геометричної фази, що міститься у старшому члені ряду асимптотичного розв'язку.

**Введение.** В 1984 г. В. С. Буслаев [1] исследовал возмущенное уравнение Хилла, для которого он построил асимптотическое решение методом двухмасштабных разложений. Старший член ряда решения от точек поворота содержит фазовый множитель. Эту фазу можно интерпретировать как геометрическую фазу Белла [2]. В недавних работах В. С. Буслаева и Л. А. Дмитриева [3, 4] применяли свои результаты к исследованию явления Ванье – Штарка.

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) + \varepsilon u\right)\psi(u,\varepsilon) = E_0\psi(u,\varepsilon), \qquad -\infty < u < +\infty,$$

где $E_0$ — вещественная постоянная, $\varepsilon$ — достаточно малый параметр, $\wp(u)$ — пэ-функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_3$, причем $\omega_1$ — действительное, а $\omega_3$ — мнимое число.

Функция $\wp(u+\omega_3)$ — вещественнозначная периодическая. Поэтому рассматриваемое уравнение можно трактовать как возмущенное уравнение Шредингера с периодическим вещественным потенциалом, причем при отсутствии возмущения (если параметр $\varepsilon$ равен нулю) это уравнение совпадает с уравнением Ламе.

Использовав способ Буслаева, построим асимптотическое решение и вычислим геометрическую фазу в явном виде.

**Предварительные сведения.** Напомним кратко ряд фактов, относящихся к уравнению Ламе вида

$$-\frac{d^2}{du^2}\psi + \wp(u+\omega_3)\psi = E\psi \tag{1}$$

на комплексной плоскости, где $E$ — комплексная постоянная.

Обозначим через $\zeta(u)$ дзета-функция Вейерштрасса и положим

$$E = E(z) = -\wp(z),$$
$$\chi = \zeta(u+\omega_3+z) - \zeta(u+\omega_3) - \zeta(z),$$

где $z$ — комплексный параметр.

Поскольку $\wp(u) = -\zeta'(u)$ и

$$\zeta(\alpha+\beta) - \zeta(\alpha) - \zeta(\beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(\alpha)-\wp'(\beta)}{\wp(\alpha)-\wp(\beta)}\right),$$

$$\wp(\alpha+\beta) + \wp(\alpha) + \wp(\beta) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(\alpha)-\wp'(\beta)}{\wp(\alpha)-\wp(\beta)}\right)^2,$$

то несложно показать, что

$$\chi^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u+\omega_3)-\wp'(z)}{\wp(u+\omega_3)-\wp(z)}\right)^2$$

и

$$\frac{d\chi}{du} = -\wp(u+\omega_3+z) + \wp(u+\omega_3) =$$
$$= -\wp(u+\omega_3+z) - \wp(u+\omega_3) - \wp(z) + 2\wp(u+\omega_3) + \wp(z) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u+\omega_3)-\wp'(z)}{\wp(u+\omega_3)-\wp(z)}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + \wp(z).$$

Отсюда находим

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{du} = 2\wp(u+\omega_3) + \wp(z),$$

т. е. функция $\chi$ удовлетворяет уравнению Риккати вида

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{du} - 2\wp(u+\omega_3) + E = 0,$$

где $E = E(z) = -\wp(z)$.

Теперь нетрудно убедиться, что

$$-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) - E = -\left(\frac{d}{du}+\chi\right)\left(\frac{d}{du}-\chi\right).$$

Обозначим через $\sigma(u)$ сигма-функцию Вейерштрасса. Положим

$$\psi(u,z) = e^{-\zeta(z)u}\frac{\sigma(u+\omega_3+z)}{\sigma(z)\sigma(u+\omega_3)}. \tag{2}$$

Из соотношения $\zeta(z) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ следует

$$\frac{d}{du}\ln\psi(u,z) = \zeta(u+\omega_3+z) - \zeta(u+\omega_3) - \zeta(z) = \chi,$$

т. е. функция $\psi$ удовлетворяет уравнению Ламе.

Легко видеть, что функция $\psi$ имеет следующее свойство:

$$\psi(u+2\omega_1, z) = e^{-2\zeta(z)\omega_1 + 2\zeta(\omega_1)z}\psi(u,z).$$

Поэтому положим

$$k = k(z) = \frac{i}{\omega_1}(\zeta(z)\omega_1 - \zeta(\omega_1)z), \tag{3}$$

$$b(u,z) = e^{-\zeta(\omega_1)zu/\omega_1}\frac{\sigma(u+\omega_3+z)}{\sigma(z)\sigma(u+\omega_3)}. \tag{4}$$

Тогда множитель $b(u,z)$ — периодическая функция с периодом $2\omega_1$ по переменной $u$.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

**Лемма 1.** 1. *Решение* $\psi(u,\pm z)$ *уравнения Ламе представимо в виде*

$$\psi(u,\pm z) = e^{ik(\pm z)u}b(u,\pm z).$$

2. *Множитель* $b(u,z)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} - 2ik(z)\frac{d}{du} + k^2(z) + 2\wp(u+\omega_3) + \wp(z)\right)b(u,z) = 0. \tag{5}$$

Функцию $b(u,z)$ в дальнейшем будем называть блоховским множителем. Обозначим

$$e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_3 = \wp(\omega_3), \quad e_2 = \wp(\omega_1+\omega_3). \tag{6}$$

Тогда уравнение Ламе при всех $E$, кроме $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$, имеет два линейно независимых решения $\psi(u, z)$ и $\psi(u, -z)$.

Пусть

$$F_1 = \{ z|\ 0 < \mathrm{Re}(z) \le \omega_1,\ \mathrm{Im}(z) = 0 \},$$
$$F_2 = \{ z|\ 0 \le \mathrm{Re}(z) \le \omega_1,\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(\omega_3) \},$$
$$J_1 = \{ z|\ \mathrm{Re}(z) = \omega_1,\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(\omega_3) \},$$
$$J_2 = \{ z|\ \mathrm{Re}(z) = 0,\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(\omega_3) \}.$$

Тогда

$$E(F_1) = (-\infty, e_1], \quad E(F_2) = [-e_2, -e_3],$$
$$E(J_1) = (-e_1, -e_2), \quad E(J_2) = (-e_3, \infty).$$

Далее, если мы рассматриваем уравнение Ламе на вещественной оси, то оно совпадает с уравнением Шредингера, а интервалы $(-e_1, -e_2)$, $(-e_3, \infty)$ образуют непрерывный спектр этого уравнения.

**Адиабатическая связность — способ Буслаева.** Рассмотрим дифференциальное уравнение Шредингера

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) + \varepsilon u - E_0\right)\psi(u, \varepsilon) = 0, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{7}$$

где $\varepsilon$ — малый параметр, $E_0$ — произвольная вещественная постоянная.

Использовав метод двухмасштабного разложения, вычислим в явном виде старший член асимптотического решения уравнения (7).

Считая $u$, $r = \varepsilon u$ независимыми переменными, рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\left(-\left(\frac{\partial}{\partial u} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + r - E_0\right) f(u, r, \varepsilon) = 0, \tag{8}$$

где $f$ следует считать периодической функцией от $u$.

Если в решении $f(u, r, \varepsilon)$ положить $r = \varepsilon u$, то оно окажется решением исходного уравнения, т. е. $f(u, r, \varepsilon)\big|_{r=\varepsilon u} = \psi(u, \varepsilon)$.

Формальное решение уравнения (7) ищем в виде

$$f(u, r, \varepsilon) = e^{iS(r)/\varepsilon} a(u, r, \varepsilon), \tag{9}$$

где $a(u, r, \varepsilon) = a_0(u, r) + \varepsilon a_1(u, r) + \varepsilon^2 a_2(u, r) + \ldots$, причем $a_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, следует считать периодическими функциями от $u$.

Подставляя (9) в уравнение (7), имеем

$$\left(L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2\right) a(u, r, \varepsilon) = 0, \tag{10}$$

где

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2i\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + r - E_0,$$
$$L_1 = -2\frac{\partial^2}{\partial u \partial r} - 2i\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial^2 S}{\partial r^2},$$
$$L_2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

После подстановки в уравнение (10) ряда

$$a(u, r, \varepsilon) = a_0(u, r) + \varepsilon a_1(u, r) + \varepsilon^2 a_2(u, r) + \ldots$$

получаем систему

$$L_0 a_0(u, r) = 0,$$
$$L_0 a_1(u, r) = -L_1 a_0(u, r),$$
$$L_0 a_{j+2}(u, r) = -L_1 a_{j+1}(u, r) - L_2 a_j(u, r), \quad j \geq 0.$$

В частности, имеем

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2i\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + r - E_0\right) a_0(u, r) = 0. \qquad (11)$$

Сопоставляя уравнение (11) и уравнение (5) для блоховского множителя $b(u, z)$, с учетом [1] положим

$$r = E_0 + \wp(z), \qquad k(z) = \frac{\partial S}{\partial r}(r). \qquad (12)$$

Первое из соотношений (12) позволяет определить $r$ как функцию от $z$, после чего второе равенство определяет с точностью до постоянной вид функции $S(r(z))$. В дальнейшем мы используем переменную $z$, так как она более удобна для описания решений, чем переменная $r$.

Определим формальный ряд

$$b(u, z, \varepsilon) = b_0(u, z) + \varepsilon b_1(u, z) + \varepsilon^2 b_2(u, z) + \ldots$$

из равенств

$$b(u, z, \varepsilon) = a(u, E_0 + \wp(z), \varepsilon).$$

Тогда для членов ряда $b(u, z, \varepsilon)$ имеем систему

$$M_0(b_0(u, z)) = 0, \qquad M_0(b_1(u, z)) = -M_1(b_0(u, z)), \qquad (13)$$

где

$$M_0 = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2ik(z)\frac{\partial}{\partial u} + k^2(z) + 2\wp(u+\omega_3) + \wp(z),$$

$$M_1 = \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^{-1}\left(-2\frac{\partial^2}{\partial u \partial z} - 2ik(z)\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial k}{\partial z}(z)\right).$$

Решение $b_0(u, z)$ уравнения (13) определено с точностью до множителя $N(z)$.

Положим

$$b_0(u, z) = N(z) b(u, z).$$

Определим функцию $N(z)$ в явном виде. Предположим, что уравнение

$$M_0(b_1(u, z)) = -M_1(b_0(u, z)) \qquad (14)$$

разрешимо в классе периодических функций. Условие разрешимости уравнения (14) относительно $b_1(u, z)$ имеет вид

$$\int_0^{2\omega_1} b(u, -z) M_1(N(z) b(u, z))\, du = 0. \qquad (15)$$

Условие (15), в свою очередь, приводит к линейному дифференциальному уравнению первого порядка относительно $N(z)$:

$$\frac{\partial N}{\partial z}(z) + \left( \frac{\left\langle b(u,-z), \dfrac{\partial b}{\partial z}(u,z) \right\rangle}{\langle b(u,-z), b(u,z) \rangle} + \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 E / \partial z^2}{\partial E / \partial z} - \frac{\partial^2 k / \partial z^2}{\partial k / \partial z} \right) \right) N(z) = 0, \quad (16)$$

где

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\omega_1} f(u) g(u)\, du.$$

Решение $N(z)$ уравнения (16) ищем в виде

$$N(z) = \left( \frac{\partial E / \partial z}{\partial k / \partial z} \right)^{-1/2} U(z),$$

где для функции $U(z)$ справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1** [1]. *Функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dU}{dz}(z) + i\theta(z) U(z) = 0,$$

*где функция $\theta(z)$ имеет вид*

$$\theta(z) = -i \frac{\langle b(u,-z), \partial b(u,z) / \partial z \rangle}{\langle b(u,-z), b(u,z) \rangle}. \quad (17)$$

**Геометрическая фаза Буслаева.** Функция $\theta(z)$, определенная формулой (17), называется геометрической фазой Буслаева. Чтобы вычислить фазу Буслаева, достаточно вычислить интегралы

$$\langle b(u,-z), b(u,z) \rangle = \int_0^{2\omega_1} b(u,-z) b(u,z)\, du, \quad (18)$$

$$\left\langle b(u,-z), \frac{\partial b}{\partial z}(u,z) \right\rangle = \int_0^{2\omega_1} b(u,-z) \frac{\partial b}{\partial z}(u,z)\, du. \quad (19)$$

Рассмотрим сначала интеграл в (18). Из соотношения

$$\frac{\sigma(\alpha+\beta)\sigma(\alpha-\beta)}{\sigma^2(\alpha)\sigma^2(\beta)} = -(\wp(\alpha) - \wp(\beta))$$

получаем

$$\langle b(u,-z), b(u,z) \rangle = \int_0^{2\omega_1} b(u,-z) b(u,z)\, du =$$

$$= -\int_0^{2\omega_1} (\wp(u+\omega_3) - \wp(z))\, du = -\left[ \zeta(u+\omega_3) \right]_{u=0}^{u=2\omega_1} + 2\omega_1 \wp(z) =$$

$$= \zeta(\omega_3 + 2\omega_1) - \zeta(\omega_3) + 2\omega_1 \wp(z) = 2(\zeta(\omega_1) + \omega_1 \wp(z)).$$

Для вычисления интеграла в (19) нам нужна следующая лемма.

**Лемма 2.** *Справедливо равенство*

$$b(u,-z) \frac{\partial b}{\partial z}(u,z) =$$

$$= \left( \frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} u - \zeta(u+\omega_3) \right) (\wp(u+\omega_3) - \wp(z)) + \frac{1}{2}\left( \wp'(z) - \wp'(u+\omega_3) \right). \quad (20)$$

***Доказательство.*** Учитывая соотношения

$$\frac{\partial b}{\partial z}(u,z) = \frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} u b(u,z) + e^{\zeta(\omega_1) z u/\omega_1} \frac{\sigma'(u+\omega_3+z)}{\sigma(z)\sigma(u+\omega_3)} - e^{\zeta(\omega_1) z u/\omega_1} \frac{\sigma'(z)\sigma(u+\omega_3+z)}{\sigma^2(z)\sigma(u+\omega_3)} =$$

$$= \left(-\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} u + \zeta(u+\omega_3+z) - \zeta(z)\right) b(u,z),$$

находим

$$b(u,-z)\frac{\partial b}{\partial z}(u,z) = \left(-\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} u + \zeta(u+\omega_3+z) - \zeta(z)\right) b(u,-z) b(u,z) =$$

$$= \left(\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} u - \zeta(u+\omega_3+z) + \zeta(z)\right)(\wp(u+\omega_3) - \wp(z)).$$

Следовательно,

$$b(u,-z)\frac{\partial b}{\partial z}(u,z) =$$

$$= \left(\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} u - \zeta(u+\omega_3) - \frac{1}{2}\frac{\wp'(u+\omega_3) - \wp'(z)}{\wp'(u+\omega_3) - \wp'(z)}\right)(\wp(u+\omega_3) - \wp(z)).$$

Лемма доказана.

Учитывая равенство (29), получаем

$$\int_0^{2\omega_1} b(u,-z)\frac{\partial b}{\partial z}(u,z)\,du = \left(\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} I_1 - I_2 + I_3 + R\right), \tag{21}$$

где

$$I_1 = \int_0^{2\omega_1} u\,\wp(u+\omega_3)\,du,$$

$$I_2 = \int_0^{2\omega_1} \zeta(u+\omega_3)\wp(u+\omega_3)\,du,$$

$$I_3 = \int_0^{2\omega_1} \zeta(u+\omega_3)\,du$$

и

$$R = -\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1}\wp(z)\int_0^{2\omega_1} u\,du - \omega_1\wp'(z) = -2\omega_1\zeta(\omega_1)\wp(z) + \omega_1\wp'(z).$$

Несложно доказать следующую лемму.

**Лемма 3.** *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} I_1 &= I_3 - 2\omega_1\zeta(2\omega_1+\omega_3), \\ I_2 &= -\zeta(\omega_1)(\zeta(2\omega_1+\omega_3)+\zeta(\omega_3)), \\ I_3 &= 2\omega_1(\zeta(\omega_1)+\zeta(\omega_3)) + 2\pi i. \end{aligned} \tag{22}$$

Принимая во внимание (22), вычислим интеграл в (19).

Имеем

$$\int_0^{2\omega_1} b(u,-z)\frac{\partial b}{\partial z}(u,z)\,du =$$

$$= \left(2\zeta(\omega_3) + \frac{2\pi i}{\omega_1}\right)(\zeta(\omega_1) + \omega_1\wp(z)) + 2\omega_1\zeta(\omega_1)\wp(z) - 2\omega_1\zeta(\omega_1)\wp(z) + \omega_1\wp'(z) =$$

$$= \left(2\zeta(\omega_3) + \frac{2\pi i}{\omega_1}\right)(\zeta(\omega_1) + \omega_1\wp(z)) + \omega_1\wp'(z).$$

Таким образом, установлен следующий результат.

**Теорема 2.** *Пусть* $r = \varepsilon u = E_0 + \wp(z)$, $\dfrac{\partial S}{\partial r}(r) = k(z)$ ($z = z(r)$ — *обратимая функция*);

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) + \varepsilon u - E_0\right)\psi(u,\varepsilon) = 0.$$

*Если* $r \neq E_0 + e_1, E_0 + e_2, E_0 + e_3$, *то это уравнение имеет формальное решение*

$$\psi(u,\varepsilon) = f(u,r,\varepsilon)\big|_{r=\varepsilon u},$$

*где*

$$f(u,r,\varepsilon) = e^{iS(r)/\varepsilon} b(u,z(r),\varepsilon).$$

*Старший член ряда имеет вид* $e^{iS(r)/\varepsilon} b_0(u,z(r))$, *где*

$$b_0(u,z) = \exp\left(i\int\theta(z)\,dz\right)\left(\frac{\partial E/\partial z}{\partial k/\partial z}\right)^{-1/2} b(u,z),$$

$$i\theta(z) = \zeta(\omega_3) + \frac{\pi i}{\omega_1} + \frac{1}{2}\frac{\omega_1\wp'(z)}{\zeta(\omega_1) + \omega_1\wp(z)},$$

$$\left(\frac{\partial E/\partial z}{\partial k/\partial z}\right) = -i\frac{\omega_1\wp'(z)}{\zeta(\omega_1)+\omega_1\wp(z)}.$$

1. *Буслаев В. С.* Адиабатическое возмущение периодического потенциала // Теорет. и мат. физика. – 1984. – **58**. – С. 233–243.
2. *Berry M. V.* Quantul phase accompanying adiabatic changes // Proc. Roy. Soc. London A. – 1984. – **392**. – P. 45–57.
3. *Buslaev V. S., Dmitrieva L. A.* Geometric aspects of the Bloch electrons theory in external fields // Topological Phases in Quantum Theory (eds B. Markovski and S. I. Vinitsky). – World Sci., 1989. – P. 218–250.
4. *Буслаев В. С., Дмитриева Л. А.* Блоховский електрон во внешнем поле // Алгебра и анализ. – 1989. – **1**. – С. 1–29.
5. *Gulliot J. C., Ralston J., Trubowitz E.* Semi-classical asymptotics in solid state physics // Communs. Math. Phys. – 1988. – **116**. – P. 401–415.
6. *Hochstadt H.* On the determination of a Hill's equation from its spectrum // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1965. – **19**. – P. 353–362.

Получено 27.03.96