УДК 517.944

Н. Г. Хома (Терноп. акад. нар. госп-ва)

ЛІНІЙНА КРАЙОВА ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. II. КВАЗІЛІНІЙНА ЗАДАЧА

In three spaces, we find exact classical solutions of a boundary-value periodic problem $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. We study the boundary-value periodic problem for a quasilinear equation whose left-hand side is the d'Alembert operator and right-hand side is a nonlinear operator

В трьох просторах знайдені точні класичні розв'язки крайової періодичної задачі $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Вивчається крайова періодична задача для квазілінійного рівняння, ліва частина якого — оператор Даламбера, права частина — нелінійний оператор.

В роботах [1 – 3] розглядається крайова періодична задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

і вказуються конкретні простори функцій, в яких вона може бути розв'язана. Справедливе загальне твердження, що класичний розв'язок задачі (1) – (3) існує для кожної функції $g \in G_x \cap Q_{2\pi}^- \cap Q_T \cap H_{ab}$, де G_x — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по x; $Q_T = \{g: g(x, t) = g(x, t+T)\}$; $Q_{2\pi}^- = \{g: g(x, t) = g(x, t + 2\pi) = -g(-x, t)\}$, а простір H_{ab} для кожної функції $g \in C$ визначається умовами

$$g(x + a(y - b - \tau), b + \tau) + g(x - a(y - b - \tau), b + \tau) =$$
$$= -g(x + a(y - \tau), \tau) - g(x - a(y - \tau), \tau) \qquad \forall (x, y, \tau) \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

$$\int_{-T}^{0} d\tau \int_{0}^{b} (g(x + ay - ab, b + \tau) + g(x - ay + ab, b + \tau))\, dy = 0, \tag{5}$$

де b, T — дійсні числа, відмінні від нуля, $a \in \mathbb{Q}$, C — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$.

З урахуванням умов (4) в роботі [2] показано, що задача (1) – (3) може мати єдиний класичний розв'язок щонайменше в трьох просторах функцій, які визначаються такими співвідношеннями:

1) $b_1 = T_1 q$, $T_1 a q = (2p-1)\pi$, $(2p-1, aq) = 1$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$,

$$B_a^1 = \{g: g(x, t) = -g(-x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t + T_1)\};$$

2) $2b_2 = T_2(2s-1)$, $T_2 a(2s-1) = 2\pi(2p-1)$, $(2p-1, (2s-1)a) = 1$, $p \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$,

$$B_a^2 = \{g: g(x, t) = -g(-x, t) = g(x + 2\pi, t) = g(\pi - x, t + T_2/2) = g(x, t + T_2)\};$$

3) $2b_3 = T_3(2s-1)$, $T_3 a(2s-1) = 4\pi k$, $(4\pi k, (2s-1)a) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$,

$$B_a^3 = \{ g : g(x,t) = -g(-x,t) = g(x+2\pi, t) = g(x, t+T_3/2) \},$$

де запис $(k, m) = 1$ означає, що числа k і m — взаємно прості.

Відмітимо, що за допомогою формули

$$u(x,t) = \left(P_i^a g\right)(x,t,a,b_i) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_\tau^t \left(g(x+a(y-\tau),\tau) + g(x-a(y-\tau),\tau)\right)dy -$$

$$-\frac{1}{4}\int_t^{b_i} d\tau \int_\tau^t \left(g(x+a(y-\tau),\tau) + g(x-a(y-\tau),\tau)\right)dy \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{4a}\int_t^{b_i} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi,\tau)d\xi \qquad (6)$$

або

$$\left(P_i^a g\right)(x,t,a,b_i) = \int_0^{b_i} Q(\tau)d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi,\tau)d\xi, \quad i = 1, 2, 3,$$

де $Q(\tau) = 1/4a$, коли $0 \le \tau \le t$, $Q(\tau) = -1/4a$, коли $t < \tau \le b_i$, в роботах [1 – 3] доведено розв'язність задачі (1) – (3) лише у просторі B_a^1 і частково у B_a^i, $i = 2, 3$.

В даній роботі на основі закономірностей (4) – (6) знайдено точні розв'язки задачі (1) – (3) у просторах B_a^i, $i = 2, 3$, досліджено властивості операторів P_i^a.

Оскільки оператори P_i^a залежать від змінної x як від параметра, що визначається аргументом x функції $g(x,t)$, то зрозуміло, що властивості операторів P_i^a відносно x визначаються властивостями функції $g(x,t)$ за цією змінною.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1. *Якщо* $g \in C \cap B_a^i$, $i = 1, 2, 3$, *то внутрішній інтеграл*

$$h_b(x,\tau) = \int_0^b \left(g(x+ay-ab, b+\tau) + g(x-ay+ab, b+\tau)\right)dy$$

рівності (5) *при* $b = b_i$, $i = 1, 2, 3$, *тотожно дорівнює нулеві, тобто*

$$\int_0^{b_i} \left(g(x+ay-ab_i, b_i+\tau) + g(x-ay+ab_i, b_i+\tau)\right)dy \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (7)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція h_{b_i} має вигляд

$$h_{b_i}(x,\tau) = \int_{b_i}^0 \left(g(x+ay,\tau) + g(x-ay,\tau)\right)dy, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (8)$$

Оскільки в даному випадку $ab_i = (2p-1)\pi$, $i = 1, 2$, $ab_3 = 2\pi k$, $p, k \in \mathbb{Z}$, то, враховуючи періодичність функції $g(x,t)$ за змінними x і t і те, що $b_1 = T_1 q$, $2b_2 = T_2(2s-1)$, $2b_3 = T_3(2s-1)$, $q, s \in \mathbb{N}$, ліву частину рівності (7) для кожного з вказаних випадків запишемо так:

$$\int_0^{b_i} \left(g(x + ay + \pi, \tau + (i-1)T_i/2) + g(x - ay - \pi, \tau + (i-1)T_i/2)\right) dy, \qquad i = 1, 2,$$

$$\int_0^{b_3} \left(g(x + ay, \tau + T_3/2) + g(x - ay, \tau + T_3/2)\right) dy.$$

Нехай $g \in B_a^i$, $i = 1, 2, 3$. Тоді, враховуючи властивості функції g із просторів B_a^i, на основі останніх трьох записів переконуємось у справедливості зображення (8).

Тепер, зробивши відповідні заміни змінних, функцію h_{b_i} можна записати таким чином:

$$h_{b_i}(x, \tau) = \frac{1}{a} \int_{x+ab_i}^{x-ab_i} g(\xi, \tau) d\xi, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Звідси

$$h_{b_i}(x, \tau) = \frac{1}{a}\left(\int_{x+ab_i}^{ab_i} g(\xi, \tau) d\xi + \int_{ab_i}^{-ab_i} g(\xi, \tau) d\xi + \int_{-ab_i}^{x-ab_i} g(\xi, \tau) d\xi \right) =$$

$$= \int_x^0 g(\eta + ab_i, \tau) d\eta + \int_0^x g(\eta - ab_i, \tau) d\eta =$$

$$= \int_x^0 g(\eta + \pi, \tau) d\eta + \int_0^x g(\eta + \pi, \tau) d\eta \equiv 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Отже, теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $g \in C \cap B_a^i$, $i = 1, 2, 3$, *то для будь-якого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$\left(P_i^a g\right)(x, t + \alpha, a, b_i) =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_\tau^t \left(g(x + a(v - \tau), \tau + \alpha) + g(x - a(v - \tau), \tau + \alpha)\right) dv -$$

$$- \frac{1}{4} \int_t^{b_i} d\tau \int_\tau^t \left(g(x + a(v - \tau), \tau + \alpha) + g(x - a(v - \tau), \tau + \alpha)\right) dv, \qquad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Доведення. Справді, для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ і $g \in C$ виконується рівність

$$\left(P_i^a g\right)(x, t + \alpha, a, b_i) = \frac{1}{4} \int_0^\alpha d\tau \int_\tau^{t+\alpha} \left(g(x + a(y - \tau), \tau) + g(x - a(y - \tau), \tau)\right) dy +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_\alpha^{t+\alpha} d\tau \int_\tau^{t+\alpha} \left(g(x + a(y - \tau), \tau) + g(x - a(y - \tau), \tau)\right) dy -$$

$$- \frac{1}{4} \int_{t+\alpha}^{b_i} d\tau \int_\tau^{t+\alpha} \left(g(x + a(y - \tau), \tau) + g(x - a(y - \tau), \tau)\right) dy, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Тепер, виконуючи спочатку заміну змінної $\tau = \alpha + z$ у зовнішніх інтегралах, а потім заміну змінної $y = v + \alpha$ у внутрішніх інтегралах, одержуємо

$$\left(P_i^a g\right)(x, t+\alpha, a, b_i) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv + \frac{1}{4}\int_{0}^{t} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{t}^{b_i-\alpha} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv + \frac{1}{4}\int_{0}^{t} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{t}^{b_i} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv - \frac{1}{4}\int_{b_i}^{b_i-\alpha} dz \int_{z}^{t} \varphi(x, a(v-z), z+\alpha)\, dv \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{10}$$

де $\varphi(x, a(v-z), z+\alpha) = g(x+a(v-z), z+\alpha) + g(x-a(v-z), z+\alpha)$.

Перетворимо інтеграл I_4. Після заміни змінної $z = \tau + b_i$ маємо

$$I_4 = -\frac{1}{4}\int_{0}^{-\alpha} d\tau \int_{b_i+\tau}^{t} \varphi(x, a(v-b_i-\tau), b_i+\tau+\alpha)\, dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} d\tau \int_{\tau}^{t} \varphi(x, a(v-b_i-\tau), b_i+\tau+\alpha)\, dv +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} d\tau \int_{b_i+\tau}^{\tau} \varphi(x, a(v-b_i-\tau), b_i+\tau+\alpha)\, dv = I_5 + I_6.$$

Проводячи заміну змінної $v = \tau + y$ в інтегралі I_6, знаходимо

$$I_4 = I_5 + I_6 = I_5 +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} d\tau \int_{b_i}^{0} \left(g(x+a(y-b_i), b_i+\tau+\alpha) + g(x-a(y-b_i), b_i+\tau+\alpha)\right) dy. \tag{11}$$

Враховуючи (10) і (11), одержуємо таку рівність:

$$\left(P_i^a g\right)(x, t+\alpha, a, b_i) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} d\tau \int_{\tau}^{t} \big(g(x+a(v-\tau), \tau+\alpha) + g(x-a(v-\tau), \tau+\alpha) +$$

$$+ g(x+a(v-b_i-\tau), b_i+\tau+\alpha) + g(x-a(v-b_i-\tau), b_i+\tau+\alpha) \big)\, dv +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{0}^{t} d\tau \int_{\tau}^{t} \left(g(x+a(v-\tau), \tau+\alpha) + g(x-a(v-\tau), \tau+\alpha)\right) dv -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{t}^{b_i} d\tau \int_{\tau}^{t} \left(g(x+a(v-\tau), \tau+\alpha) + g(x-a(v-\tau), \tau+\alpha)\right) dv +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{0} d\tau \int_{b_i}^{0} \left(g(x+ay-ab_i, b_i+\tau+\alpha) + g(x-ay+ab_i, b_i+\tau+\alpha)\right) dy. \tag{12}$$

Тепер, враховуючи означення просторів B_a^i, $i = 1, 2, 3$, а також рівність (7) теореми 1, рівність (12) можна записати у вигляді (9), оскільки перший і останній інтеграли рівності (12) дорівнюють нулю.

Таким чином, теорему 2 доведено.

Позначимо через $L(X, Y)$ простір лінійних і обмежених відображень X в Y.

На основі проведених вище досліджень з урахуванням результатів робіт [1 – 3] можна сформулювати і довести остаточні результати.

Теорема 3. *Нехай* $g \in G_x \cap B_a^i$, $i = 1, 2, 3$. *Тоді*

$$P_i^a \in L\left(C \cap B_a^i, C^{1,1} \cap B_a^i\right), \qquad P_i^a \in L\left(G_x \cap B_a^i, C^{2,2} \cap B_a^i\right), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Доведення. Те, що оператор P_i^a переводить неперервну і обмежену функцію $g(x, t)$ в неперервно диференційовну, а кожну неперервно диференційовну в двічі неперервно диференційовну, доведено в роботі [1]. Залишається показати, що оператор P_i^a переводить простір B_a^i, $i = 1, 2, 3$, самого в себе. Доведення проводиться окремо для кожного простору. Наприклад, нехай $g \in B_a^1 = \{g : g(x, t) = -g(-x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t + T_1)\}$. На основі (6) і (9) одержуємо

$$\left(P_1^a g\right)(x, t, a, b_1) = \left(P_1^a g\right)(\pi - x, t, a, b_1) = -\left(P_1^a g\right)(-x, t, a, b_1) =$$
$$= \left(P_1^a g\right)(x, t + T_1, a, b_1).$$

Отже, $P_1^a : B_a^1 \to B_a^1$.

Аналогічно переконуємося, що $P_i^a : B_a^i \to B_a^i$, $i = 2, 3$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Для* $g \in G_x \cap B_a^i$ *і* $a \in \mathbb{Q}$ *функція* $u(x, t) = \left(P_i^a g\right)(x, t, a, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, *є єдиною функцією з простору* $C^{2,2} \cap B_a^i$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (1) – (3), *причому*

$$\|u(x, t)\|_C \le \frac{b_i^2}{4}\|g(x, t)\|_C, \tag{13}$$

$$\|u_t(x, t)\|_C \le \frac{b_i}{2}\|g(x, t)\|_C, \tag{14}$$

$$\|u_x(x, t)\|_C \le \frac{b_i}{2|a|}\|g(x, t)\|_C, \tag{15}$$

де $\|g(x, t)\|_C = \sup\left\{|g(x, t)|;\ (x, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 9 з роботи [3].

Як приклад застосування одержаних результатів дослідимо існування узагальненого (гладкого $u \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$) розв'язку квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x] \tag{16}$$

при таких крайових і періодичних умовах:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$u(x, t + T_i) = u(x, t), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Заданий оператор $F[u, u_t, u_x]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку ($u \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$) функцію $u(x, t)$ в неперервну скалярну функцію $F[u, u_t, u_x](x, t)$, визначену на $\mathbb{R}^2$.

За аналогією з розв'язком $u(x,t) = \left(P_i^a g\right)(x,t)$ лінійної крайової періодичної задачі (1) – (3), визначеним формулою (6), утворимо для $a = 1$ систему інтегральних рівнянь

$$u(x,t) = \int_0^{b_i} Q(\tau)d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[u,u_t,u_x](\xi,\tau)d\xi,$$

$$u_t(x,t) = \int_0^{b_i} Q(\tau) \sum_{k=0}^{1} F[u,u_t,u_x]\Big(x+(-1)^k(t-\tau),\tau\Big)d\tau, \tag{19}$$

$$u_x(x,t) = \int_0^{b_i} Q(\tau) \sum_{k=0}^{1} (-1)^k F[u,u_t,u_x]\Big(x+(-1)^k(t-\tau),\tau\Big)d\tau, \qquad i = 1,2,3.$$

Означення. *Неперервний розв'язок* (u, u_t, u_x), $u \in B_a^i$, $i = 1, 2, 3$, *системи інтегральних рівнянь* (19) *будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі* (1) – (3).

Використовуючи інтегральне зображення розв'язку (6) лінійної крайової періодичної задачі (1) – (3), на основі теореми 4 переконуємось у справедливості наступного твердження.

Теорема 5. *Нехай* $g \in B_a^i \cap C$, $i = 1, 2, 3$. *Тоді лінійна задача* (1) – (3) *має єдиний гладкий розв'язок, визначений формулою* (6), *для якого справедливі оцінки* (13) – (15).

Аналогічний результат справедливий і для квазілінійної задачі (16) – (18).

Теорема 6. *Нахай скалярна функція* $F[u,u_t,u_x](x,t) = f\big(x,t,u(x,t),u_t(x,t), u_x(x,t)\big)$ *задовольняє такі умови*:

1) $f\big(x,t,u(x,t),u_t(x,t),u_x(x,t)\big) \in C\Big(\mathbb{R}^2 \times \|u\|_C < \infty \times \|u_t\|_C < \infty \times \|u_x\|_C < \infty\Big)$;

2) $0 < \|F[0,0,0](x,t)\|_C = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'',u_t'',u_x''](x,t) - F[u',u_t',u_x'](x,t)| \le N_1|u''(x,t) - u'(x,t)| + N_2\big|u_t''(x,t) - u_t'(x,t)\big| + N_3\big|u_x''(x,t) - u_x'(x,t)\big|$;

4) $F[0,0,0](x,t) \in B_a^i, \quad i = 1,2,3$;

5) *для всіх* $u \in B_a^i \cap C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ *функція* $F[u,u_t,u_x](x,t) \in B_a^i \cap C(\mathbb{R}^2)$, $i = 1,2,3$.

Тоді при виконанні умови

$$\frac{b_i^2}{4}N_1 + \frac{b_i}{2}(N_2 + N_3) < 1, \qquad i = 1,2,3,$$

квазілінійна задача (16) – (18) *має єдиний гладкий розв'язок.*

Оскільки теорема 6 є узагальненням теореми 3 [4] для випадку $i = 2, 3$, то доведення теореми 6 співпадає з доведенням цієї теореми. На основі теореми 6 можна навести приклади функцій, для яких виконуються всі умови цієї теореми, що легко перевіряються [4].

1. *Хома Л. Г., Хома Н. Г.* Про властивості розв'язків однієї крайової задачі // Допов. НАН України. – 1994. – № 3. – С. 38–40.
2. *Хома Н. Г.* Простори розв'язків однієї крайової задачі // Там же. – 1996. – № 1. – С. 30–32.
3. *Хома Н. Г.* Лінійна крайова періодична задача для гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1537–1544.
4. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.

Одержано 04.11.97