УДК 517.9

А. С. Миненко (Ин-т пробл. искусствен. интеллекта НАН Украины, Донецк)

АНАЛИТИЧНОСТЬ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

We prove the solvability of a boundary-value problem if, on a free boundary, the Bernoulli condition is given as inequality. We establish the analyticity of free boundary.

Доведена розв'язність граничної задачі, коли на вільній границі задана умова Бернуллі у вигляді нерівності. Встановлена аналітичність вільної границі.

Исследуется нелинейная краевая задача, имеющая гидродинамическое происхождение, в случае, когда на свободной границе задается условие Бернулли в виде неравенства. Результаты, изложенные в этой работе, являются естественным продолжением результатов, полученных автором в [1 – 4] при изучении задачи типа Стефана и в [5] при изучении задачи типа Бернулли.

Проблеме разрешимости краевых задач со свободной границей и изучению свойств гладкости решений посвящено много работ. Укажем наиболее важные в этом смысле работы [6 – 10]. Байокки [8] редуцировал к эллиптическому вариационному неравенству задачу со свободной границей из теории фильтрации. На этом пути были получены теоремы существования и единственности обобщенных решений. Киндерлереру и Ниренбергу [7] удалось показать, что построенное методом вариационных неравенств обобщенное решение однофазной нестационарной задачи Стефана является на самом деле классическим решением. Альт и Каффарелли [9] изучали проблему минимума интегрального функционала с переменной областью интегрирования. Ими установлена гладкость свободной границы.

Основным результатом настоящей работы является доказательство аналитичности свободной границы. В основу доказательства положена методика, разработанная в [3, 11].

1. Постановка задачи. Пусть G — область, ограниченная снизу отрезком $B = (0 \le x \le a,\ y = 0)$, по бокам вертикалями $\Gamma_1 = (x = 0,\ 0 \le y \le c)$, $\Gamma_2 = (x = a,\ 0 \le y \le b)$ и сверху кривой $S\colon\ y = g(x),\ 0 \le x \le a$, где $c < b$, $g(0) = c$, $g(a) = b$ и $g(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция такая, что $g'(0) = 0$ и $g'(a) = 0$. Зададим в области G функцию, аналитическую по переменным x, y, непрерывную в $\overline{G}$ и такую, что $V(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \overline{G}$. Допустим также, что функция $V(x, y)$ при $(x, y) \in G$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \le 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(y V^2(x, y)\right) \ge 0. \tag{1}$$

Далее, пусть γ — гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $G \bigcup S$. При этом одним концом γ является точка $(0, c)$, а другой лежит на вертикали Γ_2, разбивая ее на две части: верхнюю $\Gamma_{1\gamma}$ и нижнюю $\Gamma_{2\gamma}$, т. е. $\Gamma_2 = \Gamma_{1\gamma} \bigcup \Gamma_{2\gamma}$. Через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать область, ограниченную отрезком B, вертикалями Γ_1, $\Gamma_{2\gamma}$ и кривой γ.

Рассмотрим следующую задачу. В односвязной области G_γ требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$ по следующим условиям: функция $\psi(x, y)$ в области G_γ является классическим решением уравнения

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_y = \omega y, \qquad (x, y) \in G_\gamma, \qquad \omega = \text{const} > 0, \tag{2}$$

непрерывна в $\overline{G}_\gamma$ непрерывно дифференцируема в $\overline{G}_\gamma$ за исключением, может быть, угловых точек, и удовлетворяет условиям

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{3}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_{2\gamma}, \tag{4}$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \tag{5}$$

$$\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geq V^2(x, y) \cdot y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \tag{6}$$

причем на части γ, лежащей внутри G, в последнем условии всегда должно выполняться равенство.

В работе [5] установлена эквивалентность краевой задачи (2) – (6) проблеме минимума функционала

$$I(\psi, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} \left[\psi_x^2 + \psi_y^2 + V^2(x, y) y^2 + 2\omega y(\psi - 1)\right] \frac{dx\, dy}{y}$$

с неизвестной областью интегрирования G_γ на соответствующем множестве R допустимых пар (ψ, γ). Далее, пусть d — точная нижняя грань значений функционала $I(\psi, \gamma)$ на множестве R. Тогда аналогично тому, как это сделано в работе [5], доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (1) *и справедливы неравенства*

$$1 - \frac{\omega b^3}{3} > 0, \qquad V(x, y) < \frac{1}{c^2}\left[2 + \frac{\omega c^3}{3}\right], \qquad (x, y) \in G,$$

$$\omega \operatorname{mes} G + \frac{2a}{c^2}\left[1 - \frac{\omega c^3}{3}\right] < \int\limits_S V(x, y)\, ds.$$

Тогда существует пара (ψ, γ), *удовлетворяющая условиям:* $I(\psi, \gamma) = d$, γ — *монотонно возрастающая кривая, заданная уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq T$; *функция* $\psi(x, y)$ *является классическим решением задачи* (2) – (5), *а условие* (6) *на части* γ, *лежащей внутри* G, *выполняется почти всюду.*

Доказательство. Подробное доказательство леммы можно получить с помощью рассуждений, приведенных в [5] (теорема 1). Поэтому укажем основные моменты этих рассуждений.

В работе [5] изучена задача (2) – (6) в случае, когда $V(x, y) = \text{const} > 0$. Используя вариационный подход, там доказано существование пары (ψ, γ) такой, что

$$\psi(x, y) \in C\left(\overline{G}_\gamma\right), \qquad \psi(x, y) \in C^1\left(\overline{G}_\gamma \setminus \gamma\right) \cap C^2(G_\gamma)$$

и $I(\psi, \gamma) = d$, а $\psi(x, y)$ — решение задачи (2) – (5).

Относительно свободной границы γ на основе применения симметризации Штейнера с учетом условия (1) устанавливается, что γ является монотонно возрастающей кривой, заданной с помощью уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq$ $\leq t \leq T$ (см. [5], лемма 3).

Далее, в силу предположений леммы можно показать, что область G_γ не совпадает с G и все точки γ, за исключением точки $(0, c)$, лежат выше прямой $y = c$. Доказательство этого факта проводится аналогично тому, как это сделано в [5] (лемма 4).

Теперь, используя метод внутренних вариаций Шиффера [11], можно показать, что условие (6) на части γ, лежащей внутри G, выполняется почти всюду. Лемма доказана.

Настоящая статья посвящена доказательству аналитичности свободной границы γ. Схема доказательства следующая.

Рассматривается произвольная точка $z_0 = x_0 + iy_0 \in \gamma$, расположенная внутри G вместе с некоторым кругом K_r достаточно малого радиуса с центром в этой точке. С помощью методики работ [3, 11] устанавливается существование аналитической функции $g(t)$, $t = \xi + i\eta$ в области $G_\gamma \cap K_r$, которая непрерывна в этой области вплоть до границы γ и принимает на γ граничное значение $g(t) = \bar{t}$. Затем, обозначая через $w(t)$ конформное отображение $G_\gamma \cap \cap K_r$ на верхнюю полуплоскость, согласно принципу Шварца [12], функции $\Phi_1(t) = g(t) + \bar{t}$ и $\Phi_2(t) = g(t) - \bar{t}$ можно аналитически продолжить через те сегменты действительной оси w-плоскости, которые соответствуют γ. Поэтому функция

$$t(w) = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$$

также аналитически продолжима через эти сегменты, т. е. γ — аналитическая дуга.

Перейдем теперь к доказательству существования аналитической функции $g(t)$ которую можно рассматривать как решение некоторой системы функциональных уравнений. Такая система будет построена в следующем пункте, а ее разрешимость в классе аналитических функций доказывается в теореме 1.

2. Система функциональных уравнений для свободной границы γ. Обозначим через (ψ, γ) пару, построенную в лемме 1. Известно, что ψ является решением задачи (2) – (5), а γ — монотонная дуга, причем на части γ, лежащей внутри G, условие (6) выполняется почти всюду. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (2):

$$S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) = A(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) \log (z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) + B(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}),$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, $A(z, \bar{z}; z, \bar{z}) = 1$, функция B является регулярной в нуле по переменным x, y, а S, как функция этих переменных, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

Пусть Ω — область с кусочно-гладкой границей L, лежащая внутри G_γ. Применяя вторую формулу Грина к функциям $\psi(x, y)$ и $S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})$, получаем

$$\int_L \left(S\frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial S}{\partial n} \right) \frac{\partial s}{y} = 0, \qquad \zeta \in D_\gamma = G \setminus G_\gamma.$$

Далее, аналогично тому, как это было сделано в работе [11], продеформируем контур L (т. е. совершим предельный переход) таким образом, чтобы часть его лежала на γ_ρ, где γ_ρ — часть γ, лежащая внутри круга $K_\rho = (|z - z_0| < \rho, z_0 \in \gamma)$, а остальная часть находилась в $G_\gamma \cap K_\rho$. Тогда, учитывая, что условие (6) на γ_ρ выполняется почти всюду, получаем

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) ds = P(\zeta, \bar{\zeta}), \qquad \zeta = (\xi + i\eta) \in G_\gamma \cap K_\rho, \tag{7}$$

где

$$V(x, y) = V\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = \Psi(z, \bar{z}),$$

а через $P(\zeta, \bar{\zeta})$ обозначен интеграл, взятый вдоль той части L, которая лежит в G_γ после предельного перехода. Функции S и P являются аналитическими по вещественным аргументам ξ и η. Продолжим аналитически эти функции в область комплексных значений $\zeta = \alpha + i\beta$, $\eta = \delta + i\lambda$. Теперь соотношение (7) примет вид

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z,\bar z) S\big(z,\bar z;\zeta,\zeta^*\big)\,ds \;=\; P(\zeta,\zeta^*),$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta = \alpha + i\beta + i(\delta + i\lambda), \qquad \zeta^* = \xi - i\eta = \alpha + i\beta - i(\delta + i\lambda).$$

В последнем соотношении сделаем предельный переход, устремив $\bar\zeta^* \to z_0$ при фиксированном ζ. В результате получим

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z,\bar z) S(z,\bar z;\zeta,\bar z_0)\,ds \;=\; P(\zeta,\bar z_0), \qquad z_0 \in \gamma_\rho, \qquad \zeta \in G_\gamma \cap K_\rho. \tag{8}$$

Для подынтегральной функции $S = A\log(z-\zeta)(z-\bar z_0) + B$ необходимо выбрать ветвь логарифма, используемую для вычислений. Для этого проведем произвольную кривую от ζ к z_0, которая лежит в круге K_ρ и пересекает γ только в точке z_0. Вне разреза вдоль этой кривой $\log(z-\zeta)(\bar z-\bar z_0)$ есть однозначная функция. Ветвь логарифма выберем таким образом, чтобы аргумент в некоторой фиксированной точке $z_1 \in \gamma$ находился в $[0, 2\pi)$.

Для $\zeta \in G_\gamma \cap K_\rho$ определим аналитическую функцию следующим образом:

$$F(\zeta) \;=\; \int_{\gamma_\rho} \Psi(z,\bar z) S(z,\bar z;\zeta,\bar z_0)\,ds \;-\; P(\zeta,\bar z_0), \tag{9}$$

где для S выбирается ветвь логарифма, как и раньше. Функция $P(\zeta,\bar z_0)$ и интеграл

$$\int_{\gamma_\rho} B(z,\bar z;\zeta,\bar z_0)\,ds$$

непрерывны при переходе ζ через γ_ρ. С другой стороны, выражение

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z,\bar z) A(z,\bar z;\zeta,\bar z_0)\log(z-\zeta)(\bar z-\bar z_0)\,ds$$

имеет скачок, равный интегралу

$$-2\pi i \int_{z_0}^{t} \Psi(z,\bar z) A(z,\bar z;t,\bar z_0)\,ds,$$

взятому вдоль γ, когда ζ пересекает γ, двигаясь из D_γ в G_γ, в точке $t \in \in \gamma_\rho$. Функция $F(\zeta)$ имеет на γ граничное значение

$$F(t) \;=\; -2\pi i \int_{z_0}^{t} \Psi(z,\bar z) A(z,\bar z;t,\bar z_0)\,ds,$$

где интеграл вычисляется вдоль γ так, что s увеличивается, когда область G_γ остается слева.

Продифференцируем теперь выражения (8) и (9) по ζ. Тогда получим

$$\int_{\gamma_\rho} \Psi(z,\bar z) S_\zeta(z,\bar z;\zeta,\bar z_0)\,ds = P'_\zeta(\zeta,\bar z_0), \qquad \zeta \in G_\gamma \cap K_\rho, \tag{10}$$

$$F'(\zeta) = \int_{\gamma_\rho} \Psi(z,\bar z) S_\zeta(z,\bar z;\zeta,\bar z_0)\,ds - P'_\zeta(\zeta,\bar z_0), \tag{11}$$

где $\zeta \in D_\gamma \cap K_\rho$ и $S_\zeta = \dfrac{\partial S}{\partial \zeta} = \log(z-\zeta)(\bar z - \bar z_0)\dfrac{\partial A}{\partial \zeta} + \dfrac{A}{\zeta - z} + \dfrac{\partial B}{\partial \zeta}$.

Лемма 2. *Производная* $F'(\zeta)$ *ограничена всюду на* γ_ρ, *даже в тех точках, где* $\dot t$ *не существует.*

Доказательство. Функция $F'(\zeta)$ при переходе ζ через γ имеет скачок

$$-2\pi i \int_{z_0}^{t} \Psi(z,\bar z) A_t(z,\bar z;t,\bar z_0)\,ds - 2\pi i \Psi(z,\bar t;t,\bar z_0)\dot{\bar t}, \qquad t \in \gamma_\rho,$$

почти всюду на γ_ρ. Сравнивая теперь выражения (10) и (11), находим, что для почти всех $t \in \gamma_\rho$ функция $F'(t)$ имеет граничное значение

$$F'(t) = -2\pi i \Psi(t,\bar t) A(t,\bar t;t,\bar z_0)\dot{\bar t} - 2\pi i \int_{z_0}^{t} \Psi(z,\bar z) A_t(z,\bar z;t,\bar z_0)\,ds. \tag{12}$$

Для функции $F'(\zeta)$ справедливо соотношение

$$F'(\zeta) \stackrel{\cdot}{=} \varphi(\zeta) + 4\pi\delta(\zeta) A(\zeta,\bar\zeta;\zeta,\bar z_0)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta},$$

где $\varphi(\zeta)$ — непрерывная функция при переходе через γ, а $\delta(\zeta)$ — функция, равная единице в $G_\gamma \cap K_\rho$ и нулю в $D_\gamma \cap K_\rho$. Из последнего соотношения в силу ограниченности ψ_x, ψ_y в $G_\gamma \cap K_\rho$ [3] следует ограниченность $F'(\zeta)$ всюду на γ_ρ. Лемма доказана.

Представив соотношение (12) в виде

$$\dot{\bar t} = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t,\bar t) A(t,\bar t;t,\bar z_0)} - \int_{z_0}^{t} \frac{\Psi(z,\bar z) A_t(z,\bar z;t,\bar z_0)\dot{\bar z}}{\Psi(t,\bar t) A(t,\bar t;t,\bar z_0)}\,dz,$$

$$\bar t = \bar z_0 + \int_{z_0}^{t} \dot{\bar z}^2\,dz,$$

где

$$A(t,\bar t;t,\bar z_0) = \sqrt{\frac{t-\bar t}{t-\bar z_0}},$$

рассмотрим систему интегральных уравнений

$$f(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t,g(t)) A(t,g(t);t,\bar z_0)} - \int_{z_0}^{t} \frac{\Psi(z,g(z)) A_t(z,g(z);t,\bar z_0)}{\Psi(t,g(t)) A(t,g(t);t,\bar z_0)} f(z)\,dz, \tag{13}$$

$$g(t) = \bar z_0 + \int_{z_0}^{t} f^2(z)\,dz \tag{14}$$

для определения двух неизвестных аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$ в $G_\gamma \cap \cap (K_\rho + \gamma_\rho)$. Ниже будет доказана разрешимость этой системы в классе аналитических функций и установлена единственность этого решения. Тогда решения системы (13), (14) должны согласовываться с известным решением $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ на γ_ρ. Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть система* (13), (14) *имеет единственное решение* $f(t)$ *и* $g(t)$ *в классе аналитических функций. Тогда функция* $g(t)$ *имеет непрерывное граничное значение* $g(t)=\bar{t}$ *на* γ_ρ.

3. Разрешимость системы функциональных уравнений (13), (14). Справедлива такая теорема.

Теорема 1. *В окрестности каждой точки* $z_0 \in \gamma_\rho$, $z_0 \in G$ *существуют аналитические функции* $f(t)$ *и* $g(t)$, *являющиеся единственным решением системы* (13), (14).

Доказательство. Пусть $z_0 = (x_0 + i y_0) \in \gamma$ — внутренняя точка области G по переменным x, y. Положим $f_0(t) \equiv 0$ и определим $g_0(t)$ по формуле

$$g_0(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^{t} f_0^2(z)\,dz = \bar{z}_0.$$

Построим последовательность аналитических функций $f_n(t)$ и $g_n(t)$ следующим образом:

$$f_{n+1}(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, g_n(t)) A(t, g_n(t); t, \bar{z}_0)} -$$

$$-\int_{z_0}^{t} \frac{\Psi(z, g_n(z)) A_t(z, g_n(z); t, \bar{z}_0)}{\Psi(t, g_n(t)) A(t, g_n(t); t, \bar{z}_0)} f_n(z)\,dz, \tag{15}$$

$$g_{n+1}(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^{t} f_{n+1}^2(z)\,dz. \tag{16}$$

Пусть R — верхняя грань значений по модулю для

$$f_1(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, \bar{z}_0) A(t, \bar{z}_0; t, \bar{z}_0)}$$

в некоторой окрестности $t = z_0$. Эта верхняя грань существует, поскольку в силу леммы 2 $F'(t)$ ограничена в окрестности точки $t = z_0$, $A(z_0, \bar{z}_0; z_0, \bar{z}_0) = 1$ и $\Psi(z, \bar{z}_0) > 0$.

Предположим, что существует $\delta > 0$ такое, что справедливы соотношения

$$\begin{gathered} |f_n| \le R + \delta, \quad |f_{n-1}| \le R + \delta, \quad |g_n - \bar{z}_0| \le \delta, \\ |g_{n-1} - \bar{z}_0| \le \delta, \quad |z - z_0| \le \delta, \quad |t - z_0| \le \delta. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда

$$|g_n(t) - g_{n-1}(t)| \le M_1 \int_{z_0}^{t} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|\,|dz|,$$

где $M_1 = 2(R+\delta)$. Для кривых, соединяющих z_0 и t, лежащих в $G_\gamma \cap (K_\rho + \gamma_\rho)$ и имеющих равномерно ограниченную длину, из (15) можно получить неравенство

$$\left| f_{n+1}(t) - f_n(t) \right| \leq M \int\limits_{z_0}^{t} \left| f_n(z) - f_{n-1}(z) \right| |dz| \tag{18}$$

при некоторой постоянной M.

Пусть L — некоторый достаточно короткий путь из z_0 в t, лежащий в $G_\gamma \bigcap (K_\rho + \gamma_\rho)$. Полагая, как и раньше, $f \equiv 0$, из (16) получаем $g_0 = \bar{z}_0$. В случае $n = 1$ имеем

$$f_1(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, \bar{z}_0) A(t, \bar{z}_0; t, \bar{z}_0)}, \qquad g_1(t) = \bar{z}_0 + \int\limits_{z_0}^{t} f_1^2(z)\, dz$$

и

$$|f_1(t)| \leq R, \qquad |g_1(t) - \bar{z}_0| \leq \int\limits_{z_0}^{t} \left| f_1^2(z) \right| |dz| \leq R^2 s,$$

где s — длина дуги L. Отсюда следует, что условия (17) выполнены при $n = 1$. Поэтому из (18) вытекает оценка

$$|f_2(t) - f_1(t)| \leq M \int\limits_{z_0}^{t} |f_1(z) - f_0(z)| |dz| \leq M \int\limits_{z_0}^{t} R |dz| = RMs.$$

Пусть теперь $n = 2$. Тогда, учитывая последнее неравенство, получаем

$$|f_2(t)| \leq |f_1(t)| + RMs \leq R(1 + \delta),$$

$$|g_2(t) - \bar{z}_0| \leq \int\limits_{z_0}^{t} \left| f_2^2(z) \right| |dz| \leq R^2 (1 + \delta)^2 s.$$

Поэтому из выполнимости условий (17) при подходящем выборе δ следует

$$|f_3(t) - f_2(t)| \leq M \int\limits_{z_0}^{t} |f_2(z) - f_1(z)| |dz| \leq RM^2 \frac{s^2}{2!}.$$

Используя затем метод математической индукции, находим

$$\left| f_{n+1}(t) - f_n(t) \right| \leq R \frac{(Ms)^n}{n!}.$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности точки z_0 справедливы оценки

$$|f_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f_{k+1}(t) - f_k(t) \right| \leq R \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(Ms)^k}{k!} \leq R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ms)^k}{k!} = Re^{Ms},$$

$$|g_n(t) - \bar{z}_0| \leq \int\limits_{z_0}^{t} \left| f_n^2(z) \right| |dz| \leq R^2 \int\limits_{z_0}^{t} e^{2Ms} ds \leq R^2 \frac{M_0}{M} (e^{Ms} - 1),$$

где $M_0 = (e^{MH} + 1)/2$, а H — оценка сверху путей интегрирования.

Таким образом, можно указать верхнюю оценку для длины пути из z_0 в t, для которой неравенства (17) выполняются для всех n. Это означает, что для достаточно коротких путей L итеративный процесс определен. Из последних оценок получаем, что ряды

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[f_{n+1}(t) - f_n(t)\right], \qquad g(t) = g_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[g_{n+1}(t) - g_n(t)\right]$$

сходятся равномерно и равномерно почти всюду вдоль γ_ρ к решению системы (13), (14) при достаточно малом δ. При этом f и g — аналитические функции в окрестности точки z_0. Теорема доказана.

4. Исследование свободной границы в угловой точке $z_0 \in \gamma$ и $z_0 \in S$. Использовав принцип Фрагмена – Линделефа [12], установим ограниченность производной $F'(z)$ в окрестности угловой точки z_0. При этом в силу леммы 2 можно считать, что $F'(z)$ ограничена на части γ_ρ, кроме z_0 (т. е. $\left|F'(z)\right| \le P_1$, где $P_1 = \text{const}$). Введем в рассмотрение величину $M(r) = \max\left|F'(z)\right|$ при $z \in G_\gamma$, $|z - z_0| = r$. Тогда в силу указанного принципа заключаем, что если $F'(z)$ неограничена в окрестности z_0, то $P_2\exp(P_3 r^{-1/2}) \le M(r)$, где P_2 и P_3 — некоторые положительные постоянные. Пусть, далее, z — точка на окружности $|z - z_0| = r$, $z \in G_\gamma$, такая, что $\left|F'(z)\right| = M(r)$, а ε — наименьшее расстояние от точки z до γ. Теперь нетрудно установить, что $\left|F'(z)\right| \le P_4/\varepsilon$ в окрестности z_0 при некоторой постоянной $P_4 > 0$. Из двух последних неравенств следует $\varepsilon \le P_5\exp(-P_3 r^{-1/2})$, $P_5 P_2 = P_4$. Обозначим через z_1 точку на γ, ближайшую к z вдоль линии, проходящей через z и наклоненной к оси Ox под углом $\dfrac{\pi}{4}$, и пусть $w = 2z_1 - z$. Выберем затем замкнутый контур C вокруг точки z, который состоит из открытой дуги l, принадлежащей γ и содержащей точки z_0, z_1, и некоторой кривой L в G_γ такой, что ее кратчайшее расстояние от точек z и w, по крайней мере, порядка r. Оценивая теперь производную $F'(z)$, где

$$F'(z) = F'(z) - F'(w) = \int_C \Big[\left(S_z(t,\bar t; z, \bar z_0) - S_w(t, \bar t; w, \bar z_0)\right)\frac{\partial\psi}{\partial n} -$$
$$- \psi\frac{\partial}{\partial n}\left(S_z(t,\bar t; z, \bar z_0) - S_w(t,\bar t; w, \bar z_0)\right)\Big]\frac{ds}{y}$$

(здесь $F'(w) = 0$ и $t \in C$), получаем

$$\left|F'(z)\right| \le P_6\int_C \frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{|w - z|}{|t - w||t - z|}\frac{ds}{y} + P_7\int_{C-l}\frac{|w - z|}{|t - z|^2|t - w|^2}ds,$$

где P_6, P_7 — некоторые положительные постоянные. Пусть $t \in (C - l)$, тогда $|w - t| \ge r$, $|z - t| \ge r$, $|z - w| \le 6\varepsilon$ и

$$\left|F'(z)\right| \le r^{-4}P_8\exp(-P_3 r^{-1/2}) + P_9,$$

где величина P_9 содержит члены порядка ε / r^2, а $P_8 = \text{const}$. Так как $\left|F'(z)\right| = M(r)$ в силу выбора точки z, получаем неравенство

$$P_2\exp(P_3 r^{-1/2}) \le r^{-4}P_8\exp(-P_3 r^{-1/2}) + P_9.$$

Пришли к противоречию, ибо при $r \to 0$ левая часть последнего неравенства неограниченно возрастает, а правая — ограничена. Таким образом, функция $F'(z)$ ограничена в окрестности точки z_0, включая и саму эту точку. Поэтому для точки z_0 справедлива теорема 1.

5. Доказательство аналитичности свободной границы в точках области G. Рассмотрим решение системы уравнений (13), (14). Согласно теореме 1 эти функции являются аналитическими в области $G_\gamma \cap K_\rho$, причем $g(t) = \bar{t}$ на γ_ρ. Поэтому $\Phi_1(t) = g(t) + t$ есть действительная, а $\Phi_2(t) = g(t) - t$ — чисто мнимая функция на γ_ρ. Пусть $w(t)$ — конформное отображение $G_\gamma \cap K_\rho$ на верхнюю полуплоскость. Согласно принципу Шварца [12] функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ могут быть аналитически продолжены через те сегменты действительной оси w-плоскости, которые соответствуют γ_ρ. Таким образом, функция $(\Phi_1 - \Phi_2)/2$ аналитически продолжима через такие сегменты, и там же

$$t(w) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}$$

есть аналитическая функция. Следовательно, γ_ρ состоит из аналитических дуг. Это позволяет сформулировать лемму 1 в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда существует единственное решение задачи* (2) – (6). *При этом пара* (ψ, γ) *удовлетворяет следующим условиям:* γ — *дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки лежащей внутри* G; $\psi(x, y)$ — *функция, непрерывная в* $\overline{G}_\gamma$, *непрерывно дифференцируемая всюду в* $\overline{G}_\gamma$, *за исключением, может быть, точки* (a, h), *с* $< < h \le b$, *являющейся правым концом* γ, *и* $\psi_y(x, y) > 0$ *в* G_γ.

1. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 6. – С. 413–416.
2. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – **43**, № 5. – С. 228.
3. *Миненко А. С.* Об аналитичности свободной границы в одной теплофизической задаче // Мат. физика. – 1983. – Вып. 33. – С. 80–82.
4. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* Об одной вариационной задаче со свободной границей // Сб. докл. конф. по смешанным граничным задачам для дифференциальных уравнений с частичными производными и задачам со свободными границами (Штуттгарт, 5 – 10 сент. 1978 г.). – Штуттгарт, 1978. – С. 9–18.
5. *Миненко А. С.* Осесимметрическое течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–488.
6. *Данилюк И. И.* Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **118**. – С. 1–112.
7. *Kinderlehrer D., Nirenberg L.* Regularity in free boundary problems // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser 4. – 1977. – **4**. – P. 373–391.
8. *Baiocchi C.* Sur une probléme á frontiére libre traduisant le filtrage de liquides á traverse des milieux poreux // C. r. Acad. sci. A. – 1971. – **273**. – P. 1215–1217.
9. *Alt H. W., Caffarelli L. A.* Existence and regularity for a minimum problem with free boundary // J. Math. – 1980. – **325**. – P. 107–144.
10. *Friedman A.* Axially symmetric cavities in flows // Commun. Partial Different. Equat. – 1983. – **8**, № 9. – P. 949–997.
11. *Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow // Ann. Math. – 1952. – **56**, № 3. – P. 560–602.
12. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 471 с.

Получено 30.05.96