УДК 519.21

А. В. Свіщук, О. Е. Лукін (Ін-т математики НАН України, Київ)

ФІЛЬТРАЦІЯ КОМПОНЕНТ ПРОЦЕСІВ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

The problem of estimation of nonobservable component θ_t for the two-dimensional process (θ_t, ξ_t) of random evolution $\{(\theta_t, \xi_t); x_t\}$, $0 \le t \le T$ is investigated on the basis of observations of ξ_s, $s \le t$, where x_t is a homogeneous Markov process with infinitesimal operator Q. Applications to the stochastic models of (B, S)-securities market is described under conditions of incomplete market.

Досліджуються задача оцінювання неспостережувальної компоненти θ_t двовимірного процесу (θ_t, ξ_t) випадкової еволюції $\{(\theta_t, \xi_t); x_t\}$, $0 \le t \le T$, за результатами спостережень ξ_s, $s \le t$, де x_t — однорідний процес Маркова з інфінітезимальним оператором Q. Наведено застосування до стохастичних моделей (B, S)-ринку цінних паперів в умовах неповного ринку.

Вступ. Виведенню зображень для умовних математичних сподівань $\pi_t(h)$ при різних умовах на компоненти Θ, ξ та функцію h присвячено багато робіт різних авторів. Перш за все це класичні роботи А. Колмогорова [1] та Н. Вінера [2], в яких знайдені оптимальні оцінки стаціонарно зв'язаних процесів.

Перші загальні результати з побудови оптимальних нелінійних оцінок для марковських процесів отримав Р. Стратонович [3]. Що стосується проблем фільтрації випадкових процесів, то слід відмітити роботи Вентцеля, Вонема, Кушнера, Ширяєва, Ліпцера, Кайлата, Калліянпура, Скорохода, Портенка та інших. Зображення типу (7) для $\pi_t(h)$ у випадку дифузійних процесів вперше отримано Р. Ліпцером, А. Ширяєвим [4]. Найбільш загальна постановка задачі та відповідні зображення розглядаються в роботі [5].

Постановка задачі оптимальної фільтрації для процесів випадкової еволюції та її застосування до моделі Блека – Шоулса в умовах неповного ринку, а також формули (7) та (15), є, на думку авторів, новими. Зокрема, зображення (7) відрізняється від попередніх зображень у згаданих вище роботах наявністю додаткового члена Qh, що з'являється за рахунок впливу марковського процесу $x(t)$ з інфінітезимальним оператором Q.

Слід також відмітити, що більшість фінансових активів не мають детермінованих процентних ставок r, норм повернення μ та мінливостей σ. І, зокрема, базове припущення в моделі Блека – Шоулса не виконується. Тому і були запропоновані спроби узагальнити модель Блека – Шоулса шляхом опису еволюції r, μ і σ через стохастичні процеси, зокрема, стохастичними диференціальними рівняннями [6 – 11]. В роботі [12] норма повернення μ та мінливості σ є функціями марковського процесу, а в роботі [13] — напівмарковського процесу. В таких моделях ринок цінних паперів є неповним [9].

В даній роботі пропонується модель ринку цінних паперів, де r, μ та σ моделюються марковським процесом, і ця модель (див. (4)) є прикладом більш загальної моделі двовимірного процесу випадкової еволюції (див. (1)).

Обгрунтування моделі (4) як математичної моделі для реальних економічних процесів дається в роботах [12, 13] для розв'язання задачі хеджування Європейського опціону купівлі. Інші обгрунтування можна знайти в роботах [10, 11].

Зауважимо, що з економічної точки зору формулу (15) можна інтерпретувати таким чином: оптимальна оцінка функції від частково спостережувальної моделі (B, S)-ринку цінних паперів в умовах неповного ринку, що складається із неспостережувальної компоненти S_t — вартості акції та спостережувальної компоненти B_t — банківського рахунку, обчислюється повністю в термінах саме спостережувальної компоненти B_t, процентної ставки r, мінливості β та інфінітезимальної характеристики додаткового джерела інформації — процесу $x(t)$, а саме оператора Q.

1. Означення двовимірного процесу випадкової еволюції. Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) задані незалежні між собою вінерівські процеси $w_i = (w_i(t))$, $i = 1, 2$, $0 \le t \le T$, та випадковий вектор (θ_0, ξ_0), що не залежить від w_1 та w_2. Крім того, задано також вимірний фазовий простір $(X, \aleph)$ однорідного процесу Маркова x_t з інфінітезимальним оператором Q, процес x_t не залежить ні від $w_i = (w_i(t))$, $i = 1, 2$, ні від (θ_0, ξ_0). Позначимо

$$F_t := \sigma\{\omega:\ \theta_0, \xi_0, w_1(s), w_2(s), x_s, s \le t\}.$$

Двовимірним процесом (θ_t, ξ_t) марковської випадкової еволюції $\{(\theta_t, \xi_t);\ x_t\}$ називається розв'язок системи двох стохастичних диференціальних рівнянь з марковським збуренням:

$$\begin{cases} d\theta_t = a(t, \theta_t, \xi_t, x_t)\,dt + b_1(t, \theta_t, \xi_t, x_t)\,dw_1(t) + b_2(t, \theta_t, \xi_t, x_t)\,dw_2(t), \\ d\xi_t = A(t, \theta_t, \xi_t, x_t)\,dt + B(t, \xi_t, x_t)\,dw_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$P(|\theta_0| < +\infty) = P(|\xi_0| < +\infty) = 1, \quad x_0 = x \in X.$$

Приклад. ((B, S)-ринок цінних паперів з неповною інформацією). Нехай B_t описує динаміку вартості облігації (банківського рахунку) з процентною ставкою, що задається процесом α_t:

$$d\alpha_t = r(x_t)\,dt + \beta(x_t)\,dw_2(t),$$

тобто рівняння для B_t має вигляд

$$dB_t = B_t[\, r(x_t)\,dt + \beta(x_t)\,dw_2(t)\,]. \tag{2}$$

Нехай S_t описує динаміку вартості акції з коефіцієнтом росту $\mu(x_t)$ та мінливості $\sigma(x_t)$:

$$dS_t = S_t[\, \mu(x_t)\,dt + \sigma(x_t)\,dw_1(t)\,]. \tag{3}$$

Зауважимо, що у відомій моделі Блека – Шоулса [14] (B, S)-ринку цінних паперів

$$r(x) \equiv r > 0, \quad \beta(x) \equiv 0, \quad \mu(x) \equiv \mu \in R, \quad \sigma(x) \equiv \sigma > 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Нам потрібно оцінити неспостережувальну компоненту S_t (вартість акції) за результатами спостережень компоненти B_t (банківського рахунку), $s \le t$, маючи двовимірний процес (B_t, S_t):

$$\begin{aligned} dB_t &= B_t[\, r(S_t, x_t)\,dt + \beta(x_t)\,dw_2(t)\,], \\ dS_t &= S_t[\, \mu(B_t, x_t)\,dt + \sigma(B_t, x_t)\,dw_1(t)\,]. \end{aligned} \tag{4}$$

Природно, що в такій постановці задачі коефіцієнти μ та σ в (4) залежать від B_t, а r — від S_t, на відміну від (2), (3).

Таким чином, система рівнянь (4) є моделлю (B, S)-ринку цінних паперів в умовах неповного ринку, за рахунок наявності додаткового джерела випадковості x_t, окрім $w_1(t)$ та $w_2(t)$. Система (4) є лінійним аналогом системи (1).

2. Постановка задачі та умови. Нехай (θ, ξ) — двовимірний частково спостережувальний випадковий процес, де $\theta = (\theta_t, F_t)$, $0 \le t \le T$, — неспостережувальна компонента, а $\xi = (\xi_t, F_t)$, $0 \le t \le T$, — спостережувальна компонента, що описується системою (1).

Задача оптимальної фільтрації для частково спостережувального процесу (θ, ξ) полягає в побудові для кожного моменту t, $0 \le t \le T$, оптимальної у середньоквадратичному сенсі оцінки деякої F_t-вимірної функції h_t, залежної від (θ, ξ, x), за результатами спостережень ξ_s, $s \le t$.

Якщо $M h^2 < +\infty$, то такою оцінкою, очевидно, є апостеріорне середнє $\pi_t(h) = M[h_t / F_t^{\xi}]$.

Будемо вважати нижче, що компоненти процесу (θ, ξ) є процесами випадкової еволюції в (1), що дає можливість вивести для $\pi_t(h)$ стохастичне диференціальне рівняння, що називається *рівнянням оптимальної нелінійної фільтрації*.

Нехай

$$h := h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)$$

— вимірна функція така, що $M|h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)| < +\infty$. Позначимо

$$\pi_t(h) := M[h(t, \theta_t, \xi_t, x_t) / F_t^{\xi}]. \tag{5}$$

Будемо вважати, що виконуються такі умови:

1) $\left|g(t, \theta', \xi', x) - g(t, \theta'', \xi'', x)\right|^2 \le K(x)\left(\left|\theta' - \theta''\right|^2 + \left|\xi' - \xi''\right|^2\right),$

$$g^2(t, \theta, \xi, x) \le K(x)\left(1 + \theta^2 + \xi^2\right),$$

де $g(t, \theta, \xi, x)$ позначає будь-яку з функцій $a(t, \theta, \xi, x)$, $A(t, \theta, \xi, x)$, $b_1(t, \theta, \xi, x)$, $b_2(t, \theta, \xi, x)$, $B(t, \theta, \xi, x)$, $K(x)$ — деяка обмежена вимірна функція на X;

2) $M\left(\theta_0^2 + \xi_0^2\right) < +\infty$;

3) процес x_t є ергодичним зі стаціонарною мірою $\rho(A)$, $A \in \aleph$;

4) $\int \rho(dx)\, B^2(t, \xi, x) \ge C > 0$;

5) h неперервна разом із своїми похідними h_t', h_θ', h_ξ', $h_{\theta\theta}''$, $h_{\xi\xi}''$, $h_{\theta\xi}''$, та

$$\sup_{t \le T} M\, h(t, \theta_t, \xi_t, x_t) < +\infty, \quad h \in \operatorname{Dom}(Q);$$

6) $\int\limits_0^T M[(L+Q)\, h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)]^2 dt < +\infty$,

де

$$Lh(t, \theta_t, \xi_t, x_t) = h_t' + h_\theta' a + h_\xi' A + \frac{1}{2} h_{\theta\theta}''\left[b_1^2 + b_2^2\right] + \frac{1}{2} h_{\xi\xi}'' B^2 + h_{\theta\xi}'' b_2 B; \tag{6}$$

7) $\int\limits_0^T M\left\{\left[h_\theta'\right]^2\left[b_1^2 + b_2^2\right]\right\} dt < +\infty$, $\int\limits_0^T M\left[h_\xi'\right]^2 B^2\, dt < +\infty$.

3. Формулювання результату. З умов $1-3$ випливає, що система рівнянь (1) має єдиний сильний розв'язок, що є процесом Маркова [15].

Теорема. *Якщо виконуються умови* $1-7$, *то* P-*майже скрізь*

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int\limits_0^t \pi_s((L+Q)\, h)\, ds + {}$$

$$+ \int\limits_0^t \left[\pi_s(Nh) + \frac{\pi_s(Ah) - \pi_s(A)\, \pi_s(h)}{B(s, \xi_s, x_s)}\right] d\overline{w}_s, \tag{7}$$

де

$$\overline{w}_t := \int_0^t \frac{d\xi_s - \pi_s(A)\,\pi_s(h)}{B(s, \xi_s, x_s)}, \tag{8}$$

є вінеровським процесом відносно F_t^{ξ}, $0 \le t \le T$, *та*

$$Nh = h'_\theta b_2 + h'_\xi B.$$

4. Доведення теореми. Зазначимо, що в умовах теореми процес

$$m_t := f(x_t) - f(x) - \int_0^t Qf(x_s)ds, \tag{9}$$

є F_t^x-мартингалом для кожної $f(x) \in \mathrm{Dom}(Q)$, $x_0 = x$. Оскільки $w_1(t)$, $w_2(t)$ та $x(t)$ є незалежними, то

$$\langle w_1, m\rangle = \langle w_2, m\rangle = \langle w_1, w_2\rangle = 0, \tag{10}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — квадратична варіація процесів.

З формули Іто для процесів випадкової еволюції [15] та з формул (9), (10) випливає зображення

$$h(t, \theta_t, \xi_t, x_t) := h(0, \theta_0, \xi_0) + \int_0^t [L+Q]\,h(s, \theta_s, \xi_s, x_s)\,ds + y_t + m_t, \tag{11}$$

де оператор L визначений в (6), процес m_t — в (9),

$$y_t := \sum_{i=1}^{2} \int_0^t h'_0 b_i\, dw_i + \int_0^t h'_\xi B\, dw_2. \tag{12}$$

Зауважимо, що процеси y_t та m_t в (12) та (9) відповідно є квадратично інтегровними мартингалами, що випливає із зроблених припущень.

З формули Іто також знаходимо

$$\langle y_t, w_2\rangle := \int_0^t \left[h'_\theta b_2 + h'_\xi B\right] ds \tag{13}$$

та $\langle y_t, m_t\rangle = 0$.

Необхідне зображення (7) теореми тепер випливає з (11) – (13) та теореми 8.1 [16, с. 343].

5. Наслідок. Застосуємо доведену теорему до розглянутої стохастичної моделі (4) в умовах неповного (B, S)-ринку. Тут $\xi_t \equiv B_t$, $A \equiv B_t r$, $B \equiv B_t \beta$, $\theta_t = S_t$, $a \equiv S_t \mu$, $b_1 \equiv S_t \sigma$, $b_2 \equiv 0$. Оператор L в даному випадку має вигляд

$$Lh := h'_t + h'_s s\mu + h'_B Br + \frac{1}{2} h''_{SS} S^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} h''_{BB} B^2 \beta^2, \tag{14}$$

для N маємо $Nh = h'_B B\beta$. Вінерівський процес $\overline{w}_t$ (див. (8)) такий:

$$\overline{w}_t := \int_0^t \frac{dB_s - \pi_s(B_s r)\,ds}{B_s} = \int_0^t \left[\frac{r(S_s, x_s) - \pi_s(r)}{\beta}\right] ds + w_2(t),$$

бо B_s є вимірним відносно $F_s^{B_s}$. Зазначимо також, що

$$\frac{\pi_s(Ah) - \pi_s(A)\,\pi_s(h)}{B_s} = \frac{\pi_s(B_s rh) - \pi_s(B_s r)\,\pi_s(h)}{B_s} = \frac{\pi_s(rh) - \pi_s(r)\,\pi_s(h)}{\beta}$$

знову завдяки вимірності B_s відносно $F_s^{B_s}$ та означенню $\pi_s(h)$ в (5). Таким чином, зображення (7) для моделі (4) (B, S)-ринку набуває вигляду

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s((L+Q)\,h)\,ds +$$

$$+ \int_0^t \left[\pi_s\left(h'_B B\beta\right) + \left(\frac{\pi_s(rh) - \pi_s(r)\,\pi_s(h)}{\beta} \right) \right] \left(\frac{r - \pi_s(r)}{\beta} \right) ds +$$

$$+ \int_0^t \left[\pi_s\left(h'_B B\beta\right) + \left(\frac{\pi_s(rh) - \pi_s(r)\,\pi_s(h)}{\beta} \right) \right] dw_2(s), \qquad (15)$$

де оператор L визначений в (14).

Зауваження. Результат (15) анонсований авторами в роботах [17, 18].

1. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1941. – **5**, №1. – С. 3 – 14.
2. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of statistical time series // J. Wiley and Sons. – 1949. – №4.
3. *Стратонович Р. Л.* Условно марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966.
4. *Липцер Р., Ширяев А.* Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – **104**. – С. 135 – 180.
5. *Фуджисаки М., Каллианпур Ж., Кунита Х.* Стохастические дифференциальные уравнения для задач нелинейной фильтрации // Математика: сб. пер. иностр. ст. – 1973. – **17**, №2. – С. 108 – 128.
6. *Hull J., White A.* The pricing of options on assets with stochastic volatility models // Rev. Econ. Stud. – 1987. – **61**. – P. 247 – 264.
7. *Meleno A., Turnbull S.* Pricing foreign currency options with stochastic volatility // J. Econometr. – 1990. – **45**. – P. 239 – 265.
8. *Comte F., Renault E.* Noncausality in continuous time models // Econometr. Theory. – 1996. – **12**. – P. 215 – 256.
9. *Föllmer H., Schweizer M.* Hedging of contingent claims under incomplete market // Appl. Stochast. Anal. – New York; London: Gordon and Breach, 1991. – P. 389 – 414.
10. *Scott L.* Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation, and an application // J. Finan. and Quant. Anal. – 1987. – **22**. – P. 419 – 439.
11. *Wiggins J.* Option value under stochhastic volatility. Theory and empirical estimations // J. Finan. Econ. – 1987. – **19**. – P. 351 – 372.
12. *Ди Мази Дж., Кабанов Ю., Рунгальдер В.* Хеджирование опционов на акцию при среднеквадратическом критерии и марковских волатильностях // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – **39**, вып. 1. – С. 211 – 222.
13. *Swishchuk A.* Hedging of options under mean-square criterion and semi-Markov volatility // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №7. – С. 976 – 983.
14. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Economy. – 1973. – May / June. – P. 637 – 657.
15. *Свіщук А. В., Бурдейний А. Г.* Стійкість еволюційних стохастичних систем та її застосування у фінансовій математиці // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №10. – С. 1386 – 1401.
16. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
17. *Swishchuk A. V., Lukin A. E.* Random evolutions in financial and isurance mathematics // The Second Scand.-Ukr. Conf. Math. Stat. (Umea, Sweden, 1997, 8 – 13 June): Abstracts. – Umea, 1997. – P. 131.
18. *Swishchuk A. V., Lukin A. E.* Filtration, extrapolation and interpolation of random evolution processes // Int. Conf. … 80th Birthday Acad.Yu. A. Mitropolskii (Kiev, Ukraine, 1997, 18 – 23 August): Abstracts. – 1997. – P. 1.

Одержано 01.07.97