УДК 517.51

Є. Г. Усенко (Нац. пед. ун-т, Київ)

КРИТЕРІЇ СПІВПАДАННЯ ЯДРА ФУНКЦІЇ З ЯДРАМИ ЇЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ СЕРЕДНІХ РІССА ТА АБЕЛЯ

We indicate criteria of coincidence of the kernels $K(f)$, $K(A_f)$, and $K(R_f)$ in the Knopp sense of bounded functions $f(t)$, $R_f(t) = \dfrac{1}{P(x)}\int_{[0;t)} f(x)\,dP$, and $A_f(t) = \dfrac{1}{\int_0^\infty e^{-x/t}dP}\int_0^\infty f(x)e^{-x/t}dP$. In particular, we prove that $K(f) = K(A_f) \Leftrightarrow K(f) = K(R_f)$.

Вказано критерії співпадання ядер $K(f)$, $K(A_f)$, і $K(R_f)$ у розумінні Кноппа обмежених функцій $f(t)$, $R_f(t) = \dfrac{1}{P(x)}\int_{[0;t)} f(x)\,dP$ і $A_f(t) = \dfrac{1}{\int_0^\infty e^{-x/t}dP}\int_0^\infty f(x)e^{-x/t}dP$. Зокрема, доведено, що $K(f) = K(A_f) \Leftrightarrow K(f) = K(R_f)$.

1. Нехай $f: R_+^m \to L$ — обмежена банаховозначна функція, для якої існують середні Рісса $R_f(t)$ та Абеля $A_f(t)$:

$$R_f(t) = \frac{1}{P(x)}\int_0^t f\,dP, \quad A_f(t) = \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}}\,dP\right)^{-1}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{x}{t}}\,dP \qquad \forall t \in R_+^m,$$

де $P(t) = \prod_{i=1}^m P_i(t_i)$ $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in R_+^m = [0; +\infty)^m$ і кожна функція P_i неспадна і неперервна зліва на $[0; +\infty)$ та задовольняє умови

$$\lim_{t_i \to +\infty} P_i(t_i) = +\infty, \qquad P_i(2x_i) = O(P_i(x_i)) \qquad (x_i \to +\infty).$$

Якщо $K(f)$, $K(A_f)$ і $K(R_f)$ — ядра у розумінні Кноппа відповідних функцій, то, як показано у [1], $K(A_f) \subset K(f) \supset K(R_f)$. Вияснимо, коли $K(f) = K(A_f)$ і $K(f) = K(R_f)$.

Точку M назвемо (P)-точкою функції f, якщо існують E^*, $x_k \uparrow +\infty$ і $y_k \uparrow \uparrow +\infty$ такі, що

$$1 \le \frac{P(y_k)}{P(x_k)} \to +\infty, \qquad \lim_{E^* \ni x \to +\infty} f(x) = M \ \text{ і } \ \frac{1}{P(y_k)}\int_{E_k^*} dP \to 1 \qquad (k \to \infty),$$

де $E_k^* = E^* \cap [x_k; y_k]$. Зокрема, якщо $E_k = [x_k; y_k]$, то (P)-точку назвемо (P^*)-точкою функції f.

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема. *Нехай M — точка строгої опуклості (див.* [2, *с.* 112]*) ядра $K(f)$ функції f. Тоді:*

1) якщо M є (P)-точкою функції f, то M є (P^*)-точкою функції R_f;

2) $M \in K(R_f)$ $(M \in K(A_f)) \Leftrightarrow M$ є (P)-точкою функції f;

3) якщо $K(f)$ співпадає із замкненою опуклою оболонкою множини своїх точок строгої опуклості, то $K(f) = K(A_f)$ і $K(f) = K(R_f)$ тоді і тільки тоді, коли кожна точка строгої опуклості ядра $K(f)$ є (P)-точкою функції f;

4) $K(f) = K(A_f) \Leftrightarrow K(f) = K(R_f)$.

2. Для простоти міркувань будемо вважати $m = 1$, $L = R$. Навіть у цьому випадку наша теорема узагальнює результати робіт [3, 4]. Оскільки M — точка строгої опуклості ядра $K(f)$, то, не обмежуючи загальності, можна вважати $M = 0$, $f(x) \le 0 \quad \forall x$, а послідовність (y_k) з означення (P)-точки задовольняє умову $P(y_{k+1})/P(y_k) \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Тому маємо

$$R_f(y_k) = \frac{1}{P(y_k)} \int_0^{y_k} f\,dP = \frac{1}{P(y_k)} \int_{E_k^*} f\,dP + \frac{1}{P(y_k)} \int_{[0;y_k)\setminus E_k^*} f\,dP \to 0, \quad k \to \infty,$$

оскільки $f \to 0 \quad (E_k^* \ni x \to \infty)$, а

$$0 \le \frac{1}{P(y_k)} \int_{[0;y_k)\setminus E_k^*} f\,dP \le \frac{H}{P(y_k)} \left(\int_{[0;y_k)} dP - \int_{E_k^*} dP \right) = H \left(1 - \frac{1}{P(y_k)} \int_{E_k^*} dP \right), \quad k \to \infty.$$

Отже, $0 \le R_f(y_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ і тому можна вважати $R_f(y_k) \le \varepsilon_k$, де $0 < \varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$.

Можливі два випадки:

1) $\exists\, k_i \uparrow \infty$: $R_f(y) < \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall\, y \in [y_k; y_{k+1})$ і $k = k_i$;

2) $\exists\, k_0$: $\{ y \in [y_k; y_{k+1}) : R_f(y) \ge \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \} \ne \varnothing \quad \forall k \ge k_0$.

У випадку 1 точка $M = 0$, очевидно, є (P^*)-точкою функції R_f. У випадку 2 позначимо $z_{k+1} = \sup \{ y \in [y_k; y_{k+1}) : R_f(y) \ge \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \}$. Враховуючи неперервність зліва функції P, дістаємо неперервність зліва функції R_f, а тому $z_{k+1} < y_{k+1}$, $R_f(z_{k+1}) \ge \sqrt{\varepsilon_{k+1}}$ і $R_f(y) \le \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall\, y \in (z_{k+1}; y_{k+1})$.

Далі

$$\varepsilon_{k+1} \ge R_f(y_{k+1}) = \frac{1}{P(y_{k+1})} \int_{[0;y_{k+1})} f\,dP \ge \frac{1}{P(y_{k+1})} \int_{[0;z_{k+1})} f\,dP = \frac{P(z_{k+1})}{P(y_{k+1})} R_f(z_{k+1}) \ge$$

$$\ge \frac{P(z_{k+1})}{P(y_{k+1})} \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall\, k \ge k_0 \Rightarrow \frac{P(z_{k+1})}{P(y_{k+1})} \le \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \to 0 \quad (k \to \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(y_{k+1})}{P(z_{k+1} + \delta_{k+1})} \to +\infty,$$

якщо $0 < \delta_k \to 0$ $(k \to \infty)$. При цьому $0 \le R_f(y) < \sqrt{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall\, y \in [z_{k+1} + \delta_{k+1}; y_{k+1})$, тобто точка $M = 0$ є (P^*)-точкою функції R_f. Твердження 1 теореми доведено.

Якщо $M = 0 \in K(R_f)$, то методом від супротивного легко довести, що M є (P)-точкою функції f. Цим доведено твердження 2 для R_f.

Якщо $M \in K(A_f)$, то $M \in K(R_f)$, а тому M є (P)-точкою функції f. Навпаки, якщо M є (P)-точкою f, то за доведеним M є (P^*)-точкою функції R_f. Тому існують $y_{k-1} < x_k < y_k \to +\infty$ такі, що $R_f(t) \to M$, коли $[x_k; y_k) \ni t \to +\infty$, причому $P(y_k)/P(x_k) \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Враховуючи умову $P(2x) = O(P(x))$, одержуємо

$$\frac{y_k}{x_k} \to +\infty \quad (k \to \infty) \Rightarrow z_k = \sqrt{y_k x_k} \to \infty, \quad \frac{y_k}{z_k} \to \infty \text{ і } \frac{x_k}{z_k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Можна показати, що коли $P^{(1)}(z) = \int_0^z P(u)\,du$, то

$$A_f(z) = \left(\int_0^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z}}du\right)^{-1}\int_0^\infty P(u)R_f(u)e^{-\frac{u}{z}}dz,$$

причому $\int_0^\infty P(u)e^{-u/z_k}du \asymp P^{(1)}(z_k) \asymp z_k P(z_k),\ k \to \infty$. Тому

$$\left(\int_0^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1}\int_{y_k}^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du = \left(\int_{y_k}^\infty \frac{P(u)}{P^{(1)}(u)}P^{(1)}(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)\left(\int_0^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1} \le$$

$$\le \frac{H}{y_k}\int_{y_k}^\infty e^{-\frac{u}{z_k}}P^{(1)}(u)du\left(\frac{1}{z_k}\int_0^\infty P^{(1)}(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1} \le H\frac{z_k}{y_k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Аналогічно показуємо, що

$$\int_0^{x_k} P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\left(\int_0^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тому

$$\int_{x_k}^{y_k} P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\left(\int_0^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1} \to 1\ (k \to \infty) \Rightarrow A_f(z_k) =$$

$$= \left(\int_0^\infty P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1}\left(\int_0^{x_k} + \int_{x_k}^{y_k} + \int_{y_k}^\infty\right)P(u)R_f(u)du =$$

$$= \left(\int_{x_k}^{y_k} P(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du\right)^{-1}\int_{x_k}^{y_k} P(u)R_f(u)e^{-\frac{u}{z_k}}du + o(1), \quad k \to \infty.$$

З урахуванням того, що $R_f(u) \to M$, коли $[x_k; y_k] \ni u \to \infty,\ k \to \infty$, одержуємо $A_f(z_k) \to M,\ k \to \infty$, тобто $M \in K(A_f)$. Твердження 2 теореми доведено.

Твердження 3 і 4 є очевидними наслідками твердження 2.

1. *Ревенко А. В.* Вложение ядер регулярными преобразованиями // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №5. – С. 662 – 666.
2. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 412 с.
3. *Давыдов Н. А., Михалин Г. А.* О ядрах ограниченных последовательностей // Мат. заметки. – 1978. – **23**, №4. – С. 537 – 550.
4. *Михалин Г.А.* Условия совпадения ядра последовательности с ядрами ее (R, p_n, α) и (J, p_n) средних // Укр мат. журн. – 1979. – **31**, №51. – С. 504 – 509.

Одержано 30.12.97