УДК 519. 21

О. В. Школьний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ЗАДАНІ РОЗПОДІЛАМИ СВОЇХ ЦИФР У СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ З КОМПЛЕКСНОЮ ОСНОВОЮ

Distributions of complex-valued random variables determined by distributions of their digits in the system of numeration with complex base are studied. Sufficient conditions of the singularity of random variables of this sort are established, in particular, for the cases where the spectrum of variables under consideration has the zero Lebesgue measure (the C-type singular distribution) or is a rectangle (the S-type singular distribution).

Вивчаються розподіли комплекснозначних випадкових величин, заданих розподілами своїх цифр у системі числення з комплексною основою. Знайдено достатні умови сингулярності таких випадкових величин, зокрема, коли їх спектр має нульову міру Лебега (сингулярний розподіл C-типу) чи є прямокутником (сингулярний розподіл S-типу).

В даній роботі основним об'єктом досліджень є комплекснозначна випадкова величина (к. в. в.)

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} (it)^{-k} \eta_k, \tag{1}$$

де $2 \le t \in N$, η_k — незалежні, дискретно розподілені дійснозначні в. в., що набувають значень із множини $T = \{0, 1, \dots, t^2 - 1\}$, причому $P\{\eta_k = j\} = p_{jk}$; $p_{jk} \ge 0$; $\sum_{j=1}^{t^2-1} p_{jk} = 1 \ (\forall k)$.

Інтерес до в. в. (1) зумовлений тим, що вона пов'язана з оригінальним, хоча і природним, способом запису комплексних чисел у системі числення з основою, що містить уявну одиницю. В нашому випадку ми маємо справу з так званою *уявно-t-адичною системою числення,* основою якої є число it. Запис комплексних чисел у цій системі числення дає змогу спростити виконання арифметичних операцій над ними, звівши останні до „порозрядного" додавання та множення.

З іншого боку, к. в. в. (1) є частковим випадком к. в. в.

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k, \tag{2}$$

де $a_k \in C$, ξ_k — незалежні, дискретно розподілені к. в. в., що набувають значень із не більш ніж зчисленної обмеженої множини комплексних чисел $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots\}$, причому $P\{\xi_k = \varepsilon_j\} = q_{jk}$, $q_{jk} \ge 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} q_{jk} = 1 \ (\forall k)$, властивості якої розглянуто в [1]. Сформулюємо деякі з них.

Нагадаємо, що *спектром* к. в. в. τ є множина

$$S_\tau = \{z : P\{\tau \in O_\varepsilon(z)\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\},$$

де $O_\varepsilon(z)$ — ε-окіл точки z.

Властивість 1. *Якщо для к. в. в.* (2) E *має* n *елементів, то спектром* S_ξ *її розподілу є множина*

$$\left\{ z \in C\colon\ z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_{j_k}(z)\colon\ q_{j_k k} \neq 0,\ j_k = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Будемо говорити, що спектр S_ξ к. в. в. (2) має *N-властивість*, якщо для будь-якого $z \in S_\xi$ існує не більш ніж зчисленна кількість різних зображень z у вигляді

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_{j_k}(z).$$

Властивість 2. *Якщо спектр к. в. в.* (2) *має N-властивість, то ця к. в. в. матиме:*

1) *чисто дискретний розподіл* $\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \max_j \{q_{jk}\} > 0;$

2) *неперервний розподіл* $\Leftrightarrow$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_j \{q_{jk}\} = 0. \tag{3}$$

Властивість 3. *Для того щоб к. в. в.* (2) *мала чисто сингулярний розподіл, а її спектр мав нульову міру Лебега, досить, щоб разом з* (3) *одночасно виконувались умови:*

1) $|E| = n$ *(E має n елементів);*
2) S_ξ *має N-властивість;*
3) $\lim_{m \to \infty} n^m \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right)^2 = 0.$

Безпосередньо з властивості 1 випливає, що спектром к. в. в. (1) є множина

$$S_\eta = \left\{ z \in C\colon\ z = \sum_{k=1}^{\infty} (it)^{-k} j_k\colon\ p_{j_k k} \neq 0,\ j_k = \overline{0, t^2 - 1} \right\}.$$

Доведемо кілька допоміжних тверджень, які дозволять дещо спростити вивчення властивостей розподілу к. в. в. (1).

Лема 1. *К. в. в.* (1) *можна зобразити у вигляді*

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} \eta_k^{(1)} + it \sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} \eta_k^{(2)} + z_0, \tag{4}$$

де $\eta_k^{(1)}$, $\eta_k^{(2)}$ *— незалежні, дискретно розподілені в. в., що набувають значень із множини* $T_1 = \{0, 1, \ldots, t^4 - 1\}$, *причому*

$$P\left\{\eta_k^{(1)} = s\right\} = p_{sk}^{(1)} = p_{s_1(4k)} p_{s_2(4k-2)},$$

$$P\left\{\eta_k^{(2)} = s\right\} = p_{sk}^{(2)} = p_{s_1(4k-1)} p_{s_2(4k-3)},$$

а $s \in T_1$, s_1 *— остача від ділення числа* s *на число* t^2, s_2 *— різниця чисел* $t^2 - 1$ *та неповної частки від цього ділення;* $z_0 = -(1 + it)\dfrac{t^2}{t^2 + 1}$.

Доведення. Перепишемо η таким чином:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty}\left[t^{-4k}(\eta_{4k} - t^2\eta_{4k-2})\right] + it\sum_{k=1}^{\infty}\left[t^{-4k}(\eta_{4k-1} - t^2\eta_{4k-3})\right].$$

Позначимо $\eta'_k = \eta_{4k} - t^2\eta_{4k-2}$, $\eta''_k = \eta_{4k-1} - t^2\eta_{4k-3}$, де η'_k та η''_k набувають значень із множини

$$\left\{-t^2(t^2-1), -t^2(t^2-1)+1, -t^2(t^2-1)+2, \ldots, -t^2(t^2-1)+t^4-1\right\}.$$

Нехай

$$z_0 = -(1+it)\sum_{k=1}^{\infty} t^{-4k}t^2(t^2-1) = -(1+it)\frac{t^2}{t^2+1}.$$

Тоді

$$\eta = \eta - z_0 + z_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[t^{-4k}(\eta'_k + t^2(t^2-1))\right] + it\sum_{k=1}^{\infty}\left[t^{-4k}(\eta''_k + t^2(t^2-1))\right] + z_0.$$

Поклавши $\eta_k^{(1)} = \eta'_k + t^2(t^2-1)$, $\eta_k^{(2)} = \eta''_k + t^2(t^2-1)$, отримаємо вираз для η у вигляді (4), де $\eta_k^{(1)}$, $\eta_k^{(2)}$ набувають значень із множини T_1.

Зафіксуємо довільно $s \in T_1$. Тоді

$$P\left\{\eta_k^{(1)} = s\right\} = p_{sk}^{(1)} = P\{\eta_{4k} = s_1\}P\{\eta_{4k-2} = s_2\} = p_{s_1(4k)}p_{s_2(4k-2)},$$

причому

$$S_1 - t^2s_2 + t^2(t^2-1) = s. \tag{5}$$

За теоремою про ділення з остачею $s = l_1t^2 + l_2$, де $l_1, l_2 \in T$. З рівності $(t^2 - 1 - s_2)t^2 + s_1 = l_1t^2 + l_2$ та єдиності зображення s у вигляді (5) випливає $s_1 = l_2$, $s_2 = (t^2 - 1) - l_1$.

Міркування для $\eta_k^{(2)}$ аналогічні. Лему 1 доведено.

Очевидно, що в. в. $\eta^{(1)}$ та $\eta^{(2)}$ з леми 1 є в. в. з незалежними t^4-адичними цифрами [2].

Крім того, к. в. в. (1) можна зобразити у вигляді

$$\eta = \eta^* + z_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k}\eta_k^* + z_0, \tag{6}$$

де $\eta_k^* = \eta_k^{(1)} + it\eta_k^{(2)}$ — незалежні, дискретно розподілені к. в. в., що набувають значень із множини $\tilde{T} = \left\{z\colon z = \alpha + it\beta\colon \alpha, \beta = \overline{0, t^4-1}\right\}$, причому

$$P\{\eta_k^* = \alpha + it\beta = \gamma\} = p_{\gamma k}^* = p_{s'_1(4k)}p_{s'_2(4k-2)}p_{s''_1(4k-1)}p_{s''_2(4k-3)},$$

а s'_1, s'_2, s''_1, s''_2 визначаються так само, як s_1, s_2 в лемі 1.

Очевидно, що η^* та η мають однакові розподіли, а їх спектри — однакові міри Лебега та розмірності Хаусдорфа – Безиковича. Тому вивчення розподілу η зводиться до вивчення розподілу η^*.

Лема 2. *Якщо* τ *— деяка к. в. в. і* $\tau = \tau_1 + i\tau_2 := \operatorname{Re}\tau + i\operatorname{Im}\tau$, *де* $\operatorname{Re}\tau$ *та* $\operatorname{Im}\tau$ *— дійснозначні в. в., причому хоча б одна з них має сингулярний розподіл, то розподіл* τ *також сингулярний.*

Доведення. Не порушуючи загальності, вважатимемо $\operatorname{Re}\tau$ сингулярно розподіленою. Тоді існує $A_1 \in S_{\operatorname{Re}\tau}$ така, що $\lambda(A_1) = 0$, але $P\{\operatorname{Re}\tau \in A_1\} = 1$ ($\lambda(\cdot)$ — міра Лебега). Розглянемо множину $A = A_1 \times S_{\operatorname{Im}\tau}$. Для неї $\lambda(A) = 0$ і

$$P\{\tau \in A\} = P\{\{\operatorname{Re}\tau \in A_1\} \cap \{\operatorname{Im}\tau \in S_{\operatorname{Im}\tau}\}\} = P\{\operatorname{Re}\tau \in A_1\} = 1.$$

Отже, τ — сингулярно розподілена. Лему 2 доведено.

Лема 3. *Спектр к. в. в.* (1) *має* N*-властивість.*

Доведення. За лемою 1

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} j_k^{(1)}(z) + it\sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} j_k^{(2)}(z) = a_1 + ita_2 \qquad \forall z \in S_\eta,$$

де $\sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} j_k^{(m)}(z)$ — зображення a_m в системі числення з основою t^4, а таких зображень існує не більше двох. Отже, для числа z існує не більш ніж чотири способи запису у вигляді

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (it)^{-k} j_k(z).$$

Лему 3 доведено.

З леми 3 та властивості 2 безпосередньо випливає така теорема.

Теорема 1. *К. в. в.* (1) *матиме:*

1) *чисто дискретний розподіл* $\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \max_j \{p_{jk}\} > 0$;

2) *неперервний розподіл* $\Leftrightarrow$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_j \{p_{jk}\} = 0. \tag{7}$$

В [3] запропоновано наступну класифікацію чисто сингулярних розподілів: сингулярно розподілену в. в. називають

в. в. канторівського типу (C-типу), якщо її спектр має нульову міру Лебега;

в. в. салемівського типу (S-типу), якщо її спектр є об'єднанням не більш ніж зчисленної кількості інтервалів;

в решті випадків — *квазіканторівського типу* (K-типу).

Наступні твердження містять достатні умови належності сингулярно розподіленої к. в. в. до типів, аналогічних щойно означеним.

Теорема 2. *Нехай для к. в. в.* (1) $T_k^* = \{j \in T\colon\, p_{jk} \neq 0\}$ $(\forall\, k)$ *та* $\left|T_k^*\right| = c_k$. *Тоді для того щоб ця в. в. була сингулярно розподіленою, а її спектр мав нульову міру Лебега, досить, щоб разом з* (7) *виконувалась умова* $c_k < t^2$ $(\forall\, k \geq k_0,\, k_0 \in N)$, *причому якщо* $T_k^* = T^*$ *для всіх таких* k, *то розмірність Хаусдорфа – Безиковича спектра к. в. в.* (1) *рівна* $\alpha_0(S_\eta) = \log_t c$, *де* $c = |T^*|$.

Доведення. Одразу зазначимо, що внаслідок (6)

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k}\eta_k^* + z_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0}(t^4)^{-k}\eta_k^* + t^{-4k_0}\sum_{k=1}^{k_0}(t^4)^{-k}\eta_{k+k_0}^* + z_0 = \tilde{\eta}^* + t^{-4k_0}\hat{\eta}^* + z_0,$$

де $\tilde{\eta}^*$ — дискретно розподілена, а розподіли η та $\hat{\eta}^*$ співпадають. Якщо $\hat{c}_k$ — аналог c_k для $\hat{\eta}^*$, то при $c_k < t^2$ $(\forall k \geq k_0)$, $\hat{c}_k < t^2$ $(\forall k \in N)$. Тому надалі вважатимемо $k_0 = 1$.

Розглянемо к. в. в.

$$\eta^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k}\eta_k^*,$$

в якої t і η_k^* — з означення к. в. в η^*, але $c_k^{(0)} = c^{(0)} = \max\limits_k \{c_k\}$ і $T_k^* \subset T_k^{(0)}$ $(\forall k \in N)$, де $c_k^{(0)}$, $c^{(0)}$, $T_k^{(0)}$ — аналоги c_k, c, T_k^* для $\eta^{(0)}$). Тоді $\eta^{(0)}$ задовольняє умови властивості 3, за якою вона має сингулярний розподіл і $\lambda\left(S_{\eta^{(0)}}\right) = 0$. Оскільки $S_{\eta^*} \subset S_{\eta^{(0)}}$, то $\lambda\left(S_{\eta^*}\right) = \lambda(S_\eta) = 0$. Цим доведено сингулярність розподілу η.

Якщо $T_k^* = T^*$ $(\forall k \in N)$, а $c = |T^*|$, то для множини $T^{**} = \left\{\gamma \in T\colon p_{\gamma k}^* \neq 0\right\}$ $|T^{**}| = c^4$.

Крім того, для будь-якого $z \in S_{\eta^*}$ $z = \gamma_1(z) + t^{-4}z'$, де $z' \in S_{\eta^*}$. Тому S_{η^*} розпадається на c^4 частин, кожна з яких подібна до всієї множини з коефіцієнтом подібності t^{-4}. Таким чином, S_{η^*} — замкнена абсолютно самоподібна множина, самоподібна розмірність якої співпадає із розмірністю Хаусдорфа – Безиковича і задовольняє рівняння $c^4(t^{-4})^{\alpha} = 1$, тобто $\alpha_0(S_\eta) = \log_t c$.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай для к. в. в.* (1) $p_{jk} = p_j > 0$ $(\forall k)$. *Тоді для того щоб ця к. в. в. була сингулярно розподіленою, а її спектр був прямокутником, досить, щоб разом із* (7) *виконувалась умова:* $\exists\, l_0 \in N\colon$ $p_{l_0}^{(1)} \neq t^{-4}$.

Доведення. Спектром к. в. в. (1) в даному випадку є прямокутник, який можна отримати паралельним перенесенням на вектор $\bar{z}_0$ прямокутника $\{z \in C\colon \operatorname{Re} z \in [0, 1],\ \operatorname{Im} z \in [0, t]\}$. Справді, очевидно, що внаслідок (6)

$$\operatorname{Re} z = \sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k} j_k^{(1)}(z) \in [0, 1],$$

$$\operatorname{Im} z = t\sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k} j_k^{(2)}(z) \in [0, t] \qquad \forall\, z \in S_{\eta^*}.$$

Навпаки, для будь-якого z: $\operatorname{Re} z \in [0; 1]$, $\operatorname{Im} z \in [0; t]$ існують зображення

$$\operatorname{Re} z = \sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k} j_k^{(1)}(\operatorname{Re} z), \qquad \operatorname{Im} z = t\sum_{k=1}^{\infty}(t^4)^{-k} j_k^{(1)}(\operatorname{Im} z),$$

де $j_k^{(1)}, j_k^{(2)} \in \{0, 1, \ldots, t^4 - 1\}$. Тоді

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} j_k(z),$$

де $j_k(z) = j_k^{(1)} + itj_k^{(2)}$, тобто $z \in S_{\eta^*}$. Залишилось нагадати, що S_η отримується з S_{η^*} паралельним перенесенням на вектор $\bar{z}_0$.

Доведемо сингулярність к. в. в. (1). В позначеннях леми 2 для к. в. в. (1), внаслідок (4),

$$\operatorname{Re}\eta = \sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} \eta_k^{(1)}, \qquad \operatorname{Im}\eta = t\sum_{k=1}^{\infty} (t^4)^{-k} \eta_k^{(2)}.$$

Як відмічено раніше, $\operatorname{Re}\eta$ — в. в. з незалежними t^4-адичними цифрами. Оскільки $\exists\, l_0 \in N: \; p_{l_0}^{(1)} \neq t^{-4}$, то за теоремою 5.24 з [2, с. 154] $\operatorname{Re}\eta$ має сингулярний розподіл. Тому за лемою 2 η — сингулярно розподілена. Теорему 3 доведено.

1. *Школьний О. В., Працьовитий М. В.* Один клас сингулярних комплекснозначних випадкових величин типу Джессена – Вінтнера // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 12. – С. 1653 – 1660.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
3. *Працевитый Н. В.* Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 77 – 83.

Одержано 02.12.97