УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Лейс Азар (Днепропетр. ун-т)

НАИЛУЧШИЕ L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ЗАДАВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ, ОБОБЩЕННЫМИ СПЛАЙНАМИ ИЗ ЭТИХ КЛАССОВ

For classes of periodic functions which are determined by restrictions on the L_1-norm of the result of action of differential operators with constant coefficients and real spectrum on these functions, we find the exact values of the best L_1-approximations by generalized splines from the classes under consideration.

Знайдені точні значення найкращих L_1-наближень класів періодичних функцій, що задаються обмеженнями на L_1-норму результату застосування до них диференціальних операторів з постійними коефіцієнтами та дійсним спектром, узагальненими сплайнами з цих класів.

Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство, $\|\cdot\|_X$ — норма в X; $V \subset X$ — произвольное множество. Величина

$$E(f, V)_X := \inf\{\|f-u\|_X;\ u \in V\}$$

называется наилучшим приближением элемента f множеством V в пространстве X. Налучшее приближение множества $W \subset X$ множеством V в пространстве X — это величина

$$E(W; V)_X := \sup\{E(f, V)_X : f \in W\}.$$

N — поперечником Колмогорова [1] центрально-симметричного множества W в пространстве X называется величина

$$d_N(W, X) := \inf_{\Lambda_N} E(W, \Lambda_N)_X,$$

где inf берется по всевозможным подпространствам $\Lambda_N \subset X$ размерности не выше N.

Если заданы множество W и $V \subset X$, то следуя [2], полагаем

$$d_N(W, X, V) := \inf_{\Lambda_N} E(W, \Lambda_N \cap V)_X, \tag{1}$$

где inf берется по всевозможным подпространствам $\Lambda_N \subset X$ размерности не выше N.

Ясно, что всегда $d_N(W, X) \le d_N(W, X, V)$.

Через L_p, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространства 2π-периодических функций $f\colon |R \to |R$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$. Если функция $f \in L_1$ локально абсолютно непрерывна, то будем писать $f \in AC$. Через W_p^r, $r = 1, 2, \ldots$, обозначим класс функций $f \in L_1$ таких, что $f^{(r-1)} \in AC$ $(f^{(0)} := f)$ и $\left\|f^{(r)}\right\|_p \le 1$, а через W_V^r — класс функций f таких, что $f^{(r-1)} \in AC$ и $\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r)}) \le 1$.

Как известно [3, с. 249], для $r \in N$ и всех $p \in [1, \infty]$ при $N \to \infty$

$$d_N\left(W_p^r, L_p\right) \asymp N^{-r}.$$

Ясно также, что

$$d_N\left(W_2^r, L_2, W_2^r\right) \asymp d_N\left(W_2^r, L_2\right) \asymp N^{-r}.$$

Вместе с тем в [2] для $p = \infty$ и в [4] для $p = 1$ показано, что при всех $r \geq 3$ и $N \to \infty$

$$d_N\left(W_p^r, L_p, W_p^r\right) \asymp N^{-2}, \qquad p = 1, \infty.$$

Наличие такого своеобразного эффекта — одна из причин, привлекших внимание к изучению величин типа $E(W, \Lambda_N \cap V)_X$, называемых относительными приближениями (поперечники типа (1) называются относительными поперечниками). Пусть τ_{2n-1}, $n \in \mathbb{N}$, — множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$; $S_{2n,r}$, $r \in \mathbb{N}$, — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in Z$.

В работе [2] показано, что при $p = \infty$

$$E\left(W_p^r, \tau_{2n-1} \cap W_p^r\right)_p \asymp d_{2n-1}\left(W_p^r, L_p, W_p^r\right).$$

Из результатов работы [4] следует, что это соотношение имеет место и при $p = 1$. Аналогичные соотношения справедливы [4, 5] для

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1}\right)_{L_1} \text{ и } E\left(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r\right)_{L_1}, \qquad r = 3, 4, \ldots .$$

Более того, в [4, 5] найдены точные значения этих величин:

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1}\right)_{L_1} = \varphi_{1,r}(t_{\max}) - \varphi_{1,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right) \tag{2}$$

и

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r\right)_{L_1} = \varphi_{1,r}(t_{\max}) - \frac{n}{\pi} \int\limits_{t_{\max}}^{t_{\max}+\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,n}(t)\,dt, \tag{3}$$

где $\varphi_{\lambda,r}$, $\lambda > 0$, $r \in \mathbb{N}$, — r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде от функции $\varphi_{\lambda,0}(x) = \operatorname{sign}\sin\lambda x$, а $t_{\max}$ таково, что $\varphi_{1,r}(t_{\max}) = \|\varphi_{1,r}\|_\infty$.

Ряд дальнейших результатов об относительных приближениях и поперечниках в метриках C и L можно найти в [6, 7].

Цель данной работы — обобщить соотношения (2) и (3) на случай классов периодических функций, задаваемых с помощью произвольных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и вещественным спектром, содержащим нуль.

Пусть $P(x)$ — алгебраический полином степени r, имеющий только вещественные корни. Обозначим через W_p^P, $1 \leq p \leq \infty$, класс функций $f \in L_1$ таких, что $f^{(r-1)} \in AC$ и $\left\| P\left(\frac{d}{dx}\right) f \right\|_p \leq 1$, а через W_V^P — класс функций $f \in L_1$ таких, что $f^{(r-1)} \in AC$ и $\bigvee\limits_0^{2\pi}\left(P\left(\frac{d}{dx}\right) f\right) \leq 1$. Отметим, что для функций $f \in W_p^P$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет место следующее интегральное представление:

$$f(x) = \mu C + \int\limits_0^{2\pi} B_P(x-t)\,g(t)\,dt,$$

где

$$B_P(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ikt}}{P(ik)}$$

(Σ' означает, что в сумме отсутствует слагаемое с $k = 0$, если $P(0) = 0$); $C \in \mathbb{R}$, $\mu = 1$, если $P(0) = 0$, и $\mu = 0$ в противном случае, $g \in L_p$, $\|g\|_p \le 1$, и $g \perp \mu$.

Если $P(x) = x^r$, то классы W_p^P и W_V^P — определенные выше классы W_p^r и W_V^r.

Через $S_{2n,P}$ обозначим множество обобщенных 2π-периодических сплайнов вида

$$u(t) = C\mu + \sum_{k=1}^{2n} C_k B_P\left(t - \frac{k\pi}{n}\right), \tag{4}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{2n} \in \mathbb{R}$ и $\mu \sum_{k=1}^{2n} C_k = 0$.

Через $S^1_{2n,P}$ обозначим множество обобщенных сплайнов

$$u(t) = C\mu + \int_0^{2\pi} B_P(t-\nu) S_0(t)\,dt, \tag{5}$$

где $C \in \mathbb{R}$, $S_0 \in S_{2n,0}$ ($S_{2n,0}$ — множество кусочно-постоянных функций с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in Z$), $S_0 \perp \mu$.

В случае, когда $P(x) = x^r$, получаем $S_{2n,P} = S_{2n,r-1}$ и $S^1_{2n,P} = S_{2n,r}$.

Наконец, через $\varphi_{\lambda,P}(x)$ обозначим $2\pi/\lambda$-периодическое решение уравнения $P\left(\frac{d}{dx}\right) f = \varphi_{\lambda,0}$, имеющее нулевое среднее значение на периоде. Через $t^\lambda_{\max}$ и $t^\lambda_{\min}$, будем обозначать точки соответственно максимума и минимума $\varphi_{\lambda,P}$.

В данной работе доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $r \ge 2$ и полином $P(x)$ степени r имеет вид $P(x) = xQ(x)$, где $Q(x)$ имеет только вещественные корни. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$E\left(W_1^P, S_{2n,P} \cap W_V^Q\right)_{L_1} = \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max}\right) - \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{6}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1

$$E\left(W_1^P, S^1_{2n,P} \cap W_1^P\right)_{L_1} = \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max}\right) - \frac{n}{\pi} \int_{t^1_{\max}}^{t^1_{\max} + \frac{\pi}{n}} \varphi_{1,P}(t)\,dt. \tag{7}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Прежде всего отметим, что условие $u \in S_{2n,P} \cap W_V^Q$ для обобщенных сплайнов (в дальнейшем просто сплайнов) вида (4) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{2n} |C_k| \le 1,$$

и так как в рассматриваемом случае $P(0) = 0$, то

$$\sum_{k=1}^{2n} C_k = 0$$

и множество $S_{2n,\,P} \cap W_V^Q$ содержит константы. Применяя теорему двойственности для наилучших L_1-приближений выпуклым множеством ([8], предложение 1.4.1) и учитывая сказанное выше, получаем

$$E := E\left(W_1^P, S_{2n,\,P} \cap W_V^Q\right)_{L_1} =$$

$$= \sup_{f \in W_1^P} \sup_{\begin{cases} \|g\|_\infty \le 1 \\ g \perp 1 \end{cases}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx - \sup_{u \in S_{2n,\,P} \cap W_V^Q} \int_0^{2\pi} u(x) g(x)\, dx \right\} =$$

$$= \sup_{\begin{cases} \|g\|_\infty \le 1 \\ g \perp 1 \end{cases}} \left\{ \sup_{f \in W_1^P} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx - \sup_{u \in S_{2n,\,P} \cap W_V^Q} \int_0^{2\pi} u(x) g(x)\, dx \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_\infty^P} \left\{ \sup_{\begin{cases} \|f\|_1 \le 1 \\ f \perp 1 \end{cases}} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx - \sup_{\begin{cases} \sum_1^{2n} C_k = 0 \\ \sum_1^{2n} |C_k| \le 1 \end{cases}} \sum_{k=1}^{2n} C_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_\infty^P} \left\{ E(g)_\infty - \sup_{\begin{cases} \sum_1^{2n} C_k = 0 \\ \sum_1^{2n} |C_k| \le 1 \end{cases}} \sum_{k=1}^{2n} C_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right\},$$

где $E(g)_p$ — наилучшее L_p-приближение функции g константой.

Выражение

$$E(g)_\infty - \sup_{\begin{cases} \sum_1^{2n} C_k = 0 \\ \sum_1^{2n} |C_k| \le 1 \end{cases}} \sum_{k=1}^{2n} C_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

не изменится, если к g прибавить произвольную константу. Поэтому окончательно получаем

$$E = \sup_{\begin{cases} g \in W_\infty^P \\ \|g_+\|_\infty = \|g_-\|_\infty \end{cases}} \left\{ \|g\|_\infty - \sup_{\begin{cases} \sum_{k=1}^{2n} C_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \le 1 \end{cases}} \sum_{k=1}^{2n} C_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right\}, \tag{8}$$

где $g_\pm(x) = \max\{\pm g(x), 0\}$.

Отметим, что $\left\|\varphi_{\lambda,\,P}\right\|_\infty$ непрерывно зависит от λ, монотонно убывает в интервале $(0, +\infty)$, причем $\left\|\varphi_{\lambda,\,P}\right\|_\infty \to 0$ при $\lambda \to +\infty$ и $\left\|\varphi_{\lambda,\,P}\right\|_\infty \to +\infty$ при $\lambda \to 0$. Поэтому для любой функции $g \in W_\infty^P$ такой, что $\|g_+\|_\infty = \|g_-\|_\infty$, найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$\left\|\varphi_{\lambda, P}\right\|_\infty = \|g\|_\infty. \tag{9}$$

Если для данной функции g будет, в силу условия (9), $\lambda > n$, то получим

$$\|g\|_\infty - \sup_{\substack{\sum_1^{2n} C_k = 0 \\ \sum_1^{2n} |C_k| \le 1}} \sum_{k=1}^{2n} C_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) < \left\|\varphi_{n, P}\right\|_\infty = E\left(W_1^P, S_{2n, P}\right)_1 \tag{10}$$

(по поводу последнего равенства (см., например, [9], теорема 2)), и поскольку $E\left(W_1^P, S_{2n, P}\right)_1 \le E\left(W_1^P, S_{2n, P} \cap W_V^Q\right)_1$, внешний sup в правой части (9) можно брать только по таким g, для которых в (9) $\lambda \le n$. В дальнейшем будем считать, что g именно такое. Отметим также, что для любой функции $g \in W_\infty^P$ будет $E(g)_\infty \le \left\|\varphi_{P,1}\right\|_\infty$ (см., например, [10], теорема 1 или последнее равенство в (10) при $n = 0$) и, следовательно, можно считать, что если λ выбрано из условия (9), то $\lambda \ge 1$.

Пусть $S_{\max}$ и $S_{\min}$ — точки соответственно максимума и минимума функции g. Выберем числа $k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ такие, что

$$\left|S_{\max} - \frac{k_1\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{2n}, \qquad \left|S_{\min} - \frac{k_1\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{2n},$$

и положим $C_{k_1} = 1/2$, $C_{k_2} = -1/2$, $C_k = 0$, если $k \ne k_1, k_2$.

Учитывая тот факт, что полином $P(x)$ имеет только вещественные корни и, следовательно, [11, с. 241] для дифференциального оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ справедлив следующий аналог теоремы Ролля

$$\nu\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right) \ge \nu(f)$$

для любой достаточно гладкой периодической функции ($\nu(f)$ — число перемен знака f на ее периоде).

Нетрудно проверить, что функции g и $\varphi_{\lambda, P}$ (напомним, что λ выбрано из условия (9)) удовлетворяют условиям теоремы сравнения производных ([9], теорема 3). В свою очередь, отсюда легко следует

$$g\left(\frac{k_1\pi}{n}\right) \ge \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{2n}\right)$$

и

$$g\left(\frac{k_2\pi}{n}\right) \le \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\min}^\lambda + \frac{\pi}{2n}\right) = -\varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{2n}\right),$$

поэтому будем иметь

$$\sup_{\substack{\sum_{k=1}^{2n} C_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \le 1}} \sum_{k=1}^{2n} C_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \ge C_1 g\left(\frac{k_1\pi}{n}\right) + C_2 g\left(\frac{k_2\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{k_1\pi}{n}\right) - g\left(\frac{k_2\pi}{n}\right)\right] \ge \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{11}$$

Сопоставляя соотношения (8) и (11), получаем

$$E \le \sup_{\lambda \in [1, n]} \left\{\varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda\right) - \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{2n}\right)\right\}. \tag{12}$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что sup в правой части (12) достигается при $\lambda = 1$. Для этого, например, достаточно заметить, что функции $\varphi_{\lambda, P}$, $\lambda > 1$, и $\varphi_{1, P}$ удовлетворяют условиям уже использованной нами теоремы сравнения с функцией $\varphi_{1, P}$ в качестве функции сравнения. Отсюда, в частности, следует, что график функции $\varphi'_{\lambda, P}\left(x - t^1_{\max} + t^\lambda_{\max}\right)$ на интервале $\left(t^1_{\max}, t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right)$ будет расположен строго над графиком функции $\varphi'_{1, P}(x)$ (если бы это было не так, то, учитывая что

$$\varphi'_{\lambda, P}\left(t^1_{\max} - t^1_{\max} + t^\lambda_{\max}\right) = \varphi'_{1, P}\left(t^1_{\max}\right) = 0,$$

легко получили бы противоречие с теоремой сравнения).

Поэтому имеем

$$\varphi_{1, P}\left(t^1_{\max}\right) - \varphi_{1, P}\left(t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= -\int\limits_{t^1_{\max}}^{t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}} \varphi'_{\lambda, P}(t)\,dt \geq \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}} \varphi'_{\lambda, P}\left(t - t^1_{\max} - t^\lambda_{\max}\right)dt =$$

$$= -\int\limits_{t^\lambda_{\max}}^{t^\lambda_{\max} + \frac{\pi}{2n}} \varphi'_{\lambda, P}(t)\,dt = \varphi_{\lambda, P}\left(t^\lambda_{\max}\right) - \varphi_{\lambda, P}\left(t^\lambda_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right).$$

Таким образом, с одной стороны, с учетом (12) мы пришли к оценке

$$E \leq \varphi_{1, P}\left(t^1_{\max}\right) - \varphi_{1, P}\left(t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{13}$$

С другой стороны, в силу (8) имеем

$$E \geq \sup_\alpha \left\{ \left\| \varphi_{1, P}(\cdot + \alpha) \right\|_\infty - \sup_{\left\{\substack{\sum_{k=1}^{2n} C_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \leq 1}\right.} \sum_{k=1}^{2n} C_k \varphi_{1, P}\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) \right\} =$$

$$= \left\| \varphi_{1, P} \right\|_\infty - \sup_{\left\{\substack{\sum_{k=1}^{2n} C_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \leq 1}\right.} \sum_{k=1}^{2n} C_k \varphi_{1, P}\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha_0\right),$$

где α_0 выбрано так, чтобы максимум функции $\varphi_{1, P}(t + \alpha_0)$ достигался в точке $\frac{\pi}{2n}$.

Однако при таком выборе α_0

$$\sup_{\left\{\substack{\sum_{k=1}^{2n} C_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \leq 1}\right.} \sum_{k=1}^{2n} C_k \varphi_{1, P}\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha_0\right) = \min_\mu \max_k \left| \varphi_{1, P}\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha_0\right) - \mu \right| = \varphi_{1, P}\left(t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right).$$

Следовательно,

$$E \geq \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max}\right) - \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right)$$

и теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Используя теорему двойственности для наилучших приближений выпуклым множеством и учитывая, что множество $S^1_{2n,P} \cap W^P_1$ содержит константы, после несложных преобразований получаем

$$E := E\left(W^P_1, S^1_{2n,P} \cap W^P_1\right)_1 =$$

$$= \sup_{f \in W^P_1} \sup_{\begin{cases}\|g\|_\infty \leq 1 \\ g \perp 1\end{cases}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx - \sup_{u \in W^P_1 \cap S^1_{2n,P}} \int_0^{2\pi} u(x) g(x)\, dx \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W^P_\infty} \left\{ E(g)_\infty - \sup_{u \in W^P_1 \cap S^1_{2n,P}} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{d}{dx}\right) u g(x)\, dx \right\}. \tag{14}$$

Учитывая определение (5) обобщенных сплайнов из $S^1_{2n,P}$, видим, что для $u \in S^1_{2n,P}$ функция $P\left(\frac{d}{dx}\right)u$ постоянна на каждом из интервалов $\left(x_k, x_{k+1}\right)$, где $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $k \in Z$. При этом, если C_k — значение функции на интервале $\left(x_k, x_{k+1}\right)$, то $\sum_{k=1}^{2n} C_k = 0$, и если $u \in S^1_{2n,P} \cap W^P_1$, то $\sum_{k=1}^{2n} |C_k| \leq \frac{n}{\pi}$.

Теперь из (14) выводим

$$E = \sup_{g \in W^P_\infty} \left\{ E(g)_\infty - \frac{n}{\pi} \sup_{\begin{cases}\sum_1^{2n} C_k = 0 \\ \sum_1^{2n} |C_k| \leq 1\end{cases}} \sum_{k=1}^{2n} C_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\, dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W^P_\infty} \left\{ E(g)_\infty - \frac{n}{\pi} \inf_{\lambda \in R} \max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\, dt - \lambda \right| \right\}.$$

Как нетрудно проверить sup в последнем выражении можно брать только по таким $g \in W^P_\infty$, для которых

$$\inf_\lambda \max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\, dx - \lambda \right| = \max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\, dx \right|.$$

Кроме того, для любой функции $g \in W^P_\infty$, найдется $\lambda \geq 1$ такое, что $E(g)_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,P}\right\|_\infty$. Поэтому

$$E = \sup_{\lambda \geq 1} \left\{ \left\|\varphi_{\lambda,P}\right\|_\infty - \frac{n}{\pi} \inf_{E(g)_\infty = \|\varphi_{\lambda,P}\|_\infty} \max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\, dx \right| \right\}.$$

Ясно, что $E \geq E\left(W^P_1, S^1_{2n,P}\right) = \left\|\varphi_{n,P}\right\|_\infty$, тогда

$$E = \sup_{1 \le \lambda \le n} \left\{ \left\| \varphi_{\lambda, P} \right\|_\infty - \frac{n}{\pi} \inf_{E(g)_\infty = \left\| \varphi_{\lambda, P} \right\|_\infty} \max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\, dx \right| \right\}. \tag{15}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, замечаем, что для функции $g \in W_\infty^P$ (такой, что $E(g)_\infty = \left\| \varphi_{\lambda, P} \right\|_\infty$) и функции $\varphi_{\lambda, P}$ выполняются условия теоремы сравнения производных, откуда легко следует

$$\max_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\, dx \right| \ge \int_{t_{\max}^\lambda}^{t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx,$$

где $t_{\max}^\lambda$ определено выше.

Теперь из (15) выводим

$$E \le \sup_{1 \le \lambda \le n} \left\{ \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda\right) - \frac{n}{\pi} \int_{t_{\max}^\lambda}^{t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx \right\}. \tag{16}$$

Докажем, что

$$\sup_{1 \le \lambda \le n} \left\{ \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda\right) - \frac{n}{\pi} \int_{t_{\max}^\lambda}^{t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx \right\} = \varphi_{1, P}\left(t_{\max}^1\right) - \frac{n}{\pi} \int_{t_{\max}^1}^{t_{\max}^1 + \frac{\pi}{n}} \varphi_{1, P}(x)\, dx. \tag{17}$$

Рассмотрим

$$\varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda\right) - \frac{n}{\pi} \int_{t_{\max}^\lambda}^{t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx = \frac{n}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda\right) - \int_{t_{\max}^\lambda}^{t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx \right].$$

Найдем константу C, для которой будет выполняться равенство

$$\left(\varphi_{\lambda, P} + C\right)\left(t_{\max}^\lambda\right) = \varphi_{1, P}\left(t_{\max}^1\right).$$

Поскольку $\left\| \varphi_{\lambda, P} \right\|_\infty < \left\| \varphi_{1, P} \right\|_\infty$ при $\lambda > 1$, функции $\varphi_{\lambda, P} + C$ и $\varphi_{1, P}$ будут удовлетворять условиям уже использованной теоремы сравнения производных, из которой следует, что на интервале $\left(t_{\max}^1, t_{\max}^1 + \dfrac{\pi}{n}\right)$ график функции $\psi(x) = \varphi_{\lambda, P}\left(x - t_{\max}^1 + t_{\max}^\lambda\right) + C$ будет расположен выше графика функции $\varphi_{1, P}$. Однако тогда

$$\frac{\pi}{n} \varphi_{\lambda, P}\left(t_{\max}^\lambda\right) - \int_{t_{\max}^\lambda}^{t_{\max}^\lambda + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx = \frac{\pi}{n} \psi\left(t_{\max}^\lambda\right) - \int_{t_{\max}^1}^{t_{\max}^1 + \frac{\pi}{n}} \psi(x)\, dx \le$$

$$\le \frac{\pi}{n} \varphi_{1, P}\left(t_{\max}^1\right) - \int_{t_{\max}^1}^{t_{\max}^1 + \frac{\pi}{n}} \varphi_{\lambda, P}(x)\, dx$$

и соотношение (17) доказано.

Следовательно,

$$E \leq \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max}\right) - \frac{n}{\pi} \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^1_{\max}+\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,P}(x)\,dx. \tag{18}$$

Получим для E оценку снизу.

В силу соотношения (15) имеем

$$E \geq \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max}\right) - \frac{n}{\pi} \inf_{\alpha \in R} \max_k \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{1,P}(x+\alpha)\,dx \right|.$$

Очевидно, что для любого $\alpha \in |R$

$$\inf_{\alpha} \max_k \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{1,P}(x+\alpha)\,dx \right| = \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^1_{\max}+\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,P}(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$E \geq \varphi_{1,P}\left(t^1_{\max}\right) - \frac{n}{\pi} \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^1_{\max}+\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,P}(x)\,dx. \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19), завершаем доказательство теоремы 2.

1. *Колмогоров А. Н.* О наилучшем приближении функции заданного функционального класса // Математика и механика. Избр. тр. – М.: Наука, 1985. – С. 186-189.
2. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 3. – С. 369-380.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
4. *Бабенко В. Ф.* Приближения в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций. Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9-18.
5. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие L_1-приближение классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1418–1421.
6. *Бабенко В. Ф.* О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. – 1991. – **50**, № 6. – С. 24–30.
7. *Бабенко В. Ф.* О наилучших L_1-приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Там же. – 1992. – **51**, № 5. – С. 12–19.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
9. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенство для перестановок // Докл. АН СССР. – 1986. – **290**, № 5. – С. 1033–1036.
10. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов функций, определяемых с помощью модуля непрерывности // Там же. – 1988. – **298**, № 6. – С. 1296–1299.
11. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 16.09.96