УДК 517.9

Б. В. Базалий (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ HELE – SHAW СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

The Stefan problem for a parabolic equation with small parameter of a derivative with respect to time is considered. The justification is given for the limiting transition as a small parameter tends to zero, which implies the proof of classical solvability of the Hele–Shaw problem with a free boundary in the small with respect to time.

Розглянуто задачу Стефана для параболічного рівняння з малим параметром при похідній за часом. Наведено обгрунтування граничного переходу при наближенні малого параметру до нуля, що призводить до доказу класичної розв'язності задачі Hele – Shaw з вільною межею в малому за часом.

Классическая задача Стефана — нелинейная задача со свободной (неизвестной) границей для параболического уравнения теплофизического содержания. Вопросам разрешимости и регулярности решений этой задачи посвящена обширная литература [1]. Если рассмотреть задачу с аналогичными условиями на свободной границе, но для элиптического уравнения, то приходим к задаче Hele – Shaw, которая имеет гидродинамическое содержание [2], при этом нестационарность задачи сохраняется за счет изменения во времени свободной границы. Для доказательства классической разрешимости задачи Hele – Shaw можно применить тот же метод, что и в задаче Стефана (см., например, [3], где обсуждается более сложная задача с учетом кривизны свободной границы). Однако можно попытаться получить решение задачи Hele – Shaw как предел последовательности классических решений задачи Стефана при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon > 0$ — коэффициент при производной по времени в параболическом уравнении. Обоснованию такого предельного перехода посвящена настоящая работа.

Для простоты изложения ограничиваемся случаем двух геометрических переменных и специальным видом области, в которой ищется решение. Перенесение этих же результатов на большее число переменных и области общего вида, в которых, однако, искомая граница не имеет общих точек с заданными границами, не вызывает особых затруднений.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть Π — полуполоса в плоскости $y=(y_1, y_2)$, $\Pi=\{0\le y_1\le 1,\ y_2\ge 0\}$, $\gamma_t\colon y_2=\xi(y_1,t)$ — поверхность такая, что при каждом $t\in[0,T]$ кривая $y_2=\xi(y_1,t)$ разбивает Π на связные области Ω_t и $\Pi\setminus\Omega_t$, причем $\overline{\Omega}_t$ содержит нижнее основание Π, а $\Pi\setminus\Omega_t$ — бесконечно удаленную точку, и концы кривой лежат на вертикалях $y_1=0,1$. Требуется найти поверхность γ_t и функцию $u(y,t)$, определенную в области $G(T)=\{(y,t)\colon y\in\Omega_t,\ t\in(0,T)\}$ по следующим условиям:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=\varepsilon F(y),\quad (y,t)\in G(T);\quad u(y,0)=w(y)\ge 1,\quad \xi(y_1,0)=\xi_0(y_1);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|_{y_1=0,1}=0,\quad u(y_1,0,t)=f(y_1); \tag{1}$$

$$u=1,\quad \frac{\partial u}{\partial n}+\xi_t/(1+\xi_{y_1}^2)^{1/2}=0,\quad (y,t)\in\gamma_t,$$

где $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$; ε_0,μ — положительные постоянные; $F(y)$, $f(y_1)$, $\xi_0(y_1)$ — заданные функции; $w(y)>1$ в Ω_0; $\vec{n}$ — внешняя к Ω_t единичная нормаль.

При $\varepsilon > 0$ соотношения (1) определяют решение однофазной задачи Стефана, а при $\varepsilon = 0$ решение задачи Hele – Shaw.

Предполагаем, что выполняются условия согласования до первого порядка включительно и условия

$$\Delta w = 0, \quad y \in \Omega_0; \quad \frac{\partial w}{\partial y_2} < 0, \quad y \in \gamma_0. \tag{2}$$

Из соотношения $u(y_1, \xi(y_1, t), t) = 1$ следует, что $\xi_{y_1}(y_1, t) = 0$ при $y_1 = 0{,}1$, если только $\partial u / \partial y_2 \neq 0$ при $y \in \gamma_t$, $y_1 = 0{,}1$. Поэтому решение задачи будем искать в предположении $\xi_{y_1}(y_1, t) = 0$ при $y_1 = 0{,}1$. Это условие вместе с условием $u_{y_1} = 0$ при $y_1 = 0{,}1$ позволяет продолжить искомые функции $\xi(y_1, t)$, $u(y, t)$ четным образом по переменной y_1 и искать периодические по y_1 решения задачи (1) с периодом 2. Условие периодичности принято для того, чтобы избежать в данном случае исследования регулярности решения в угловых точках.

С помощью замены переменых

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2\, \xi_0(y_1, t) / \xi(y_1, t) \tag{3}$$

задача (1) редуцируется к задаче в фиксированной области. Обозначим

$$v(x, t) = u(y(x, t), t), \quad \Omega = \{x : -1 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < \xi_0(x_1)\},$$

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T), \quad D = \{x : -1 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\},\ D_T = D \times (0, T),$$

$$\Gamma_T = \gamma_0 \times (0, T), \quad n_\xi = (-\xi_{x_1}, 1), \quad h_\xi = (0, \varepsilon x_2 (\ln \varphi)_t),$$

$$\varphi = \frac{\xi_0(x_1)}{\xi(x_1, t)}, \quad \nabla_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 (\ln \varphi)_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2},\ \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Тогда в новых переменных задача (1) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \left(h_\xi, \nabla v \right) - \nabla_\xi^2 v - \varepsilon F(y(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega_T;$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_{x_1 = \pm 1} = 0, \quad v(x_1, 0, t) = f(x_1); \quad v(x, 0) = w(x_1), \quad \xi(x_1, 0) = \varepsilon_0(x_1); \tag{4}$$

$$v = 1, \quad \mu \xi_t + \left(\nabla_\xi v,\ n_\xi \right) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T.$$

Полагая

$$F(y(x, t)) = -x_2 \frac{\xi_t(x_1, 0)}{\xi_0(x_1)} \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

где $\xi_t(x_1, 0)$ определяется из последнего условия в (4), можно убедиться, что в задаче (4) удовлетворяются условия согласования первого порядка.

Пусть $H^l(\overline{\Omega})$, $H^{l, l/2}(\overline{\Omega}_T)$, $l = k + \alpha$, k — целое, $\alpha \in (0, 1)$, пространства Гельдера [4, с. 16], которые строятся с помощью полунорм

$$\langle u \rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{x, y, t} \frac{|u(x, t) - u(y, t)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \langle u \rangle_t^{(\alpha)} = \sup_{x, t, \tau} \frac{|u(x, t) - u(x, \tau)|}{|t - \tau|^\alpha},$$

Будем использовать также полунорму

$$[u]^{(\alpha, \beta)} = \sup_{x, y, t, \tau} \frac{|u(x, t) - u(y, t) - u(x, \tau) + u(y, \tau)|}{|x - y|^\alpha |t - \tau|^\beta}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1),$$

и определим банаховы пространства $E^{k+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, получающиеся замыканием бесконечно дифференцируемых функций в соответствующих нормах:

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_{E^\alpha} \equiv E^{\alpha,\alpha/2}[u] = \max_{x,t}|u| + \langle u\rangle_x^{(\alpha)} + \langle u\rangle_t^{(\alpha/2)} + [u]^{(\alpha,\alpha/2)},$$

$$\|u\|_{1+\alpha} = \|u\|_{E^{1+\alpha}} = E^{\alpha,\alpha/2}[u_x] + D^{\alpha,\alpha}[u],$$

$$D^{\alpha,\alpha}[u] = \max_{x,t}|u| + \langle u\rangle_x^{(\alpha)} + \langle u\rangle_t^{(\alpha)} + [u]^{(\alpha,\alpha)},$$

$$\|u\|_{2+\alpha} = \|u\|_{E^{2+\alpha}} = E^{\alpha,\alpha/2}[u_{xx}] + D^{\alpha,\alpha}[u_x] + D^{\alpha,\alpha}[u],$$

и пространство $P_\varepsilon^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ с нормой

$$\|u\|_{P_\varepsilon^{2+\alpha}} = \|\varepsilon u_t\|_\alpha + \|u\|_{2+\alpha}.$$

Введем также пространство

$$\hat{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T) = \left\{ u : u \in E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T),\ u_t \in E^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T) \right\},$$

$$\|u\|_{\hat{E}^{2+\alpha}} = \|u\|_{2+\alpha} + \|u_t\|_{1+\alpha}.$$

Обозначим через $\underset{0}{H}^{l,l/2}$, $\underset{0}{E}^{k+\alpha}$, $\underset{0}{P}{}_\varepsilon^{2+\alpha}$, $\underset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}$ подпространства соответствующих пространств, элементы которых равны нулю при $t = 0$ вместе со своими допустимыми производными по t.

Теорема 1. *Пусть в задаче Hele – Shaw* $\xi_0(x_1) = \text{const}$, *функции* $w(x), f(x_1)$ *периодические по* x_1 *с периодом два, четные на* $[-1, 1]$, $w(x) \in H^{5+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f(x_1) \in H^{5+\alpha}(\overline{D})$, *выполняются условия согласования и условия* (2). *Тогда найдется* $T_0 > 0$, *зависящее от даных задачи, такое, что существует решение* $v \in E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $\xi \in \hat{E}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$ *для любого* $T \in (0, T_0)$.

Замечание. Условие $\xi_0(x_1) = \text{const}$ в теореме можно заменить условием, что $\xi_0(x_1)$ есть произвольный элемент из $H^{5+\alpha}(\overline{D})$, что требует специального рассуждения [5].

Доказательство теоремы 1 проводится в несколько этапов. Рассмотрим задачу (4) при $\varepsilon > 0$ в классах гладких функций и покажем, что из последовательности решений задачи Стефана $(v_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к решению задачи Hele – Shaw. В свою очередь доказательство существования решения задачи Стефана сводится к нахождению неподвижных точек некоторого нелинейного функционального уравнения с помощью теоремы о сжатых отображениях. По сравнению с ранее известными доказательствами разрешимости задачи Стефана в этой работе используются такие классы функций, в которых имеют место необходимые равномерные по ε оценки.

Теорема 2. *Пусть в задаче Стефана выполнены условия теоремы* 1. *Тогда найдется* $T_0 > 0$, *зависящее от данных задачи и не зависящее от* ε, *такое, что существует решение* $v \in P_\varepsilon^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $\xi \in \hat{E}^{2+\alpha}(D_T)$ *для любого* $T \in (0, T_0)$.

2. Сведение задачи к функциональному уравнению. Условия согласования при $\varepsilon > 0$ дают возможность, используя построения из [4, с. 345], определить функцию $\xi_1(x_1, t) \in H^{5+\alpha,\,(5+\alpha)/2}(\overline{D}_T)$ такую, что

$$\xi_1(x_1, 0) = \xi_0(x_1), \quad \xi_{1t}(x_1, 0) = \xi_t(x_1, 0), \quad \xi_{1tt}(x_1, 0) = \xi_{tt}(x_1, 0).$$

Будем искать решение задачи (4) в виде $v = \theta + w + x_2 s \xi_1^{-1} w_{x_2}$, $\xi = s + \xi_1$, $\theta \in \underset{0}{P}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $s \in \underset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$. Тогда после несложных вычислений из (4) получим

$$\begin{gathered}
\varepsilon \frac{\partial\theta}{\partial t} - L_s\theta - L_s w - L_s(x_2 s\xi_1^{-1} w_{x_2}) + (\varepsilon x_2 (s\xi_1^{-1})_t - \\
- \varepsilon x_2 \xi_{1t}(x_1, 0)\xi_0^{-1}) w_{x_2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T; \\
\left.\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \pm 1} = 0, \quad \theta(x_1, 0, t) = 0; \quad \theta + bs = 0, \\
\mu \frac{\partial s}{\partial t} + b_1(0)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + b_2(0)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \Phi_1(s, s_{x_1}, \theta_x) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T,
\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}
L_s = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2A_{12}(s)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22}(s)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_2(s)\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad A_{11} = 1, \\
A_{12}(s) = x_2(\ln\varphi)_{x_1}, \qquad A_{22}(s) = \varphi^2 + (x_2(\ln\varphi)_{x_1})^2, \\
A_2(s) = -\varepsilon x_2(\ln\varphi)_t + x_2(\ln\varphi)_{x_1 x_1} + x_2(\ln\varphi)_{x_1}^2, \\
b_1(s) = -\xi_{1x_1}, \quad b_2(s) = -\xi_0(x_1)(\ln\varphi)_{x_1}\xi_{1x_1} + \varphi, \\
\Phi_1(s, \theta) \equiv \Phi_1(s, s_{x_1}, \theta_x), \quad \Phi_{1\theta_x}(0, 0) = 0,
\end{gathered}$$

$\Phi_1(s, \theta)$ — гладкая функция своих аргументов, $b = \xi_0 \xi_1^{-1} w_{x_2}$.

Пусть L_0 — дифференциальный оператор, получающийся из L_s при $s = 0$. Тогда первое соотношение в (5) можно представить в виде

$$\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} - L_0\theta + \Phi_0(s, \theta) = 0,$$

где $\Phi_0(s, \theta) = \Phi_0(s, s_{x_1}, s_{x_1 x_1}, s_t, \theta, \theta_x, \theta_{xx})$ — гладкая функция своих аргументов, причем

$$\Phi_{0\theta_{xx}}(0,0) = \Phi_{0s_t}(0,0) = \Phi_{0s_{x_1x_1}}(0,0) = \Phi_{0s_{x_1}}(0,0) = \Phi_{0\theta}(0,0) = \Phi_{0\theta_x}(0,0) = 0.$$

Выделив в соотношениях (5) линейные относительно $\psi = (\theta, s)$ слагаемые, перепишем их в виде

$$\begin{gathered}
L(\theta, s) \equiv \varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} - L_0\theta + \Phi_{0s}(0,0)s = \\
= \left[-\Phi_0(s, \theta) + \Phi_{0s}(0,0)s + \Phi_0(0,0)\right] - \\
- \Phi_0(0,0) \equiv F_0(\theta, s), \quad (x, t) \in \Omega_T; \\
M(\theta, s) \equiv \mu\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_i b_i(0)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \Phi_{1s_{x_1}}(0,0)s_{x_1} + \Phi_{1s}(0,0)s = \\
= \left[-\Phi_1(s,\theta) + \Phi_{1s_{x_1}}(0,0)s_{x_1} + \Phi_{1s}(0,0)s + \Phi_1(0,0)\right] - \\
- \Phi_1(0,0) \equiv F_1(\theta, s),
\end{gathered} \tag{6}$$

$$N(\theta,s)\equiv\theta+bs\equiv F_2(\theta,s)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_T;$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=\pm1}=0,\quad \theta(x_1,0,t)=0.$$

Пусть $\underset{0}{\mathcal{P}}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ — подмножество четных по x_1 функций из $\underset{0}{P}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, удовлетворяющих условиям $\theta(x_1,0,t)=0$, $\theta_{x_1}(\pm1,x_2,t)=0$, $\theta(x_1,\xi_0(x_1),t)\in$ $\in\ \hat{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$, где $\hat{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$ — подмножество из $\hat{\underset{0}{E}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$ четных по x_1 функций $u(x_1,t)$, для которых $u_{x_1}(\pm1,t)=0$ и пусть $\mathcal{H}_1=$ $=\underset{0}{\mathcal{P}}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)\times\hat{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$ – банахово пространство пар функций $\psi=(\theta,s)$ с нормой $\|\psi\|_{\mathcal{H}_1}=\|\theta\|_{P_{\varepsilon}^{2+\alpha}}+\|\theta|_{\Gamma_T}\|_{\hat{E}^{2+\alpha}}+\|s\|_{\hat{E}^{2+\alpha}}$. Подмножества четных по x_1 функций, которые являются сужением на $[-1,1]$ периодических по x_1 функций с периодом 2 и принадлежат пространствам $\underset{0}{E}{}^{k+\alpha}$, $\hat{\underset{0}{E}}{}^{2+\alpha}$, обозначим через $\underset{0}{\mathcal{E}}{}_{\sim}^{k+\alpha}$, $\hat{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}_{\sim}^{2+\alpha}$ соответственно и введем банахово пространство $\mathcal{H}_2=$ $=\underset{0}{\mathcal{E}}{}_{\sim}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)\times\underset{0}{\mathcal{E}}{}_{\sim}^{1+\alpha}(\overline{D}_T)\times\hat{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}_{\sim}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$, элементами которого являются $h=$ $=(f_0,f_1,f_2)$ с нормой $\|h\|_{\mathcal{H}_2}=\|f_0\|_{\alpha}+\|f_0\|_{1+\alpha}+\|f_2\|_{\hat{E}^{2+\alpha}}$.

Непосредственно из вида дифференциального уравнения для функции $\theta(x,t)$ в (5) следует, что при $\psi=\mathcal{H}_1$ функция $F_0(\theta,s)$ может быть представлена в виде $\sum_{k,l,i}\gamma_{kli}\,f_k\,\partial f_l/\partial x_i$, $k,l=\overline{1,N}$, $\gamma_{kli}\in\{0,1\}$, где $f_k,f_l\in E^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ и по крайней мере один из множителей под знаком суммы обращается в нуль при $t=0$. Подмножество элементов из $\underset{0}{\mathcal{E}}{}_{\sim}^{\alpha}$, представимых в виде указанной суммы, образуют подпространство $\dot{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}_{\sim}^{\alpha}$. Пусть $\dot{\mathcal{H}}_2=\dot{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}_{\sim}^{\alpha}(\overline{\Omega}_T)\times\underset{0}{\mathcal{E}}{}_{\sim}^{1+\alpha}(\overline{D}_T)\times$ $\times\hat{\underset{0}{\mathcal{E}}}{}_{\sim}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$.

Определим линейный оператор $A:\mathcal{H}_1\to\dot{\mathcal{H}}_2$, действующий по правилу $A\psi=(L(\theta,s),\,M(\theta,s),\,N(\theta,s))$, и обозначим $F(\theta,s)=(F_0(\theta,s),\,F_1(\theta,s),$ $F_2(\theta,s))$. Тогда задачу (6) можно записать в виде

$$A\psi=F(\psi).\tag{7}$$

Легко проверяется, что оператор A является ограниченным. Наши дальнейшие рассуждения связаны с доказательством существования оператора A^{-1}, так что исходная задача будет сведена к нахождению неподвижных точек уравнения

$$\psi=A^{-1}F(\psi)\equiv g(\psi),\quad \psi\in\mathcal{H}_1.\tag{8}$$

3. Исследование линейной задачи: оценки, разрешимость. При $\varepsilon>0$ дифференциальный оператор $L(\theta,s)$ удовлетворяет условию равномерной параболичности, поэтому доказательство существования оператора A^{-1} можно провести методами [4, гл. 4]. Обозначим $a_{ij}(x,t)=A_{ij}(0)$, $a_2(x,t)=A_2(0)$, $a(x,t)=\Phi_{0s}(0,0)$, $\beta_i(x,t)=b_i(0)$, $\mu_1(x_1,t)=\Phi_{1s_{x_1}}(0,0)$, $\mu_2(x_1,t)=\Phi_{1s}(0,0)$ и отметим, что $\mu_1(x_1,0)=0$. Рассмотрим линейную задачу для $\psi\in\mathcal{H}_1$:

$$\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}-\sum_{i,j}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\,\partial x_j}+a_2(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+a(x,t)\,s=\mathcal{F}_0(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T;$$

$$\mu\frac{\partial s}{\partial t}+\sum_i\beta_i(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu_1(x_1,t)\,s_{x_1}+\mu_2(x_1,t)\,s=\mathcal{F}_1(x,t),\tag{9}$$

$$\theta + b(x,t)\,s = \mathcal{F}_2(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T;\quad (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)\in \mathcal{H}_2.$$

Прежде всего, следуя методу Шаудера, получаем априорную оценку решения системы (9). Отметим, что коэффициенты системы принадлежат пространству $H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}$, так как определяются гладкостью функций $w(x)$, $\xi_1(x_1,t)$. Пусть $\eta(x)\in C^\infty(R^2)$ с носителем в шаре $B_r(x_0)$, $x_0\in\gamma_0$. Умножим соотношения из (9) на $\eta(x)$ и представим их в виде $(v=\eta\theta,\ \sigma=\eta s)$:

$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v = \tilde{\mathcal{F}}_0,\quad (x,t)\in(B_r\cap\Omega)\times(0,T);$$
$$\mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sum_i\bar\beta_i\frac{\partial v}{\partial x_i} = \tilde{\mathcal{F}}_1,\quad v-\bar b\,\sigma = \tilde{\mathcal{F}}_2,\quad (x,t)\in(B_r\cap\gamma_0)\times(0,T), \tag{10}$$

где

$$\tilde{\mathcal{F}}_0 = \eta\mathcal{F}_0-\sum_i a_i\eta\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-a\sigma-2\sum_{i,j}a_{ij}\,\theta_{x_i}\,\eta_{x_j}-$$
$$-\theta\sum_{i,j}a_{ij}\,\eta_{x_ix_j}+\sum_{i,j}(a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x_0,0))\,v_{x_ix_j}\equiv$$
$$\equiv\sum_{k,l,i}\eta\,\gamma_{kli}\,f_k\frac{\partial f_l}{\partial x_i}+\sum_{k,l,i}\bar\gamma_{kli}\,\varphi_k\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_i},\qquad \tilde{\mathcal{F}}_1 = \eta\,\mathcal{F}_1-$$
$$-\mu_1\eta s_{x_1}-\mu_2\sigma+\sum_i(\beta_i(x,t)-\beta_i(x_0,0))\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_i\theta\,\beta_i\,\eta_{x_i},$$
$$\bar\beta_i = \beta_i(x_0,0),\quad \tilde{\mathcal{F}}_2 = \eta\,\mathcal{F}_2+(b(x,t)-b(x_0,0))\,\sigma,\quad \bar b = b(x_0,0).$$

В шаре $B_r(x_0)$ перейдем к местной системе координат $z=B(x-x_0)$, где B — ортогональная матрица, и z_2 направлена по внутренней к γ_0 нормали, и пусть $u(z,t)=v(x,t)$, $\rho(z_1,t)=\sigma(x_1,t)$. В новых переменных получим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u = \tilde{\mathcal{F}}_0(x(z),t),\quad (z,t)\in(B_r\cap\Omega)\times(0,T);$$
$$\mu\frac{\partial\rho}{\partial t}+d_1\frac{\partial u}{\partial x_2} = \tilde{\mathcal{F}}_1(x(z),t),\quad u-d_2\rho = \tilde{\mathcal{F}}_2(x(z),t),\quad (z,t)\in(\gamma_0\cap B_r)\times(0,T), \tag{11}$$

причем $\tilde{\mathcal{F}}_0$ сохраняет прежнюю структуру и нормы правых частей в переменных $\{x\}$ и $\{z\}$ эквивалентны, $d_1=(1+\xi_{0\,x_1}^2(x_0))^{1/2}$, $d_2=-w_{x_2}(x_0)$. Для рассматриваемого случая $\xi_0=\mathrm{const}$ имеем $d_1=1$, γ_0 — плоский кусок границы области. Доопределяя нулем финитные функции $u(z,t)$, $\rho(z_1,t)$ на все полупространство R_2^+, получаем для них соотношения (11) в $R_{2,T}^+=R_2^+\times(0,T)$. Исследование свойств решения задачи (11) в $R_{2,T}^+$ — основной момент при доказательстве существования оператора A^{-1} и получения априорных оценок.

Рассмотрим вспомогательную задачу нахождения функции $u(z,t)$ по условиям

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u = f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_i},\quad (x,t)\in R_{2,T}^+,$$
$$u(x_1,0.\,t)=0,\quad u(x,0)=0, \tag{12}$$

где f_k — финитные функции. Пусть $R[f] = \langle f \rangle_t^{(\alpha)} + [f]^{(\alpha,\alpha)} + |\nabla f|^{(0)} + |f|^{(0)}$, $|f|^{(0)} = \max |f|$. Пусть $f_0 = f_1 \, \partial f_2 / \partial x_i$, тогда в силу неравенства $[uv]^{(\alpha,\beta)} \leq$ $\leq |v|^{(0)} [u]^{(\alpha,\beta)} + \langle u \rangle_x^{(\alpha)} \langle v \rangle_t^{(\beta)} + \langle u \rangle_t^{(\beta)} \langle v \rangle_x^{(\alpha)} + |u|^{(0)} [v]^{(\alpha,\beta)}$ имеем $E^{\alpha,\alpha/2}[f_0] \leq$ $\leq \| f_2 \|_{1+\alpha} \, R[f_1]$. Решение задачи (12) можно представить с помощью функции Грина $G_\varepsilon(x, y, t, \tau) = \Gamma_\varepsilon(x' - y', \, x_n - y_n, \, t - \tau) - \Gamma_\varepsilon(x' - y', \, -x_n - y_n, \, t - \tau)$ так, что

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{R_n^+} G_\varepsilon(x, y, t, \tau) \, f_0(y, \tau) \, dy,$$

$$\Gamma_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{n/2-1} (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-x^2 \varepsilon / 4t\right), \quad n = 2. \tag{13}$$

Используя те же соображения, которые применяются при оценке объемного потенциала для уравнения теплопроводности [4, с. 321], можно получить равномерную по ε оценку

$$\left\langle D_x^2 u \right\rangle_x^{(\alpha)} \leq c \left\langle f_0 \right\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{14}$$

Далее можно получить представление при $\Delta t > 0$

$$\Phi(x, t) = \frac{u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x, \, t - \Delta t)}{(\Delta t)^{\alpha/2}} =$$

$$= \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{R_n^+} G_{\varepsilon xx}(x, y, t, \tau) [\varphi(y, \tau) - \varphi(x, \tau)] \, dy,$$

где $\varphi(y, \tau) = [f_0(y, \tau) - f_0(y, \, \tau - \Delta t)] / (\Delta t)^{\alpha/2}$.

Для функции $\Phi(x, t)$ имеем оценку вида (14), откуда следует неравенство

$$[u_{xx}]^{(\alpha, \alpha/2)} \leq c \, [f_0]^{(\alpha, \alpha/2)}. \tag{15}$$

Стандартным образом могут быть получены равномерные по ε оценки

$$\left| \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{(0)} \leq c \, t^{\alpha/2} \left\langle f_0 \right\rangle_t^{(\alpha/2)} + \left| f_0 \right|^{(0)}, \quad \left\langle \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_t^{(\alpha/2)} \leq c \left\langle f_0 \right\rangle_t^{(\alpha/2)}. \tag{16}$$

Некоторые трудности появляются при получении оценок $\langle u_x \rangle_t^{(\alpha)}$, $[u_x]^{(\alpha,\alpha)}$, и именно в этом месте используется специальная структура правой части в (12). Полагая $f_0 = 0$ при $t < 0$, из (13) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int\limits_{R_n^+} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_k} f_1(y, t - \tau) \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(y, t - \tau) \, dy.$$

Пусть $[F(x, t)] = F(x, t) - F(x, \bar{t})$, $\bar{t} = t - \Delta t$. Тогда

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x_k} \right] = \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int\limits_{R_n^+} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_k}(x, y, \tau) [f_1(y, t - \tau)] \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(y, t - \tau) \, dy \, +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int\limits_{R_n^+} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_k}(x, y, \tau) \, f_1(y, \bar{t} - \tau) \left[\frac{\partial f_2}{\partial y_i}(y, t - \tau) \right] dy = I_1 + I_2.$$

Вследствие финитности функции f_0 имеем оценку $(n = 2)$

$$|I_1| \le c\langle f_1\rangle_t^{(\alpha)}|\nabla f_2|^{(0)}|\Delta t|^\alpha \int_0^\infty d\tau \int_{|y|\le R} \varepsilon^{1/2}\tau^{-3/2}\exp(-y^2\varepsilon/8\tau)\,dy =$$

$$= (\tau=\varepsilon s) = c\langle f_1\rangle_t^{(\alpha)}|\nabla f_2|^{(0)}|\Delta t|^\alpha \int_0^\infty ds\; s^{-3/2} \int_{|y|\le R} \exp(-y^2/8s)\,dy \le$$

$$\le c\langle f_1\rangle_t^{(\alpha)}|\nabla f_2|^{(0)}|\Delta t|^\alpha \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1/2}} \left\{\begin{matrix} 1 & \text{при } s\le 1 \\ R^2 s^{-1} & \text{при } s>1 \end{matrix}\right\} \le$$

$$\le c\max(1, R^2)\langle f_1\rangle_t^{(\alpha)}|\nabla f_2|^{(0)}|\Delta t|^\alpha.$$

После интегрирования по частям получим

$$I_2 = \int_0^\infty d\tau \int_{R_n^+} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_k}(x,y,\tau) f_1(y,\bar t-\tau)\frac{\partial}{\partial y_i}\{[f_2(y,t-\tau)]-[f_2(x,t-\tau)]\}\,dy =$$

$$= -\int_0^\infty d\tau \int_{R_n^+} \frac{\partial^2 G_\varepsilon}{\partial x_k\,\partial y_i}(x,y,\tau) f_1(y,\bar t-\tau)\{[f_2(y,t-\tau)]-[f_2(x,t-\tau)]\}\,dy -$$

$$- \int_0^\infty d\tau \int_{R_n^+} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x_k}(x,y,\tau)\frac{\partial f_1}{\partial y_i}(y,\bar t-\tau)\{[f_2(y,t-\tau)]-[f_2(x,t-\tau)]\}\,dy =$$

$$= i_1 + i_2,$$

причем интеграл по $y_n = 0$ равен нулю, а оценки слагаемых i_1, i_2 проходят полностью аналогично оценке I_1. В результате находим

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}\right\rangle_t^{(\alpha)} \le c\left(|f_1|^{(0)}[f_2]^{(\alpha,\alpha)} + \langle f_1\rangle_t^{(\alpha)}|\nabla f_2|^{(0)}\right).$$

Используя аналогичные рассуждения, получаем равномерную по ε оценку

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]^{(\alpha,\alpha)} \le c\left\{[f_1]^{(\alpha,\alpha)}|\nabla f_2|^{(0)} + \langle f_1\rangle_t^{(\alpha)}\langle f_{2x}\rangle_x^{(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + [f_2]^{(\alpha,\alpha)}\left(|f_1|^{(0)} + |\nabla f_1|^{(0)}\right)\right\}.$$

Полученные выше оценки дают следующее утверждение.

Лемма 1. *Решение задачи* (12) *равномерно по* ε *удовлетворяет оценке*

$$E^{\alpha,\alpha/2}[\varepsilon u_t] + \left\langle D_x^2 u\right\rangle_x^{(\alpha)} + \left[D_x^2 u\right]^{(\alpha,\alpha/2)} + \left\langle D_x u\right\rangle_t^{(\alpha)} +$$

$$+ \left[D_x u\right]^{(\alpha,\alpha)} \le c\,R[f_1]\,\|f_2\|_{E^{1+\alpha}}. \tag{17}$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу нахождения функций $u(x,t)$, $\rho(x_1,t)$ по условиям

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x,t)\in R_{2,T}^+;$$

$$\mu\frac{\partial\rho}{\partial t} - d_1\frac{\partial u}{\partial x_2} = f_1, \quad u - d_2\rho = f_2 \quad \text{при} \quad x_2 = 0. \tag{18}$$

Лемма 2. *Задача* (18) *имеет единственное решение и равномерно по* ε *выполняется оценка*

$$\|u\|_{\overset{0}{P}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}}+\left\|u\,|_{x_2=0}\right\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}}+\|\rho\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}} \le c\left(\|f_1\|_{\overset{0}{E}{}^{1+\alpha}}+\|f_2\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}}\right). \tag{19}$$

Доказательство этого утверждения изложено в работе [6]. Здесь только напомним, что разрешимость задачи (18) сразу получаем после применения к ней преобразования Фурье и Лапласа. Пусть

$$\tilde{f}(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\int\limits_R e^{-i\lambda x} f(x,t)\,dx\,dt,$$

тогда из (18) следует

$$\tilde{\rho}(\lambda,p) = \frac{\tilde{f}_1-\mu d_2^{-1}p\tilde{f}_2}{\mu p+d_1 d_2\sqrt{\varepsilon p+\lambda^2}}+d_2^{-1}\tilde{f}_2,$$

$$\tilde{u}(\lambda,x_2,p) = (d_2\tilde{\rho}+\tilde{f}_2)\exp\left(-x_2\sqrt{\varepsilon p+\lambda^2}\right),$$

причем прообразом функции $\tilde{f}_1-\mu d_2^{-1}p\tilde{f}_2$ является функция из $E^{1+\alpha}$. Доказательство оценки (19) сводится к получению сответствующих оценок норм функций $u(x,t)$, $\rho(x_1,t)$, равномерных по ε при обратных преобразованиях Фурье и Лапласа.

Оценки (17) и (19) дают вместе оценки старших полунорм функции $u(z,t)$ и нормы функции $\rho(z_1,t)$ для задачи (11). Поскольку $u(z,t)$ финитная функция, оценки ее младших полунорм можно получить через старшие. Например, $\langle u_{xx}\rangle_t^{(\alpha/2)} \le c r^\alpha [u_{xx}]^{(\alpha,\alpha/2)}$, $|u|^{(0)} \le t^\alpha\langle u\rangle_t^{(\alpha)}$ и т. д., так что при достаточно малых r и t для задачи (11) получаем оценку

$$\|u\|_{\overset{0}{P}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}}+\left\|u\,|_{z_2=0}\right\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}}+\|\rho\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}} \le$$

$$\le c\left\{\sum_{k,l} R[\varphi_k]\|\varphi_l\|_{\overset{0}{E}{}^{1+\alpha}}+\sum_{k,l} R[f_k]\|f_l\|_{\overset{0}{E}{}^{1+\alpha}}+\left\|\tilde{\mathcal{F}}_1\right\|_{\overset{0}{E}{}^{1+\alpha}}+\left\|\tilde{\mathcal{F}}_2\right\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}}\right\},$$

где c не звисит от ε.

Поскольку аналогичные оценки справедливы для любого шара $B_r(x_0)$, $x_0\in\in\overline{\Omega}$, и так как нормы функции $\theta(x,t)$ и $s(x_1,t)$, входящие в выражения $R[\varphi_k]\|\varphi_l\|_{E^{1+\alpha}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_1$, $\tilde{\mathcal{F}}_2$, можно оценить через $\|\theta\|_{E^{2+\alpha}}$, $\|s\|_{\hat{E}^{2+\alpha}}$ с множителями вида $g(r,t)$, причем $g(r,t)\to 0$ при $t\to 0$, $r\to 0$, то в результате для решения системы (9) получаем оценку

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{\overset{0}{P}{}_{\varepsilon}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)}+\left\|\theta\,|_{\Gamma_T}\right\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)}+\|s\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)} &\le c\,\mathfrak{M}(\mathcal{F}) \equiv \\ \equiv c\left\{\sum_{k,l} R[f_k]\|f_l\|_{\overset{0}{E}{}^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T)}+\|\mathcal{F}_1\|_{\overset{0}{E}{}^{1+\alpha}(\overline{D}_T)}+\|\mathcal{F}_2\|_{\overset{0}{\hat{E}}{}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)}\right\}&,\end{aligned} \tag{20}$$

где c не звисит от ε.

Разрешимость системы (9) доказывается с помощью построения регуляризатора аналогично тому, как это делается для параболических уравнений [4, гл. 4], на основе решения задачи (11) в $R_{2,T}^+$ и решения более простых модельных задач в случае $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \gamma_0$. При этом в силу выбора пространств и непосредственного обращения главной части оператора, содержащей член $\varepsilon \theta_t$, интервал по времени, на котором существует решение, не зависит от ε.

Лемма 3. *При достаточно малом T_0, не зависящем от ε, для всех $0 < t \le T_0$ существует решение задачи* (9) *и выполняется оценка* (20).

4. Разрешимость нелинейной задачи. В пространстве $\mathcal{H}_1$ рассмотрим множество $K_r = \{\psi \in \mathcal{H}_1 : \|\psi\| \le r\}$, $r \le r_0 < \infty$.

Лемма 4. *Для задачи* (7) *справедливы неравенства*

$$\mathfrak{M}(F(\psi_1) - F(\psi_2)) \le c\,\delta(r) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{H}_1},$$
$$\mathfrak{M}(F(0)) \le c\,T^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad \psi_1, \psi_2 \in K_r, \quad \delta(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{21}$$

Для доказательства первого неравенства в (21) заметим, что $F_i(\psi) \equiv F_i(\theta, s)$, как это следует из определения в (6), состоит из суммы заданной функции $\Phi_i(0,0)$ и слагаемых квадратичных относительно θ, s и их производных, поскольку все линейные относительно θ, s и их производных слагаемые были отнесены в левую часть соотношений (6). Что касается второго неравенства в (21), то, например, имеем

$$\Phi_0(0,0) = -\varepsilon x_2 (\ln \varphi_0)_t\, w_{x_2} + \nabla^2_{\xi_1} w - \varepsilon x_2 w_{x_2} \xi_{1t}(x_1, 0) / \xi_0^{-1}(x_1),$$

$$\varphi_0 = \frac{\xi_0(x_1)}{\xi_1(x_1, t)},$$

так что по построению функции $\xi_1(x_1, t)$ и из начальных условий задачи

$$\Phi_0(0,0)(x,0) = 0, \quad D_x^k \Phi_0(0,0) \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,\,(1+\alpha)/2}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{22}$$

Представим функцию $\Phi_0(0,0)(x,t)$ в виде

$$\Phi_0(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \Phi_0(0,0)(x_1, \xi, t)\, d\xi,$$

поэтому для получения нужной оценки достаточно оценить $\|\Phi_0(0,0)\|_{E^{1+\alpha}}$. Из (22) легко следуют оценки

$$\langle D_x \Phi_0(0,0) \rangle_t^{(\alpha/2)} + \langle D_x \Phi_0(0,0) \rangle_x^{(\alpha)} \le c\, t^{1/2} \left\| D_x \Phi_0(0,0) \right\|_{H^{1+\alpha,\,(1+\alpha)/2}},$$

$$[\Phi_0(0,0)]^{(\alpha,\alpha)} \le c\, t^{\frac{1-\alpha}{2}} \left\| D_x \Phi_0(0,0) \right\|_{H^{1+\alpha,\,(1+\alpha)/2}}$$

и т. д., что в результате дает $\|\Phi_0(0,0)\|_{E^{1+\alpha}} \le c\, T^{(1-\alpha)/2}$. Аналогичные оценки справедливы для функции $\Phi_1(0,0)$.

Первое неравенство в (21) обеспечивает сжимаемость оператора g из (8), а комбинация обоих неравенств (21) позволяет утверждать, что g отображает шар K_r в себя при достаточно малых r и T. Тогда теорема о неподвижной точке для сжимающего отображения приводит к доказательству теоремы 2.

Доказанное утверждение означает, что при $\varepsilon > 0$ существует гладкое решение задачи

$$\varepsilon \frac{\partial \theta^{(\varepsilon)}}{\partial t} - L_0 \theta^{(\varepsilon)} = F_0(\theta^{(\varepsilon)}, s^{(\varepsilon)}) - \Phi_{0s}(0,0)\, s^{(\varepsilon)} \equiv \overline{F}_0(\theta^{(\varepsilon)}, s^{(\varepsilon)}), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$
$$\frac{\partial \theta^{(\varepsilon)}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\pm 1} = 0, \quad \theta^{(\varepsilon)}\Big|_{\gamma_0} = -b s^{(\varepsilon)}, \quad \theta^{(\varepsilon)}\Big|_{x_2=0} = 0, \quad \theta^{(\varepsilon)}(x,0) = 0, \tag{23}$$

и, следовательно, удовлетворяется интегральное тождество

$$-\int_{\Omega} \varepsilon\, \theta^{(\varepsilon)} \varphi_t\, dx - \int_{\Omega_T} L_0\, \theta^{(\varepsilon)} \varphi\, dx\, dt = \int_{\Omega_T} \overline{F}_0\left(\theta^{(\varepsilon)}, s^{(\varepsilon)}\right) \varphi\, dx\, dt, \quad 0 < T \le T_0, \tag{24}$$

для всех достаточно гладких функций $\varphi(x,t)$, $\varphi(x,T) = 0$. Поскольку множество пар $\left(\theta^{(\varepsilon)}, s^{(\varepsilon)}\right)$ принадлежит компактному подмножеству $\left\{ \left\| \theta^{(\varepsilon)} \right\|_{E^{2+\alpha}} + \left\| s^{(\varepsilon)} \right\|_{\hat{E}^{2+\alpha}} \le r \right\}$, то из него можно выделить сходящуюся подпоследовательность такую, что $\theta^{(\varepsilon_k)} \to \theta$, $s^{(\varepsilon_k)} \to s$, $\varepsilon_k \to 0$, в указанных нормах. Переходя по выбранной подпоследовательности к пределу в интегральном тождестве, получаем, что функции $\theta(x,t)$, $s(x_1,t)$ являются решением задачи Hele – Shaw, что и доказывает теорему 1.

1. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133 – 185.
2. *Di Benedetto E., Friedman A.* The ill-posed Hele – Shaw model and the Stefan problem for supercooled water // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – **282**, № 1 – P. 183 – 203.
3. *Базалий Б. В.* Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 10. – С. 1299 – 1315.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Базалий Б. В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 3 – 7.
6. *Базалий Б. В.* Об оценках решения одной модельной задачи сопряжения в теории задач со свободной границей // Дифференц. уравнения. – 1997. – **33**, № 10. – С. 1374 – 1381.

Получено 18.11.96