УДК 519.21

В. В. Булдигін, В. М. Мельник, В. Г. Шпортюк
(Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ПРО ТЕОРЕМИ ЛЕВІ – БАКСТЕРА ДЛЯ ДРОБОВИХ ПОЛІВ. I

We consider shot noise fields generated by countably additive stochastically continuous homogeneous random measures with independent values on disjoint sets. We establish necessary and sufficient conditions under which the shot noise fields possess the Levy – Bakster property on both fixed and increasing parametric sets.

Розглянуто дробові поля, породжені зліченно адитивними стохастично неперервними однорідними випадковими мірами з незалежними значеннями на множинах, які не перетинаються. Встановлено необхідні та достатні умови, при яких дробові поля мають властивість Леві – Бакстера на фіксованій та зростаючій параметричних множинах.

Вступ. В теорії випадкових процесів та полів і в різних застосуваннях в радіофізиці, голографії, теорії зв'язку важливу роль відіграють дробові процеси та поля, які зображаються у вигляді стохастичних інтегралів за мірами з незалежними значеннями, на множинах, які не перетинаються. Загальну теорію таких інтегралів викладено у [1]. Різноманітні прикладні задачі, в яких як математичні моделі фізичних явищ виникають дробові поля, наведено у [2, 3]. Локальні властивості дробових процесів та полів, звичайні та функціональні граничні теореми, оцінки для розподілу супремума та інші властивості досліджувались, наприклад, у роботах [4 – 12]. У цій статті вивчаються загальні необхідні та достатні умови, при яких дробові поля мають властивість Леві – Бакстера. При цьому окремо досліджуються ситуації фіксованої та зростаючої параметричної множини. Для гауссових процессів та полів відповідні умови досліджувались у [13 – 21]. Серед робіт, в яких досліджувались теореми Леві – Бакстера для негауссових процесів та полів відзначимо роботи [22 – 24]. Зауважимо, що частково результати даної роботи було анонсовано для дробових процесів у [25, 26], а для дробових полів у [27]. Стаття розділена на три частини.

1. Дробові поля. Нехай $\mathbf{R}^m$ — m-мірний дійсний координатний евклідів простір з точками $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_m)$; $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — стандартний скалярний добуток у $\mathbf{R}^m$; $\|\cdot\|$ — відповідна евклідова норма; $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ — σ-алгебра борелевих множин у $\mathbf{R}^m$; $\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ — σ-алгебра борелевих множин у $\mathbf{R}\setminus\{0\}$; $\operatorname{mes}(B)$ — міра Лебега множини B; $\mathbf{1}_B$ — індикатор множини B; $\mathbf{N}$ — множина натуральних чисел; $L_2(\mathbf{R}^m)$ — простір, взагалі кажучи, комплекснозначних функцій, інтегровних у квадраті на $\mathbf{R}^m$. Як звичайно, запис $k = \overline{1, n}$ означатиме, що k пробігає всі цілі значення від 1 до n. Зауважимо, що всі випадкові об'єкти, які будуть розглядатися, визначені на основному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$; символ l. i. m. — означатиме границю у середньому квадратичному, а $[\bar{a},\bar{b}]$, $(\bar{a},\bar{b}]$, $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$, $\bar{b} \in \mathbf{R}^m$ — m-вимірні інтервали у $\mathbf{R}^m$, тобто множини вигляду

$$[\bar{a},\bar{b}] = [a_1, b_1]\times\ldots\times[a_m, b_m], \quad a_i \le b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$(\bar{a},\bar{b}] = (a_1, b_1]\times\ldots\times(a_m, b_m], \quad a_i < b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Нехай $\mu(b)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ — *зліченно адитивна стохастично неперервна випадкова міра з незалежними значеннями на множинах, які не перетинаються* [1]. Для скорочення будемо вважати, що це міра з незалежними значеннями. Відомо [1], що міра $\mu(b)$ допускає зображення

$$\mu(B) = l(B) + \mu_0(B) + \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}} x\,\mathbf{1}_{\{|x|\le 1\}}\,\mathbf{1}_B\,d(\nu - \Pi) + \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}} x\,\mathbf{1}_{\{|x|>1\}}\,\mathbf{1}_B\,d\nu,$$

де $l(B)$ — деякий невипадковий заряд; $\mu_0(B)$ — гауссова центрована зліченно адитивна стохастично неперервна міра з незалежними значеннями; $\nu(U\times B)$, $U \in B(\mathbf{R}\setminus\{0\})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ — незалежна від неї пуассонова міра з незалежними значеннями, $\Pi(U\times B) = \mathbf{E}\,\nu(U\times B)$ — міра Леві випадкової міри $\mu(B)$.

Нехай $\mu(B)$ — *однорідна міра*, тобто для довільного $\bar{a} \in \mathbf{R}^m$ $\mu(B)$ і $\mu(B + \bar{a})$ мають однаковий розподіл. Тоді заряд l та міра Π на інтервалах $(\bar{a}, \bar{b}] \in \mathbf{R}^m$ мають вигляд

$$\Pi\left(U\times(\bar{a},\bar{b}]\right) = \mathrm{mes}\Pi\left((\bar{a},\bar{b}]\right)\Pi(U); \quad l(B) = \mathrm{A}\,\mathrm{mes}(B),$$

де Π — деяка σ-адитивна міра на $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Якщо $\mu_0(B)$ — така, що $\mathbf{E}\,\mu_0(B) = 0$, $\mathbf{E}\mu_0^2(B) = \mathrm{mes}(B)$ для всіх $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$, то цю міру називають *стандартною вінеровою мірою* і позначають $\mathbf{W}$.

Нехай $\int_{\mathbf{R}} |x|\,\Pi(dx) < \infty$. Тоді міра μ допускає зображення

$$\mu(B) = l'(B) + \sigma_W \mathbf{W}(B) + \mu_1(B),$$

де l' — невипадковий заряд такий, що

$$l'(B) = A_1\,\mathrm{mes}(B), \quad A_1 = A + \int\limits_{|x|>1} x\,\Pi(dx),$$

а міра μ_1 — є центрованою зліченно адитивною стохастично неперервною мірою з незалежними значеннями без гауссової компоненти і може бути подана у наступному вигляді:

$$\mu_1(B) = \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}} x\,\mathbf{1}_B\,d(\nu - \Pi).$$

Лема 1. *Нехай випадкова міра μ є зліченно адитивною стохастично неперервною однорідною випадковою мірою з незалежними значеннями, що задовольняє наступні умови:*

$$\sigma_1 = \int\limits_{\mathbf{R}} |x|\,\Pi(dx) < \infty; \quad \sigma_2 = \int\limits_{\mathbf{R}} x^2\,\Pi(dx) < \infty,$$

а невипадкова функція f належить простору $L_1(\mathbf{R}^m) \cap L_2(\mathbf{R}^m)$. Тоді визначений стохастичний інтеграл

$$\mathbf{J}(f) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t})\,d\mu(\bar{t}) \tag{1}$$

як інтеграл за мірою з ортогональними значеннями і його характеристичний функціонал має вигляд

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\exp\{i\lambda\mathbf{J}(f)\} = \exp\{iA_1\lambda\int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t})\,d\bar{t} -$$

$$- \frac{\lambda^2\sigma_W^2}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^m} f^2(\bar{t})\,d\bar{t} + \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}} \left(\exp\{i\lambda x f(\bar{t})\} - 1 - i\lambda x f(\bar{t})\right)\Pi(dx)\,d\bar{t}\}.$$

Доведення леми 1 повторює доведення аналогічної леми, викладеної в [1, 12].

***Зауваження* 1.** Якщо $l'(B) \equiv 0$, то інтеграл буде визначений для функцій f із $L_2(\mathbf{R}^m)$ і його характеристичний функціонал матиме вигляд

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\exp\{i\lambda\mathbf{J}(f)\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma_W^2}{2}\int_{\mathbf{R}^m} f^2(\bar{t}) + \int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}}\left(\exp\{i\lambda x f(\bar{t})\} - 1 - i\lambda x f(\bar{t})\right)\Pi(dx)d\bar{t}\right\}.$$

Встановимо зв'язок між стохастичними інтегралами за випадковими мірами з незалежними значеннями та стохастичними інтегралами за випадковими полями з незалежними приростами [28].

Розглянемо випадкове поле $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$. Нагадаємо, що *приростом поля* $\xi(\bar{t})$ *на* m*-вимірному інтервалі* $\left(\bar{a}, \bar{b}\right] \subset \mathbf{R}^m$ називається величина

$$\Delta_{\bar{b}-\bar{a}}\xi(\bar{a}) = \left(\prod_{r=1}^{m}\Delta_{r,b_r-a_r}\right)\xi(\bar{a}),$$

де

$$\Delta_{r,h}\xi(\bar{a}) =$$

$$= \xi(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_m) - \xi(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_m). \qquad (2)$$

Випадкове поле $\xi(\bar{t})$ називається *полем з незалежними приростами,* якщо для довільного натурального числа $n \geq 1$ і довільного набору інтервалів $(\bar{s}_k, \bar{t}_k]$, $k = \overline{1, n}$, які попарно не перетинаються, прирости $\Delta_{\bar{t}_k - \bar{s}_k}\xi(\bar{s}_k)$, $k = \overline{1, n}$, є незалежними у сукупності випадковими величинами.

Розглянемо дійсне сепарабельне стохастично неперервне поле з незалежними приростами $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$. Нехай $\mathcal{R}_0$ — зліченне кільце, породжене півкільцем $\mathcal{P}$ напіввідкритих інтервалів з раціональними кінцями. Визначимо на $\mathcal{P}$ випадкову міру, поклавши $\mu_\xi((\bar{s}, \bar{t}]) = \Delta_{\bar{t}-\bar{s}}\xi(\bar{s})$, і природнім чином продовжимо її на $\mathcal{R}_0$. Очевидно, що продовжена міра μ_ξ на $\mathcal{R}_0$ є стохастично неперервною центрованою випадковою мірою з незалежними значеннями.

Нехай поле $\xi(\bar{t})$ таке, що:

1) для довільної множини $B \in \mathbf{R}^m$ $\mathbf{E}\left(\mu_\xi(B)\right)^2 < \infty$;

2) для довільної послідовності $\{B_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{R}_0$ такої, що $B_n \supset B_{n+1}$, $n \geq 1$, і $\bigcap_n B_n = \varnothing$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\mu_\xi(B_n)\right)^2 = 0.$$

Тоді структурна функція $m(B) = \mathbf{E}\left(\mu_\xi(B)\right)^2$ є неперервною скінченною мірою на $\mathcal{R}_0$ і, за теоремою Каратеодорі, допускає продовження до σ-адитивної міри на σ-кільці $\mathcal{R} = \sigma(\mathcal{R}_0)$. Отже, міра μ_ξ, породжена полем $\xi(\bar{t})$, задовольняє умови теореми 40 [1, с. 144], згідно з якою міру μ_ξ, породжену полем з незалежними приростами $\xi(\bar{t})$ на $\mathcal{R}_0$, можна продовжити до σ-адитивної міри μ_ξ на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ і, крім цього, для довільної функції f із $L_2(\mathbf{R}^m, m(\cdot))$ визначений стохастичний інтеграл

$$\int_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t})\, d\mu_\xi(\bar{t}).$$

Цей інтеграл називають стохастичним інтегралом за полем $\xi(\bar{t})$. Така редукція дає можливість розглядати лише інтеграли за стохастичними мірами з незалежними значеннями, які у випадку поля з незалежними однорідними приростами співпадають з (1).

Нехай $f(\bar{t}-\bar{s})$ — така дійсна функція, що для довільного $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$, $f_{\bar{t}} = (f(\bar{t}-\bar{s}),\ \bar{s} \in \mathbf{R}^m)$ належить $L_2(\mathbf{R}^m) \cap L_1(\mathbf{R}^m)$.

Згідно з лемою 1, визначене випадкове поле

$$\kappa(\bar{t}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}-\bar{s})\, d\mu(\bar{s})$$

і для довільних $\{\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n\} \subset \mathbf{R}^m$, $n \geq 1$, характеристичний функціонал випадкового вектора $\{\kappa(\bar{t}_1), \ldots, \kappa(\bar{t}_n)\}$ має вигляд

$$\varphi_{\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\kappa(\bar{t}_k)\right\} =$$

$$= \exp\left\{iA_1\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}_k-\bar{s})\,d\bar{s} \; - \right.$$

$$- \frac{\sigma^2 W}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\lambda_k\lambda_p\int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}_k-\bar{s})\, f(\bar{t}_p-\bar{s})\,d\bar{s} \; +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}}\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(\bar{t}_k-\bar{s})\,x\right\} - 1 \; - \right.$$

$$\left. - \; i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(\bar{t}_k-\bar{s})\,x\right)\Pi(dx)\,d\bar{s}. \tag{3}$$

Зауважимо, що поле $\kappa(\bar{t})$ є стаціонарним як у широкому, так і у вузькому розумінні. Надалі поле $\kappa(\bar{t})$ будемо називати *однорідним дробовим полем, породженим функцією відгуку* f *і випадковою мірою* μ.

Якщо $\mu = \sigma_W \mathbf{W}$, то поле $\kappa(\bar{t})$ будемо називати *однорідним вінеровим дробовим полем,* а якщо $\mu = \mu_1$, то поле $\kappa(\bar{t})$ будемо називати *однорідним узагальненим пуассоновим дробовим полем.*

Зауважимо, що

$$\mathbf{E}\,\kappa(\bar{t}) = A_1\int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t})\,d\bar{t},$$

а кореляційна функція поля $\kappa(\bar{t})$ має вигляд

$$R(\bar{t}_1,\bar{t}_2) = R(\bar{t}_1-\bar{t}_2) = \left(\sigma_2-\sigma_W^2\right)\int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}_1-\bar{t}_2+\bar{s})\, f(\bar{s})\,d\bar{s},\quad \bar{t}_1,\ \bar{t},\ \bar{s} \in \mathbf{R}^m.$$

Зауваження 2. Оскільки надалі будуть розглядатись функціонали, залежні від приростів поля $\kappa(\bar{t})$, то, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $A_1 = 0$. При цьому умову, що функція f належить простору $L_1(\mathbf{R}^m) \cap L_2(\mathbf{R}^m)$, можна замінити умовою, що функція f належить простору $L_2(\mathbf{R}^m)$.

2. Теореми Леві – Бакстера для однорідних дробових полів на фіксованому параметричному інтервалі. Розглянемо однорідне дробове поле

$$\kappa(\bar{t}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}-\bar{s})\,d\mu(\bar{s}),\quad \bar{t} \in [0,1]^m,$$

породжене функцією відгуку f і мірою з незалежними значеннями μ, які задовольняють умови

$$\int\limits_{\mathbf{R}^m} |f(\bar{s})|^k \, d\bar{s} < \infty, \quad k = \overline{1, 4}, \tag{4}$$

$$\sigma_k = \int\limits_{\mathbf{R}} |x|^k \, \Pi(dx) < \infty, \quad k = \overline{1, 4}, \tag{5}$$

Нагадаємо, що приріст порядку $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, де p_r — ціле невід'ємне число, $r = \overline{1, m}$, випадкового поля $\kappa(\bar{t})$ на m-вимірному кубі $[\bar{t}, \bar{t} + \bar{h}]$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$, $\bar{h} \in \mathbf{R}^m$, $\bar{h} = (h, \ldots, h)$, визначається рекурентними співвідношеннями:

$$\Delta_h^{\bar{p}} \kappa(\bar{t}) = \left(\prod_{r=1}^{m} \Delta_{r,h}^{p_r} \kappa(\bar{t}) \right);$$

$$\Delta_{r,h}^{p_r} \kappa(\bar{t}) = \Delta_{r,h} \left(\Delta_{r,h}^{p_r - 1} \kappa(\bar{t}) \right),$$

де $\Delta_{r,h}$ — різницевий оператор, визначений співвідношенням (2).

Зауважимо, що при $p_r = 0$, r-й співмножник у добутку різницевих операторів — тотожний оператор.

Влаштуємо розбиття інтервалу $[0, 1]^m$. Для цього розглянемо довільну монотонно зростаючу до нескінченності послідовність натуральних чисел $(N_n, n \geq 1)$ і для кожного $n \in \mathbf{N}$ розіб'ємо інтервал $[0, 1]$ точками $T_n = \{ t_k = k\tau_n, k = \overline{1, N_n} \}$, де $\tau_n = N_n^{-1}$. Множина T_n^m утворює розбиття інтервалу $[0, 1]^m$.

Розглянемо послідовність сум

$$S_n^{(2)}(\kappa) = c_n \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} \kappa((\bar{k} - \bar{1}) \tau_n) \right)^2, \quad n \geq 1,$$

де $(c_n, n \geq 1)$ — деяка невипадкова нормуюча послідовність.

Тут ми скористались позначеннями

$$\bar{N} = (N_n, \ldots, N_n) \in \mathbf{N}^m, \quad \bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{N}^m, \quad \bar{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{N}^m,$$

$$\sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} = \sum_{k_1=1}^{N_n} \cdots \sum_{k_m=1}^{N_n}.$$

Теорема 1. *Послідовність* $(S_n^{(2)}(\kappa), n \geq 1)$ *збігається у середньому квадратичному до невипадкової сталої* $c \geq 0$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} c_n \left(\sigma_2 + \sigma_W^2 \right) \tau_n^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 d\bar{s} = c;$

2) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} c_n^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2 \right)^2 \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right) \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{j}) \tau_n + \bar{s} \right) \right) d\bar{s} \right)^2 = 0;$

3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} c_n^2 \sigma_4 \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{j}) \tau_n + \bar{s} \right) \right)^2 \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 d\bar{s} = 0.$

Доведення. Відмітимо, що

$$\mathbf{E}\, S_n^{(2)}(\kappa) \;=\; \mathbf{E}\Big(c_n \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\, \kappa((\bar{k}-\bar{1})\tau_n) \Big)^2 \Big) \;=$$

$$=\; c_n \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2,$$

де

$$\kappa_{\bar{k}} \;=\; \int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f\big((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\big)\Big) d\mu(\bar{s}).$$

Оскільки умови (4) і (5) забезпечують виконання умов теореми про диференціювання за параметром під знаком невластивого інтегралу, то обчислимо $\mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2$, використовуючи співвідношення

$$\mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2 \;=\; -\, \frac{\partial^2}{\partial u^2} \Big(\varphi_{\kappa_{\bar{k}}}(u) \Big)\Big|_{u=0}, \tag{6}$$

де $\varphi_{\kappa_{\bar{k}}}(u)$ — характеристичний функціонал випадкової величини $\kappa_{\bar{k}}$. Із співвідношень (3) і (6) випливає

$$\mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2 \;=\; \big(\sigma_2 + \sigma_W^2\big) \int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f\big((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\big)\Big)^2 d\bar{s}.$$

Отже,

$$\mathbf{E}\, S_n^{(2)}(\kappa) \;=\; c_n\big(\sigma_2 + \sigma_W^2\big) \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f\big((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\big)\Big)^2 d\bar{s} \;=$$

$$=\; c_n\big(\sigma_2 + \sigma_W^2\big)\tau_n^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f(\bar{s})\Big)^2 d\bar{s}. \tag{7}$$

Обчислимо тепер дисперсію випадкової величини $S_n^{(2)}(\kappa)$.

Зазначимо, що

$$\mathbf{E}\Big(S_n^{(2)}(\kappa)\Big)^2 \;=\; c_n^2 \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \mathbf{E}\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f\big((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\big)\Big) d\mu(\bar{s})\Big)^2 \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f\big((\bar{j}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\big)\Big) d\mu(\bar{s})\Big)^2 \;=$$

$$=\; c_n^2 \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2\, \kappa_{\bar{j}}^2.$$

Оскільки

$$\mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2\, \kappa_{\bar{j}}^2 \;=\; \frac{\partial^4}{\partial u_1^2\, \partial u_2^2} \Big(\varphi_{\kappa_{\bar{k}},\, \kappa_{\bar{j}}}(u_1, u_2) \Big)\Big|_{u_1=0,\, u_2=0},$$

де $\varphi_{\kappa_{\bar{k}},\, \kappa_{\bar{j}}}(u_1, u_2)$ — сумісний характеристичний функціонал випадкових величин $\kappa_{\bar{k}}$, $\kappa_{\bar{j}}$, то із співвідношення (3) випливає

$$\mathbf{E}\, \kappa_{\bar{k}}^2\, \kappa_{\bar{j}}^2 \;=\; 2\big(\sigma_2 + \sigma_w^2\big)^2 \Big[\int\limits_{\mathbf{R}^m} \Big(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\; f\big((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\big)\Big)^2 d\bar{s} \;\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{j}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\right)\right)^2 d\bar{s} + 2\left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\right)\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{j}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\right)\right) d\bar{s}\right)^2 \Bigg] +$$

$$+ \sigma_4 \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{k}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\right)\right)^2 \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{j}-\bar{1})\tau_n - \bar{s}\right)\right)^2 d\bar{s}.$$

Отже,

$$\mathbf{D}\left(S_n^{(2)}(\kappa)\right) = \mathbf{E}\left(S_n^{(2)}(\kappa)\right)^2 - \left(\mathbf{E}\, S_n^{(2)}(\kappa)\right)^2 =$$

$$= 2c_n^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{k}-\bar{j})\tau_n + \bar{s}\right)\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f(\bar{s})\right) d\bar{s}\right)^2 + c_n^2 \sigma_4 \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f(\bar{s})\right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{k}-\bar{j})\tau_n + \bar{s}\right)\right)^2 d\bar{s}. \right. \tag{8}$$

Теорема випливає із співвідношень (7), (8) і того факту, що послідовність випадкових величин $(\xi_n,\ n \geq 1)$ зі скінченними другими моментами збігається у середньому квадратичному до невипадкової сталої c тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi_n = c; \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\xi_n = 0.$$

Теорему доведено.

Розглянемо однорідне вінерове дробове поле

$$\gamma(\bar{t}) = \sigma_W \int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}-\bar{s})\, d\mathbf{W}(\bar{s}), \quad \bar{t} \in [0, 1]^m,$$

породжене стандартною вінеровою мірою $\mathbf{W}$ і функцією відгуку f.

Наслідок 1. *Для того щоб послідовність* $(S_n^{(2)}(\gamma),\ n \geq 1)$ *збігалась у середньому квадратичному до невипадкової сталої* $c \geq 0$ *необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла умови:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \sigma_W^2 \tau_n^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f(\bar{s})\right)^2 d\bar{s} = c;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_W^2 \sigma_W^2 \sum\limits_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum\limits_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f\left((\bar{k}-\bar{j})\tau_n + \bar{s}\right)\right) \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n} f(\bar{s})\right) d\bar{s}\right)^2 = 0.$

Розглянемо однорідне узагальнене пуассонове дробове поле

$$\eta(\bar{t}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} f(\bar{t}-\bar{s})\, d\mu_1(\bar{s}), \quad \bar{t} \in [0, 1]^m,$$

породжене функцією відгуку f та випадковою мірою μ_1 з незалежними значеннями без гауссової компоненти, які задовольняють умови (4), (5).

Наслідок 2. *Для того щоб послідовність* $(S_n^{(2)}(\eta),\ n \geq 1)$ *збігалась у середньому квадратичному до невипадкової сталої* $c \geq 0$, *необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла умови:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n\, \sigma_2\, \tau_n^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 d\bar{s} \;=\; c;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^2\, \sigma_2^2 \sum\limits_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum\limits_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right) \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f\big((\bar{k}-\bar{j})\tau_n + \bar{s} \big) \right) d\bar{s} \right)^2 \;=\; 0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^2\, \sigma_4 \sum\limits_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum\limits_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 \left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f\big((\bar{k}-\bar{j})\tau_n + \bar{s} \big) \right)^2 d\bar{s} \;=\; 0.$

Із наслідків 1, 2 випливає, що умови 1, 2 теореми 1 є спільними для однорідних вінерових дробових полів і однорідних узагальнених пуассонових дробових полів. А умова 3 є специфічною умовою для однорідних узагальнених пуассонових дробових полів.

***Приклад* 1.** Розглянемо при $m = 1$ функцію відгуку

$$f(t) \;=\; \exp(-b|t|), \quad t \in R, \quad b > 0.$$

У цьому випадку при $p \geq 2$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(s) \right)^2 ds \;=\; \frac{8}{3} b^2 \tau_n^3 + o\left(\tau_n^3\right). \tag{9}$$

Тому перша умова наслідку 1 (наслідку 2) буде виконана, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} c_n\, \tau_n^2 \neq 0$. Надалі будемо вважати, що умови $p \geq 2$ і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n\, \tau_n^2 \neq 0$ виконуються.

Зауважимо, що при $|t| > \varepsilon > 0$ та $n \to \infty$ має місце наступна нерівність:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(t+s) \right) \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(s) \right) ds \;\leq\; K_1\, \tau_n^4 + o\left(\tau_n^4\right). \tag{10}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і розіб'ємо подвійну суму в умові 2 наслідку 1 (наслідку 2) на дві:

$$\sum_{k,j=1}^{N} \;=\; \sum_{|k-j|<\varepsilon N}^{N} + \sum_{|k-j|\geq\varepsilon N}^{N}.$$

Враховуючи співвідношення (9), (10), першу умову наслідку 1 (наслідку 2) та нерівність Коші – Буняковського, маємо

$$c_n^2\, \sigma_2^2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f((k-j)t+s) \right) \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(s) \right) ds \right)^2 \;\leq$$

$$\leq\; \frac{8}{3} K_2\, \varepsilon \sigma_2^2\, b^2\, c_n^2 \left(\tau_n^4 + o\left(\tau_n^4\right) \right) + K_3\, c_n^2\, \tau_n^6.$$

Зауважимо, що K_1, K_2 і K_3 — деякі скінченні сталі, причому K_3 — залежна від ε. Переходячи тепер в останньому співвідношенні до границі спочатку по $n \to \infty$, а потім по $\varepsilon \to 0$, бачимо, що умова 2 наслідку 1 (наслідку 2) виконується. Отже, однорідний вінерів дробовий процес $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, з функцією відгуку $f(t) = \exp(-b|t|)$ має властивість Леві – Бакстера. Однак у випадку однорідного узагальненого пуассонового дробового процесу умова 3 наслідку 2 не задовольняється. Дійсно, оскільки при $p \geq 2$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(s) \right)^4 ds \;=\; K_4\, \tau_n^5 + o\left(\tau_n^5\right), \quad K_4 \neq 0,$$

де K_4 — деяка скінченна стала, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} c_n^2 \, \sigma_4 \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f((k-j)t+s) \right)^2 \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(s) \right)^2 ds \;\geq$$

$$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} c_n^2 \, \sigma_4 \, \tau_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_{\tau_n}^{p} f(s) \right)^4 ds \;=\; K_5 \overline{\lim_{n\to\infty}} c_n^2 \, \tau_n^4 \;\neq\; 0,$$

де K_5 — деяка скінченна стала.

Таким чином, однорідний узагальнений пуассонів дробовий процес $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$, з функцією відгуку $f(t) = \exp(-b|t|)$ не має Леві – Бакстерової властивості. Приклад 1 показує, що властивість Леві – Бакстера на сталому інтервалі спостережень не виконується для однорідних узагальнених дробових процесів та полів, відмінних від вінерових, з природними функціями відгуку.

3. Теореми Леві – Бакстера для дробових полів на зростаючому інтервалі. Розширити клас функцій відгуку, для яких однорідні узагальнені дробові поля мають властивість Леві – Бакстера, можна, якщо від сталого параметричного інтервалу перейти до зростаючого. При цьому швидкість зростання інтервалу і швидкість подрібнення розбиття повинні бути узгоджені.

Розглянемо однорідне дробове поле $\kappa(\bar{t})$ на інтервалах $[0, \alpha_n]^m$, де $(\alpha_n, n \geq 1)$ — невипадкова послідовність додатних чисел таких, що $\alpha_n \uparrow \infty$.

Влаштуємо розбиття інтервалу $[0, \alpha_n]^m$. Для цього розіб'ємо інтервал $[0, \alpha_n]$ точками $T_n = \{ t_k = k\alpha_n\tau_n, \; k = \overline{1, N_n} \}$, де $(\tau_n, n \geq 1)$, $(N_n, n \geq 1)$ такі ж, як і у п. 2. Множина T_n^m дає розбиття інтервалу $[0, \alpha_n]^m$. Розглянемо послідовність сум:

$$S_n^{(2)}(\kappa) \;=\; c_n \alpha_n^{-m} \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} \kappa\left((\bar{k} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n \right) \right)^2, \quad n \geq 1.$$

Нехай, як і у п. 2, виконуються умови (4), (5).

Теорема 2. *Послідовність* $(S_n^{(2)}(\kappa), \; n \geq 1)$ *збігається у середньому квадратичному до невипадкової сталої* $c \geq 0$ *тоді і тільки тоді, коли задовольняються умови:*

1) $$\lim_{n\to\infty} c_n \left(\sigma_2 + \sigma_W^2 \right) (\tau_n \alpha_n)^{-m} \int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 d\bar{s} \;=\; c;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} c_n^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2 \right)^2 \alpha_n^{-2m} \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=\bar{1}}^{\bar{N}} \Bigg(\int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right) \times$$

$$\times \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{j}) \alpha_n \tau_n + \bar{s} \right) \right) d\bar{s} \Bigg)^2 \;=\; 0;$$

3) $$\lim_{n\to\infty} c_n^2 \, \sigma_4 \, \alpha_n^{-2m} \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} \int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 \times$$

$$\times \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{j}) \alpha_n \tau_n + \bar{s} \right) \right)^2 d\bar{s} \;=\; 0.$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Безпосередня перевірка умов теореми 2 є досить складною, оскільки вони містять наростаючі суми. Перехід від функції відгуку $f(\bar{s})$ до її перетворення Фур'є $\hat{f}(\bar{\lambda})$ дозволяє отримати зручніші для перевірки умови.

Нехай

$$\hat{f}(\bar{\lambda}) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \exp\left\{-i\langle\bar{\lambda}, \bar{s}\rangle\right\} f(\bar{s})\, d\bar{s}, \quad \bar{\lambda} \in \mathbf{R}^m.$$

Теорема 3. *Послідовність* $(S_n^{(2)}(\kappa),\ n \geq 1)$ *збігається у середньому квадратичному до невипадкової сталої* $c \geq 0$ *тоді і тільки тоді, коли задовольняються умови:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty} c_n \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)(\tau_n \alpha_n)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2\sin\frac{\alpha_n \tau_n \lambda_r}{2}\right)^{2p_r}\right) \left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right|^2 d\bar{\lambda} = c;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} c_n^2 \alpha_n^{-2m} \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r + \mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n \tau_n(\lambda_r + \mu_r)}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(4\sin\frac{\alpha_n \tau_n \lambda_r}{2} \sin\frac{\alpha_n \tau_n \mu_r}{2}\right)^{2p_r}\right) \left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right|^2 \left|\hat{f}(\bar{\mu})\right|^2 d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda} = 0;$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} c_n^2 \alpha_n^{-2m} \sigma_4 \operatorname{Re} \int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r + \mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n \tau_n(\lambda_r + \mu_r)}{2}} \times \right.$$

$$\times\ \hat{f}(\bar{\lambda})\, \hat{f}(\bar{\mu})\, \hat{f}^*(\bar{\lambda} + \bar{\theta})\, \hat{f}^*(\bar{\mu} - \bar{\theta})\, h_{\bar{p},\tau_n\alpha_n}(\bar{\lambda}) \times$$

$$\times\ h_{\bar{p},\tau_n\alpha_n}(\bar{\mu})\, h_{\bar{p},\tau_n\alpha_n}(-\bar{\lambda} - \bar{\theta})\, h_{\bar{p},\tau_n\alpha_n}(-\bar{\mu} + \bar{\theta})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda}\, d\bar{\theta} = 0,$$

де $h_{\bar{p},\tau_n\alpha_n}(\bar{\lambda}) = \left(\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}} \exp\left\{i\langle\bar{\lambda}, \bar{t}\rangle\right\}\big|_{t=0}\right)$, *а* $\hat{f}^*$ — *комплексно спряжена до* $\hat{f}$ *функція.*

Для доведення теореми нам знадобляться дві наступні леми.

Лема 2. *Справедливе співвідношення*

$$\left|\Delta_b^{\bar{p}} \exp\left\{i\langle\bar{t}, \bar{x}\rangle\right\}\big|_{\bar{t}=0}\right|^2 = \prod_{k=1}^{m} \left(2\sin\frac{bx_k}{2}\right)^{2p_k},$$

де $\bar{p} \in \mathbf{N}^m$, $\bar{t}$; $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$; $b > 0$.

Доведення. Зауважимо, що для довільних $t \in R$, $x \in R$, $p \in \mathbf{N}$ виконується рівність

$$\left|\Delta_b^{p} \exp\{itx\}\big|_{t=0}\right|^2 = \left(2\sin\frac{bx}{2}\right)^{2p},$$

яка доводиться методом математичної індукції по p так, як це зроблено у роботі [15]. Тоді

$$\left|\Delta_b^{\bar{p}} \exp\left\{i\langle\bar{t}, \bar{x}\rangle\right\}\big|_{\bar{t}=0}\right|^2 = \left|\Delta_b^{\bar{p}} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{m} t_k x_k\right\}\Big|_{\bar{t}=0}\right|^2 =$$

$$= \left|\left(\prod_{r=1}^{m} \Delta_{r,b}^{p_r}\right)\left(\prod_{k=1}^{m} \exp\{i\, t_k x_k\}\right)\Big|_{\bar{t}=0}\right|^2 = \left|\prod_{k=1}^{m} \left(\Delta_b^{p_k} \exp\{i\, t_k x_k\}\right)\Big|_{t_k=0}\right|^2 =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \left| \Delta_b^{p_k} \exp\{ i\, t_k\, x_k \} \Big|_{t_k=0} \right|^2 = \prod_{k=1}^{m} \left(2 \sin \frac{b x_k}{2} \right)^{2 p_k}.$$

Лему доведено.

Методом математичної індукції доводиться і наступна лема.

Лема 3. *Справедливе співвідношення*

$$\int_{\mathbf{R}^m} \exp\left\{ -i \langle \bar{\lambda}, \bar{s} \rangle \right\} \left(\Delta_b^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right) d\bar{s} = \left(\left(\Delta_b^{\bar{p}} \exp\left\{ i \langle \bar{\lambda}, \bar{t} \rangle \right\} \right) \Big|_{\bar{t}=0} \right) \hat{f}(\bar{\lambda}).$$

Доведення теореми 3. З лем 2, 3, рівності Парсеваля та з того, що $f(\bar{s})$ — дійсна функція, отримуємо

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s}) \right)^2 d\bar{s} = \int_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\alpha_n \tau_n \lambda_r}{2} \right)^{2 p_r} \right) \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda};$$

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n - \bar{s} \right) \right) \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{j} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n - \bar{s} \right) \right) d\bar{s} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^m} \exp\left\{ i \langle \bar{\lambda}, (\bar{k} - \bar{j}) \tau_n \alpha_n \rangle \right\} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\alpha_n \tau_n \lambda_r}{2} \right)^{2 p_r} \right) \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda}; \tag{11}$$

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n - \bar{s} \right) \right)^2 \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{j} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n - \bar{s} \right) \right)^2 d\bar{s} =$$

$$= \operatorname{Re} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbf{R}^m} \int_{\mathbf{R}^m} \int_{\mathbf{R}^m} \exp\left\{ i \langle \bar{\lambda} + \bar{\mu}, (\bar{k} - \bar{j}) \alpha_n \tau_n \rangle \right\} \times$$

$$\times\ \hat{f}(\bar{\lambda})\, \hat{f}(\bar{\mu})\, \hat{f}^*(\bar{\mu} - \bar{\theta})\, \hat{f}^*(\bar{\lambda} + \bar{\theta})\, h_{\bar{p}, \alpha_n \tau_n}(\bar{\lambda}) \times \tag{12}$$

$$\times\ h_{\bar{p}, \alpha_n \tau_n}(\bar{\mu})\, h_{\bar{p}, \alpha_n \tau_n}(\bar{\lambda} - \bar{\theta})\, h_{\bar{p}, \alpha_n \tau_n}(-\bar{\mu} + \bar{\theta})\, d\bar{\lambda}\, d\bar{\mu}\, d\bar{\theta};$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^m} \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{k} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n - \bar{s} \right) \right) \left(\Delta_{\alpha_n \tau_n}^{\bar{p}} f\left((\bar{j} - \bar{1}) \alpha_n \tau_n - \bar{s} \right) \right) d\bar{s} \right)^2 =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^m} \int_{\mathbf{R}^m} \cos\left(\langle \bar{\lambda} + \bar{\mu}; (\bar{k} - \bar{j}) \tau_n \alpha_n \rangle \right) \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\alpha_n \tau_n \lambda_r}{2} \right)^{2 p_r} \times \right.$$

$$\left. \times \left(2 \sin \frac{\alpha_n \tau_n \mu_r}{2} \right)^{2 p_r} \right) \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 \left| \hat{f}(\bar{\mu}) \right|^2 d\bar{\lambda}\, d\bar{\mu}.$$

Тепер з рівностей

$$\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \exp\left\{ i \langle \bar{k}, \bar{x} \rangle \right\} = \prod_{r=1}^{m} \frac{\sin \dfrac{N_n x_r}{2}}{\sin \dfrac{x_r}{2}} \exp\left\{ i \frac{N_n + 1}{2} x_r \right\},$$

$$\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \cos\left(\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle \right) = \operatorname{Re} \prod_{r=1}^{m} \frac{\sin \dfrac{N_n x_r}{2}}{\sin \dfrac{x_r}{2}} \exp\left\{ i \frac{N_n + 1}{2} x_r \right\},$$

$$\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} \cos\left(\langle \bar{\lambda}+\bar{\mu}; (\bar{k}-\bar{j})\alpha_n\tau_n \rangle\right) = \prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}},$$

$$\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}} \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} \exp\left\{i\langle \bar{\lambda}+\bar{\mu}; (\bar{k}-\bar{j})\alpha_n\tau_n \rangle\right\} = \prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}},$$

співвідношень (11), (12) та теореми 2 випливає твердження теореми 3.

Теорему доведено.

Наслідок 3. *Якщо виконуються умови* 1, 2 *теореми* 3 *і, крім цього,*

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-2m} c_n^2 \int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}} \times \right.$$

$$\times \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\lambda_r}{2}\right|^{p_r} \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\mu_r}{2}\right|^{p_r} \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\theta_r)}{2}\right|^{p_r} \times$$

$$\times \left. \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n(\mu_r-\theta_r)}{2}\right|^{p_r} \right) \left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right| \left|\hat{f}(\bar{\mu})\right| \left|\hat{f}^*(\bar{\lambda}+\bar{\theta})\right| \left|\hat{f}^*(\bar{\mu}-\bar{\theta})\right| d\bar{\lambda}\, d\bar{\mu}\, d\bar{\theta} = 0,$$

то послідовність $\{ S_n^{(2)}(\kappa),\ n \geq 1 \}$ *збігається у середньому квадратичному до невипадкової сталої* c.

Доведення наслідку 3 випливає з теореми 3 і леми 2.

Наслідок 4. *Якщо виконуються умови* 1, 2 *теореми* 3 *і, крім цього,*

$$3)\ \lim_{n\to\infty} c_n \alpha_n^{-m} \tau_n^m \int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}} \times \right.$$

$$\times \left. \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\lambda_r}{2}\right|^{p_r} \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\mu_r}{2}\right|^{p_r} \right| \left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right| \left|\hat{f}(\bar{\mu})\right| d\bar{\lambda}\, d\bar{\mu} = 0,$$

то послідовність $\{ S_n^{(2)}(\kappa),\ n \geq 1 \}$ *збігається у середньому квадратичному до невипадкової сталої* c.

Доведення. Використовуючи нерівність Коші – Буняковського, отримуємо

$$c_n^2 \alpha_n^{-2m} \int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}} \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\lambda_r}{2}\right|^{p_r} \times \right.$$

$$\times \left. \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\mu_r}{2}\right|^{p_r} \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\theta_r)}{2}\right|^{p_r} \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n(\mu_r-\theta_r)}{2}\right|^{p_r} \right) \times$$

$$\times \left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right| \left|\hat{f}(\bar{\mu})\right| \left|\hat{f}^*(\bar{\lambda}+\bar{\theta})\right| \left|\hat{f}^*(\bar{\mu}-\bar{\theta})\right| d\bar{\lambda}\, d\bar{\mu}\, d\bar{\theta} \leq$$

$$\leq b_n c_n \alpha_n^{-m} \tau_n^m \int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}} \times \right.$$

$$\times \left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\lambda_r}{2}\right|^{p_r}\left|\sin\frac{\alpha_n\tau_n\mu_r}{2}\right|^{p_r}\left|\hat f(\bar\lambda)\right|\left|\hat f(\bar\mu)\right|d\bar\lambda\, d\bar\mu,$$

де

$$b_n = c_n(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int\limits_{\mathbf{R}^m}\left(\prod_{r=1}^{m}\left(\sin\frac{\alpha_n\tau_n\theta_r}{2}\right)^{2p_r}\right)\left|\hat f(\bar\theta)\right|^2 d\bar\theta.$$

З умови 1 теореми 3 випливає, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Звідси та з умови 3 випливає умова 3 наслідку 3. Таким чином, наслідок 4 доведено.

З теореми 3 та наслідків 1, 2 випливає наступне твердження.

Теорема 4. *Послідовність* $\{S_n^{(2)}(\kappa),\ n\ge 1\}$ *збігається у середньому квадратичному до нуля тоді і тільки тоді, коли задовольняються умови:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty} c_n\left(\sigma_2+\sigma_w^2\right)(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int\limits_{\mathbf{R}^m}\left(\prod_{r=1}^{m}\left(2\sin\frac{\alpha_n\tau_n\lambda_r}{2}\right)^{2p_r}\right)\left|\hat f(\bar\lambda)\right|^2 d\bar\lambda = 0;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} c_n^2\left(\sigma_2+\sigma_w^2\right)^2\alpha_n^{-2m}\int\limits_{\mathbf{R}^m}\int\limits_{\mathbf{R}^m}\left(\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}\left(\sin\frac{\tau_n\alpha_n\lambda_r}{2}\right)^{2p_r}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sin\frac{\tau_n\alpha_n\mu_r}{2}\right)^{2p_r}\right)\left|\hat f(\bar\lambda)\right|^2\left|\hat f(\bar\mu)\right|^2 d\bar\lambda d\bar\mu = 0.$$

Зауваження 3. Умови теореми 4 є спільними як для однорідних вінерових дробових полів, так і для однорідних узагальнених пуассонових дробових полів.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
2. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
3. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
4. *Синявский В. Ф.* Об одной предельной теореме для полей типа дробового эффекта // Кибернетика. – 1973. – № 3. – С. 96 – 97.
5. *Lugannani R.* Sample functions regularity of shot noise // SIAM J. Appl. Math. – 1978. – **35**, № 2. – P. 246 – 259.
6. *Rice S. O.* On generalized shot noise // Adv. Appl. Probab. – 1979. – № 9. – P. 553 – 560.
7. *Schmidt V.* On shot noise processes induced by stationary marked point processes // J. Inform. Proc. Cibern. – 1984. – **20**. – P. 397 – 406.
8. *Булдыгин В. В., Яровая Н. В.* Функциональная предельная теорема для полей дробового эффекта // Пробл. теории вероятностных распределений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 25 – 41.
9. *Buldygin V.* Semi-invariant conditions of weak convergence of random processes in the space of continuous functions // New Trands in Probab. and Statist. – Utrecht: VSP, 1990. – P. 78 – 92.
10. *Питербарг В. И.* Замечание о сильном принципе инвариантности для процесса дробового эффекта // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1990. – № 43. – С. 124 – 126.
11. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Оценки для распределения супремума одного класса случайных процессов // Укр. мат. журн. – 1993. – **43**, № 5. – С. 65 – 82.
12. *Булдыгин В. В., Шпортюк В. Г.* Про нормалізацію випадкових полів, які зображуються стохастичними інтегралами по полях з незалежними приростами // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1993. – Вип. 49. – С. 65 – 82.
13. *Levi P.* Le mouvement Brownian plan // Amer. J. Math. – 1940. – № 62. – P. 487 – 530.
14. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – **7**, № 3. – P. 522 – 527.
15. *Slepian D.* Some comments on the detection of gaussian signals in gaussian noise // IRE Trans. on Inform. Theory. – 1958. – **4**, № 12. – P. 65 – 68.

16. *Розанов Ю. А.* К вопросу об эквивалентности вероятностных мер, отвечающих гауссовским стационарным процессам // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, № 3. – С. 241 – 250.
17. *Розанов Ю. А.* О вероятностных мерах в функциональном пространстве, отвечающих гауссовским стационарным процессам // Там же. – 1964. – **9**, № 3. – С. 448 – 465.
18. *Гладышев Е. Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями // Там же. – 1961. – **6**, № 1. – С. 57 – 66.
19. *Рыжов Ю. М.* Одна предельная теорема для стационарных гауссовских процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – Вып. 1.– С. 178 – 188.
20. *Бондар Ю. В., Курченко О. О.* Квадратична варіація випадкового поля // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех. – 1974. – № 16. – С. 103 – 112.
21. *Бесклинская Е. П., Козаченко Ю. В.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леві – Бакстера // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1986. – Вып. 36. – С. 3 – 6.
22. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Субгауссовские случайные векторы и процессы // Там же. – 1986. – Вып. 36. – С. 138 – 144.
23. *Курченко А. А.* Одна предельная теорема для векторнозначных случайных полей // Там же. – 1979. – Вып. 21. – С. 86 – 97.
24. *Курченко А. А.* Некоторые условия ортогональных мер, соответствующих однородным полям // Там же. – 1982. – Вып. 26. – С. 90 – 96.
25. *Buldygin V.* On some properties of the generalized Schottky effect processes // Proceedings of the Second Ukrainian-Hungarian Conference. – Kiev: TBiMC, 1995. – P. 34 – 51.
26. *Булдыгин В. В., Мельник В. Н.* О теоремах Леви – Бакстера для стохастических интегралов // Допов. АН УРСР. Мат., природознавство, техн. науки. – 1991. – № 10. – С. 37 – 41.
27. *Шпортюк В. Г.* Деякі граничні теореми для узагальнених полів дробового ефекту. Київ, 1994. – 73 с. – Деп. в Укр. НДІНТІ 12.04.94, №682-Ук.94.
28. *Каткаускайте А. И.* Случайные поля с независимыми приращениями // Лит. мат. сб. – 1972. – **12**, № 4. – С. 75 – 85.

Одержано 26.03.97