УДК 517.5

В. В. Волчков (Донец. ун-т)

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ПРОПУСКАМИ

In a many-dimensional space, we study some properties of functions with the Fourier gap series depending only on values of these functions in a neighborhood of a point.

У багатовимірному просторі вивчаються деякі властивості функцій з лакунарними рядами Фур'є, що залежать тільки від значень цих функцій в околі деякої точки.

1. Введение. Хорошо известно, что многие свойства функций, имеющих ряды Фурье с пропусками, зависят лишь от поведения этих функций в окрестности некоторой точки (см., например, [1–4] и библиографию к этим работам). В данной работе существенно усиливаются некоторые результаты, полученные в [4].

Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbb{Z}^n$ — целочисленная решетка в R^n, $D'(G)$ — пространство распределений на открытом множестве $G \subset R^n$. Для 2π-периодического $f \in D'(R^n)$ обозначим

$$\operatorname{spec} f = \{ m \in \mathbb{Z}^n : \hat{f}(m) \neq 0 \},$$

где $\hat{f}(m)$ — коэффициент Фурье распределения f с номером m.

Для $f \in L(R^n)$ будем обозначать также $\hat{f}$ ее преобразование Фурье, т. е.

$$\hat{f}(x) = \int_{R^n} f(u)\, e^{-i(x,u)} du.$$

Пусть также A — множество всех линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Определение 1. *Непустое открытое множество $K \subset R^n$ будем называть δ-областью $(\delta > 0)$, если выполнены следующие условия: а) всякую точку из K можно покрыть замкнутым шаром радиуса δ, принадлежащим K; б) центры двух любых замкнутых шаров радиуса δ, принадлежащих K, можно соединить ломаной так, что любой замкнутый шар радиуса δ с центром на этой ломаной принадлежит K.*

Определение 2. *Последовательность $\{r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, положительных чисел будем называть δ-последовательностью $(\delta > 0)$, если существует (зависящая, вообще говоря, от δ) возрастающая функция $\varphi : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\varphi(k)} < \infty,$$

$$\max_{1 \le m \le k} \left| r_m - \frac{\pi m}{\delta} \right| = O\left(\frac{k}{\varphi^2(k)} \right) \tag{1}$$

и постоянная в знаке O не зависит от k.

Выполнена при частичной финансовой поддержке объединенного фонда Правительства Украины и Международного научного фонда (гранты № U9D000, U9D200).

Для любой δ-последовательности $\{r_k\}$ положим $H^n(\{r_k\}) = \{x \in R^n: |x| \in \{r_k\}\}$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* K — δ-*область в* R^n, $P \in A$, $\lambda_m \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *и для некоторой* δ-*последовательности* $\{r_k\}$ $|\lambda_m| \in \{r_k\}$ *при всех* m.

Пусть также последовательность

$$f_k(x) = \sum_{m=1}^{k} c_{k,m} e^{i(x,\lambda_m)}, \qquad c_{k,m} \in \mathbb{C},$$

сходится в $D'(K)$ *к* f *и* $Pf = 0$ *в некотором шаре радиуса* $r > \delta$. *Тогда* $Pf = 0$ *на всей* K.

Отметим, что в теореме 1 некоторые из чисел $|\lambda_m|$ могут совпадать. В частности, все $|\lambda_m|$ могут быть равны.

Теорема 2. *Пусть* $f \in D'(R^n)$ — 2π-*периодическое распределение и для некоторой* δ-*последовательности* $\{r_k\}$ $\operatorname{spec} f \subset H^n(\{r_k\})$. *Тогда, если* $f = 0$ *в некотором шаре радиуса* $r > \delta$, *то* $f = 0$ *везде*.

В одномерном случае подобные результаты при разных предположениях получали многие авторы (см., например, [2, с. 511]), а также [3, с. 181]). В кратном случае для более узкого класса последовательностей $\{r_k\}$ теоремы 1, 2, а также теорема 3 (см. ниже) были получены в [4].

Пусть J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν.

Теорема 3. *Пусть* $\{r_k\}$ — δ-*последовательность*, $b - a > 2\delta$, $2\nu \in \mathbb{N}$ *и последовательность*

$$f_k(x) = \sum_{m=1}^{k} c_{k,m} J_\nu(r_m x), \qquad c_{k,m} \in \mathbb{C},$$

сходится в $L(a, b)$ *к функции* f, *равной нулю в некотором интервале* $\Delta \subset \subset (a, b)$ *длины* $l > 2\delta$. *Тогда* $f = 0$ *почти всюду на* (a, b).

3. Доказательство основных результатов. Пусть $B_r^n = \{x \in R^n: |x| \le r\}$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $\{r_k\}$ — δ-*последовательность. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует ненулевая функция* $g \in C^\infty(R^n)$ *со следующими свойствами:*

1) g *радиальна, т. е.* $g(x) = g(y)$ для любых $x, y \in R^n$ *таких, что* $|x| = |y|$;

2) *носитель* g *содержится в* $B^n_{\delta+\varepsilon}$;

3) *для любого* $x \in H^n(\{r_k\})$ $\hat{g}(x) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r_k^2}\right), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Из общих фактов теории целых функций получаем, что F — целая функция первого порядка и

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \ln|F(iy)| = \delta \tag{2}$$

(см. [2, с. 27], а также [3, с. 131]). Оценим $F(\pi x/\delta)$ сверху при $x \in R^1$. Символами $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от x. Пусть $[x]$ — целая часть числа x, $\|x\|$ — расстояние от x до ближайшего целого числа, $a_k = \delta r_k/\pi$. Из разложения функции $(\sin \pi x)/\pi x$ в бесконечное произведение имеем

$$F\left(\frac{\pi x}{\delta}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{a_k^2}\right).$$

Пусть $x \geq 1$, $\nu = [2x]$. Тогда

$$F\left(\frac{\pi x}{\delta}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} F_1(x) F_2(x),$$

где

$$F_1(x) = \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{a_k^2}\right),$$

$$F_2(x) = \prod_{k=\nu+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{a_k^2}\right).$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\|x\| > 1/3$. Имеем

$$F_1(x) = \prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{k}{a_k}\right)^2 \left(1 - \frac{k - a_k}{k - x}\right)\left(1 - \frac{k - a_k}{k + x}\right),$$

откуда

$$\ln|F_1(x)| \leq \sum_{k=1}^{\nu} \left(\ln\left(\frac{k}{a_k}\right)^2 + \ln\left(1 + \left|\frac{k - a_k}{k - x}\right|\right)\right) + \ln\left(1 + \left|\frac{k - a_k}{k + x}\right|\right).$$

Далее, используя неравенство $\ln(1 + t) \leq t$ при $t > -1$, получаем

$$\ln|F_1(x)| \leq 2\sum_{k=1}^{\nu} |k - a_k| \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{|k - x|}\right).$$

Отсюда, учитывая (1) и то, что $\|x\| > 1/3$, имеем

$$\ln|F_1(x)| < c_1 x/\varphi(x)$$

при указанных x. Далее, при достаточно больших x и $k \geq \nu + 1$ из (1) получаем

$$1 - x^2 a_k^{-2} > 1/2 \quad \text{и} \quad 1 - x^2 k^{-2} > 1/2.$$

Следовательно, при таких x

$$\ln|F_2(x)| = \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \left(\ln\left|1 - \frac{x^2}{a_k^2}\right| - \ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2}\right|\right) \leq 2x^2 \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{\left|k^2 - a_k^2\right|}{k^2 a_k^2} \tag{4}$$

(применим теорему Лагранжа для каждого слагаемого в левой части неравенства (4)). Тогда из (1) и (4) следует

$$\ln|F_2(x)| < \frac{c_2 x^2}{\nu\varphi(\nu)} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{k\varphi(k)} < c_3 x/\varphi(x).$$

Отсюда и из (3) получаем, что при всех достаточно больших x, для которых $\|x\| > 1/3$,

$$\ln|F(\pi x/\delta)| < c_4 x/\varphi(x).$$

Пусть теперь $\|x\| \le 1/3$ и m — натуральное число, для которого $|x-m| \le \le 1/3$. Имеем $F(\pi x/\delta) = F_3(x)F_4(x)$, где

$$F_3(x) = (1 - x^2 m^{-2})^{-1}(1 - x^2 a_m^{-2}) \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

$$F_4(x) = \prod_{k=1,\, k\ne m}^{\infty} (1 - x^2 k^{-2})^{-1}(1 - x^2 a_k^{-2}).$$

Очевидно,

$$|F_3(x)| < c_5 |(x-m)^{-1} \sin \pi x| \le c_5 \pi.$$

Для $\ln|F_4(x)|$, как и выше, получаем оценку

$$\ln|F_4(x)| < c_6 x/\varphi(x).$$

Из (5) и четности функции F следует

$$F(\pi x/\delta) < c_7 \exp(c_8 x/\varphi(x))$$

при всех $x \in R^1$.

Рассмотрим теперь неубывающую функцию Ψ: $[0, +\infty) \to [1, +\infty)$ со следующими свойствами: а) $\Psi(t) = o(t)$ при $t \to +\infty$; б) $\Psi(t) = o(\varphi(t))$ при $t \to \to +\infty$; в) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(k\Psi(k))^{-1}$ сходится. Существование такой функции легко следует из отсутствия универсального сходящегося ряда.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из известных результатов теории квазианалитических классов функций [5, с. 23–27] получаем, что существует четная ненулевая функция $h \in \in C^{\infty}(R^1)$ такая, что $h = 0$ на $R^1 \setminus [-\varepsilon/4, \varepsilon/4]$ и при всех $t \in R^1$, $r \in \mathbb{N}$ $|h^{(r)}(t)| < (c_9 r\Psi(r))$, где c_9 не зависит от t и r.

Оценим преобразование Фурье функции h. При $r \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \ne 0$ имеем

$$\hat{h}(z) = \int_{-\varepsilon/4}^{\varepsilon/4} e^{-izt} h(t)\,dt = (iz)^{-r} \int_{-\varepsilon/4}^{\varepsilon/4} e^{-izt} h^{(r)}(t)\,dt,$$

откуда

$$|\hat{h}(z)| \le |z|^{-r} e^{\varepsilon|\mathrm{Im}\, z|/3} (r\Psi(r)c_9)^r \tag{7}$$

при $z = x \in R^1$ из (7) следует $|\hat{h}(z)| < (r\Psi(r)c_9/|x|)^r$.

В последующем неравенстве при достаточно больших $|x|$ положим

$$r = [|x|(\Psi|x|/\pi)(2 + 2c_9))^{-1}].$$

Тогда из свойств Ψ получаем

$$|\hat{h}(z)| < c_{10} \exp\left(-c_{11}|x|/\Psi(\delta|x|/\pi)\right).$$

Из (6) и определения h следует, что функция $u(z) = F(z)\hat{h}(z)$ четная и ограничена на вещественной оси. Кроме того, из оценки (7), равенства (2) и принципа Фрагмена – Линделефа получаем, что u — целая функция экспоненциального типа не выше $\delta + \varepsilon/4$. Пусть $q \in \mathbb{N}$ — достаточно большое, $\eta = \varepsilon/(4q)$. Тогда сужение на R^n целой функции

$$w(z_1, \ldots, z_n) = u\left(\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_n^2}\right)\left(\frac{\sin\left(\eta\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_n^2}\right)}{\eta\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_n^2}}\right)^q$$

принадлежит $L^2(R^n)$. По теореме Винера – Пэли получаем, что существует функция $\Phi \in L^2(R^n)$ такая, что $\hat{\Phi} = w$ и носитель Φ содержится в $B^n_{\delta+\varepsilon/4}$. Тогда свертка $g = \Phi * V$, где $V \in C^\infty(R^n)$ — ненулевая радиальная функция с носителем, содержащемся в $B^n_{\varepsilon/4}$, удовлетворяет всем требованиям леммы.

Теперь для доказательства теорем 1–3 достаточно повторить рассуждения, приведенные в [4], при этом вместо леммы 1 из работы [4] следует использовать лемму, доказанную выше.

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
3. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 268 с.
4. *Волчков В. В.* Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 27–31.
5. *Бадалян Г. В.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. – М.: Наука, 1990. – 208 с.

Получено 03.09.96