УДК 517.956.4

В. С. Дронь, С. Д. Івасишен (Чернівец. ун-т)

ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ І ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

For a class of degenerate parabolic Kolmogorov-type equations, we establish the properties of normality, the formula of convolution, the positivity, and some lower bound for a fundamental solution. We also prove the theorems on uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the classes of functions with bounded growth and for the class of nonnegative functions.

Для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова встановлені властивість нормальності, формула згортки, додатність і деяка оцінка знизу для фундаментального розв'язку, а також доведені теореми єдиності розв'язків задачі Коші у класах функцій з обмеженим ростом та в класі невід'ємних функцій.

У даній роботі досліджуються властивості фундаментальних розв'язків і їх застосування до доведення теорем про єдиність розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь другого порядку типу рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. При цьому розглядається випадок рівнянь з трьома групами просторових змінних, у кожну з яких входить, взагалі кажучи, різна кількість змінних. Коефіцієнти рівнянь можуть залежати від усіх змінних.

Вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова другого і вищого порядків з двома і трьома групами просторових змінних вивчались у цілому ряді праць. Відзначимо лише роботи [1 – 9], присвячені безпосередньо рівнянням типу, який тут розглядається. Однак в [2, 3, 5] коефіцієнти рівнянь не залежать від просторових змінних.

У статті використовуються результати з [6, 8, 9] і методика доведень з [5, 10, 11].

1. Позначення, припущення, постановка задачі. Користуватимемось такими позначеннями: l, m, n, M і N — задані натуральні числа такі, що $1 \le l \le m \le n$, $M \equiv 5l + 3m + n$, $N \equiv l + m + n$; T — задане додатне число; $\Pi_H \equiv H \times \mathbb{R}^N$, якщо H — множина в $\mathbb{R}$; $x' \equiv (x_1, \ldots, x_l)$, $x'' \equiv (x_1, \ldots, x_m)$, $y' \equiv (y_1, \ldots, y_l)$, якщо $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$; $X \equiv (x, y, z)$, $\Xi \equiv (\xi, \eta, \zeta)$, $\Lambda \equiv (\lambda, \mu, \nu)$, якщо $\{x, \xi, \lambda\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y, \eta, \mu\} \subset \mathbb{R}^m$ і $\{z, \zeta, \nu\} \subset \mathbb{R}^l$;

$$\rho(t, X, \Xi) \equiv \frac{|x - \xi|^2}{t} + \frac{\left|y + tx'' - \eta\right|^2}{t^3} + \frac{\left|z + ty' + \frac{1}{2}t^2 x' - \zeta\right|^2}{t^5};$$

$$B(X, R) \equiv \left\{\Xi \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, |\Xi - X| \le R\right\},\ B_R \equiv B(0, R).$$

Розглянемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t, X) \equiv \left(\partial_t - \sum_{i=1}^{m} x_i \partial_{y_i} - \sum_{i=1}^{l} y_i \partial_{z_i} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, X)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} a_i(t, X)\partial_{x_i} - a_0(t, X)\right) u(t, X) = 0, \qquad (t, X) \in \Pi_{(0, T]}. \tag{1}$$

Коефіцієнти цього рівняння вважатимемо комплекснозначними функціями, для яких виконуються наступні умови.

А. Існує стала $\delta_0 > 0$ така, що для всіх $(t, X) \in \Pi_{[0, T]}$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, X)\xi_i \xi_j \ge \delta_0 |\xi|^2.$$

Б. Коефіцієнти a_{ij}, a_i, $1 \le i, j \le n$, і a_0 в $\Pi_{[0,T]}$ є неперервними й обмеженими функціями, які по x задовольняють рівномірну умову Гельдера і мають неперервні та обмежені похідні по y і z.

В. Існують похідні по x від a_{ij} і a_i, $1 \le i, j \le n$, до відповідно другого і першого порядків; ці похідні разом з a_{ij}, a_i, $1 \le i, j \le n$, і a_0 в $\Pi_{[0,T]}$ — неперервні й обмежені функції, які по x задовольняють рівномірну умову Гельдера і мають неперевні та обмежені похідні по y і z.

За умов А і Б в [6] доведено існування фундаментального розв'язку (ф. р.) задачі Коші для рівняння (1), тобто такої функції $Z(t, X; \tau, \Xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N$, що для будь-якого $\tau \in [0, T)$ та довільної неперевної і обмеженої функції $\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ формула

$$u(t, X) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; \tau, \Xi)\varphi(\Xi)\,d\Xi, \qquad (t, X) \in \Pi_{(\tau, T]}, \tag{2}$$

визначає розв'язок задачі Коші для рівняння (1) в $\Pi_{(\tau, T]}$ з початковою умовою

$$u(t, X)\Big|_{t=\tau} = \varphi(X), \qquad X \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

При цьому функція (2) задовольняє умову (3) в такому сенсі:

$$\lim_{t \to \tau} u(t, X) = \varphi(X), \qquad X \in \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Зауважимо, що прямування до границі φ в (4) рівномірне на кожному компакті простору $\mathbb{R}^N$.

В роботі [6] одержані й оцінки ф. р. Z та його похідних. Оцінки були уточнені Г. П. Малицькою і мають такий вигляд:

$$\left|\partial_x^k \partial_y^r \partial_z^s Z(t, X; \tau, \Xi)\right| \le C(t-\tau)^{-(M+|k|+3|r|+5|s|)/2} \times$$
$$\times \exp\{-c\rho(t-\tau, X, \Xi)\}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N,$$
$$|k| + 2(|r| + |s|) \le 2, \qquad C > 0, \qquad c > 0. \tag{5}$$

Нехай існує вираз, спряжений за Лагранжем з виразом L з (1). Розглянемо спряжене з (1) рівняння

$$(L^* v)(\tau, \Xi) \equiv \left(-\partial_\tau + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \partial_{\eta_i} + \sum_{i=1}^{l} \eta_i \partial_{\zeta_i}\right) v(\tau, \Xi) -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j} \left(\overline{a_{ij}(\tau, \Xi)}\, v(\tau, \Xi)\right) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i} \left(\overline{a_i(\tau, \Xi)}\, v(\tau, \Xi)\right) -$$
$$- \overline{a_0(\tau, \Xi)}\, v(\tau, \Xi) = 0, \qquad (\tau, \Xi) \in \Pi_{[0, T)}. \tag{6}$$

Тут і далі риска над виразом означає перехід у ньому до комплексного спряження.

Рівняння (6) є рівнянням типу (1), якщо замість τ ввести нову змінну $\tau' = -\tau$. Тому при виконанні умов А і В для рівняння (6) існує ф. р. задачі Коші $Z^*(\tau, \Xi; t, X)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{\Xi, X\} \subset \mathbb{R}^N$.

Далі скористаємось такою формулою Гріна – Остроградського:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} d\beta \int\limits_{\Omega} \left((Lu)\overline{v} - u\left(\overline{L^* v}\right)\right)(\beta, \Lambda)\,d\Lambda = \int\limits_{\Omega} (u\overline{v})(\beta, \Lambda)\,d\Lambda\Big|_{\beta=t_0}^{\beta=t_1} -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i n_{\mu_i} + \sum_{i=1}^{l} \mu_i n_{\nu_i}\right)(u\overline{v})(\beta, \Lambda)\,dS_\Lambda +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} d\beta \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} B^i[u, \overline{v}](\beta, \Lambda) n_{\lambda_i} \, dS_\Lambda, \quad 0 \le t_0 < t_1 \le T, \tag{7}$$

де Ω — обмежена область у $\mathbb{R}^N$ з межею $\partial\Omega$; $\left(n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_n}, n_{\mu_1}, \ldots, n_{\mu_m}, n_{\nu_1}, \ldots, n_{\nu_l}\right)$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$; u і v — функції з потрібною гладкістю,

$$B^i[u, \overline{v}] \equiv -\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \partial_{\lambda_j} u \overline{v} - u \partial_{\lambda_j} (a_{ij} \overline{v}) \right) + a_i u \overline{v}, \quad 1 \le i \le n. \tag{8}$$

Формулу (8) можна одержати, якщо проінтегрувати по β і Λ відповідно по (t_0, t_1) і Ω тотожність Гріна

$$(Lu)\overline{v} - u\left(\overline{L^* v}\right) = \partial_\tau (u\overline{v}) - \sum_{i=1}^{m} \partial_{\mu_i} (\lambda_i u \overline{v}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{l} \partial_{\nu_i} (\mu_i u \overline{v}) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{\lambda_i} B^i[u, \overline{v}].$$

Метою цієї роботи є дослідження властивостей ф. р. Z та їх застосування до знаходження класів єдиності розв'язків задачі Коші для рівняння (1).

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A *і* B. *Тоді для ф. р.* Z *правильні такі твердження*:

1) $$Z^*(\tau, \Xi; t, X) = \overline{Z(t, X; \tau, \Xi)}, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$ $$\{\Xi, X\} \subset \mathbb{R}^N \text{ (нормальність)}; \tag{9}$$

2) $$Z(t, X; \tau, \Xi) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; \sigma, \Lambda) Z(\sigma, \Lambda; \tau, \Xi) \, d\Lambda,$$

$$0 \le \tau < \sigma < t \le T, \quad \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N \text{ (формула згортки)}; \tag{10}$$

3) $Z(t, X; \tau, \Xi) > 0, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N$ (*додатність*);

4) *існує* $\Delta \in (0, T)$ *таке, що для будь-яких* $t_0 \in [0, T - \Delta]$, $(t, X) \in \Pi_{(t_0, t_0 + \Delta]}$ *і* $\delta \in (0, t - t_0)$ *існують такі числа* $\omega > 0$ *і* $\gamma > 0$, *з якими справджується нерівність*

$$Z(t, X; \tau, \Xi) \ge \omega \exp\left\{ -\gamma |\Xi|^2 \right\}, \quad (\tau, \Xi) \in \Pi_{[t_0, t_0 - \delta]}. \tag{11}$$

Твердження 3 і 4 виконуються, якщо коефіцієнти рівняння (1) дійснозначні.

Наступні результати стосуються класів єдиності розв'язків рівняння (1) з початковою умовою

$$u(t, X)\Big|_{t=0} = \varphi(X), \quad X \in \mathbb{R}^N. \tag{12}$$

Щоб їх сформулювати введемо необхідні класи функцій.

Позначимо через E_0^T клас функцій $u(t, X)$, $(t, X) \in \Pi_{(0, T]}$, для яких існує стала $a \ge 0$ така, що

$$\| u \|_0^a \equiv \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{ -a |X|^2 \right\} |u(t, X)| \, dX < \infty. \tag{13}$$

Розглянемо такі набори функцій, які використовувались у [5]:

$$\boldsymbol{k}(t, \boldsymbol{a}) \equiv (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2), k_3(t, a_3)),$$

$$s(t) \equiv (s_1(t), s_2(t), s_3(t));$$

$$k_i(t, a_i) \equiv \frac{c_0 a_i}{c_0 - a_i t^{2i-1}}, \quad 1 \le i \le 3;$$

$$s_1(t) \equiv k_1(t, a_1) + 2t^2 k_2(t, a_2) + \frac{3}{4} t^4 k_3(t, a_3),$$

$$s_2(t) \equiv 2k_2(t, a_2) + 3t^2 k_3(t, a_3), \quad s_3(t) \equiv 3k_3(t, a_3), \quad 0 \le t \le T,$$

де $0 < c_0 < c$; c — стала з оцінок (5); $\boldsymbol{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ — набір невід'ємних чисел таких, що виконуються співвідношення

$$T < \min_{1 \le i \le 3} \left(\frac{c_0}{i a_i} \right)^{1/(2i-1)} = \min_{1 \le i \le 3} \left(\frac{c_0}{s_i(0)} \right)^{1/(2i-1)}.$$

Зауважимо, що $\boldsymbol{k}(0, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ і правильні нерівності $k_i(t, a_i) \ge a_i$, $s_i(t) \ge a_i$, $1 \le$ $\le i \le 3$, $t \in [0, T]$, а також нерівності

$$-c_0 \rho(t, X, \Xi) + a_1 |\xi|^2 + a_2 |\eta|^2 + a_3 |\zeta|^2 \le k_1(t, a_1) |x|^2 +$$

$$+ k_2(t, a_2) |y + tx''|^2 + k_3(t, a_3) \left| z + ty' + \frac{1}{2} t^2 x' \right|^2 \le$$

$$\le s_1(t) |x|^2 + s_2(t) |y|^2 + s_3(t) |z|^2, \quad t \in (0, T], \quad \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N. \quad (14)$$

Нехай $1 \le p \le \infty$ і $u(t, X)$, $(t, X) \in \Pi_{[0, T]}$, — задана комплекснозначна функція, яка є вимірною по X при будь-якому $t \in [0, T]$. Для кожного $t \in$ $\in [0, T]$ визначимо норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{k(t, a)} \equiv \Big\| u(t, X) \exp\Big\{ -k_1(t, a_1) |x|^2 -$$

$$- k_2(t, a_2) |y + tx''|^2 - k_3(t, a_3) \left| z + ty' + \frac{1}{2} t^2 x' \right|^2 \Big\} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^N)},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{s(t)} \equiv \Big\| u(t, X) \exp\Big\{ -s_1(t) |x|^2 -$$

$$- s_2(t) |y|^2 - s_3(t) |z|^2 \Big\} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}.$$

Зауважимо, що на підставі другої нерівності з (14) маємо

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{s(t)} \le \|u(t, \cdot)\|_p^{k(t, a)}, \quad 0 \le t \le T, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Через E_p^T, $1 \le p \le \infty$, позначимо клас функцій $u(t, X)$, $(t, X) \in \Pi_{(0, T]}$, для яких

$$\sup_{t \in (0, T]} \|u(t, \cdot)\|_p^{k(t, a)} < \infty,$$

а через Ψ — клас вимірних функцій $\psi(X)$, $X \in \mathbb{R}^N$, які задовольняють умову

$$\left\| \psi(X) \exp\left\{ s_1(T) |x|^2 + s_2(T) |y|^2 + s_3(T) |z|^2 \right\} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* A *і* B. *Тоді в класі* E_0^T *існує не більше одного розв'язку рівняння* (1), *який задовольняє умову* (12) *в такому сенсі:*

$$\lim_{t \to 0} u(t, X) = \varphi(X) \quad \textit{рівномірно по } X \in K \tag{15}$$

для довільного компакту $K \subset \mathbb{R}^N$.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* A *і* B, *то в класах* E_p^T, $1 \le p \le \infty$, *існує не більше одного розв'язку рівняння* (1), *який задовольняє умову* (12) *в такому сенсі*:

$$\lim_{t \to 0} \| u(t, \cdot) - \varphi(\cdot) \|_p^{s(t)} = 0, \qquad 1 \le p < \infty; \tag{16}$$

$$\forall \psi \in \Psi:$$

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} u(t, X) \psi(X) dX = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(X) \psi(X) dX, \qquad p = \infty. \tag{17}$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* A, B *і коефіцієнти рівняння* (1) *дійснозначні. Тоді в цьому рівнянні не може існувати більше одного невід'ємного розв'язку, який задовольняє умову* (12) *в розумінні* (15).

Доведення теорем 1 – 4 наводяться в наступних пунктах.

3. Нормальність ф. р. та формула згортки. Для доведення властивостей 1 і 2 з теореми 1 скористаємось формулою (7). У ній покладемо $u(\beta, \Lambda) = Z(\beta, \Lambda; \tau, \Xi)$, $v(\beta, \Lambda) = Z^*(\beta, \Lambda; t, X)$, $\Omega = B_R$ і $t_1 = t - \varepsilon$, а замість t_0 — відповідно $\tau + \varepsilon$ і σ, де ε — досить мале додатне число. Якщо після цього перейти до границі спочатку при $R \to \infty$, а потім при $\varepsilon \to 0$, то одержимо рівності (9) і (10). При цьому потрібно користуватись оцінками (5), співвідношенням (4) для інтеграла Пуассона (2) та аналогічним співвідношенням для інтеграла Пуассона, породженого ф. р. Z^*.

4. Додатність ф. р. Методом від супротивного доведемо спочатку невід'ємність ф. р. Нехай в деякій точці $(t_0, X_0; \tau_0, \Xi_0)$, $0 \le \tau_0 < t_0 \le T$, $\{X_0, \Xi_0\} \subset \mathbb{R}^N$, функція Z набуває від'ємного значення. Тоді на підставі неперервності Z за змінною Ξ існує таке $\delta > 0$, що $Z(t_0, X_0; \tau_0, \Xi) < 0$, $\Xi \in B(\Xi_0, \delta)$. Візьмемо неперервну невід'ємну функцію f, носій якої лежить у $B(\Xi_0, \delta)$, і розглянемо функцію

$$v(t, X) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; \tau_0, \Xi) f(\Xi) d\Xi, \qquad (t, X) \in \Pi_{(\tau_0, T]}.$$

Очевидно, що, з одного боку,

$$v(t_0, X_0) < 0. \tag{18}$$

З другого боку, функція v задовольняє в $\Pi_{(\tau_0, T]}$ умови принципу максимуму, доведеного в [9]. Справді, вона задовольняє в $\Pi_{(\tau_0, T]}$ рівняння (1). Оцінка (5) гарантує існування $\lim_{|X| \to \infty} v(t, X) = 0$ для кожного $t \in (\tau_0, T]$. На підставі властивості (4) для інтеграла Пуассона $\lim_{t \to \tau_0} v(t, X) = f(X) \ge 0$, $X \in \mathbb{R}^N$. Тому $v(t, X) \ge 0$, $(t, X) \in \Pi_{(\tau_0, T]}$, що суперечить нерівності (18). Використавши сильний принцип максимуму для рівняння (1) з [8], доводимо строгу додатність ф. р.

5. Оцінка знизу ф. р. Покладемо

$$v(\tau, \Xi) \equiv \exp\left\{ -\beta \left(\frac{1}{4s} |x - \xi|^2 + \frac{3}{s^3} \left| y + \frac{s}{2}(x'' + \xi'') - \eta \right|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{180}{s^5} \left| z + \frac{s}{2}(y' + \eta') + \frac{s^2}{12}(x' - \xi') - \zeta \right|^2 \right) e^{\varepsilon s} + \frac{\alpha}{s} \right\},$$

де $s \equiv t - \tau - \delta/2$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$, $\varepsilon > 1$.

Легко переконатися, що

$$\frac{1}{4s}|x-\xi|^2 + \frac{3}{s^3}\left|y + \frac{s}{2}(x'' + \xi'') - \eta\right|^2 +$$

$$+ \frac{180}{s^5}\left|z + \frac{s}{2}(y' + \eta') + \frac{s^2}{12}(x' - \xi') - \zeta\right|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{s}\left(\left(\frac{1}{4} - \frac{3s}{2} - \frac{63s^2}{4} - \frac{45s^3}{2}\right)|x-\xi|^2 +\right.$$

$$+ \left(3 - \frac{189s}{2} - 45s^2 - \frac{15s^3}{2}\right)|y-\eta|^2 + (180 - 260s - 15s^2)|z-\zeta|^2 -$$

$$\left. - 3s\left|x''\right|^2 - 180\left(s + \frac{s^3}{12}\right)\left|y'\right|^2\right),$$

якщо $0 < s < 1$. Виберемо $\Delta \in (0, T]$ так, щоб для будь-якого $s \in (0, \Delta)$

$$\frac{1}{4} - \frac{3s}{2} - \frac{63s^2}{4} - \frac{45s^3}{2} \geq \delta_1 > 0, \quad 3 - \frac{189s}{2} - 45s^2 - \frac{15s^3}{2} \geq \delta_1,$$

$$180 - 260s - 15s^2 \geq \delta_1.$$

Отже, для довільних $t_0 \in [0, T-\Delta]$, $(t, X) \in \Pi_{(t_0, t_0+\Delta]}$ і $\delta \in (0, t-t_0)$ можна розглянути функцію v у шарі $\Pi_{[t_0, t-\delta/2)}$, причому

$$v(\tau, \Xi) \leq \exp\left\{-\frac{\delta_1}{s}|X-\Xi|^2 + 6|X|^2 + \frac{\alpha}{s}\right\}, \qquad (\tau, \Xi) \in \Pi_{[t_0, t-\delta/2)}, \tag{19}$$

$$v(\tau, \Xi) \geq \exp\left\{-\gamma_1\left(|X|^2 + |\Xi|^2\right)\right\}, \qquad (\tau, \Xi) \in \Pi_{[t_0, t-\delta]}, \tag{20}$$

з`деяким $\gamma_1 > 0$, залежним від δ.

У залежності від коефіцієнтів рівняння (6) можна вибрати такі α і β, щоб виконувалась нерівність

$$(L^* v)(\tau, \Xi) \leq 0, \qquad (\tau, \Xi) \in \Pi_{[t_0, t-\delta/2)}. \tag{21}$$

Справді,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\tau, \Xi)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v(\tau, \Xi) = \beta e^{\varepsilon s} v(\tau, \Xi)\left(\beta e^{\varepsilon s}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\tau, \Xi) \times\right.$$

$$\left. \times \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau, \Xi)\tilde{\sigma}_i\right),$$

де

$$\sigma_i \equiv \frac{x_i - \xi_i}{2s} + \frac{3}{s^2}A_i + \frac{30}{s^3}B_i, \qquad \tilde{\sigma}_i \equiv \frac{9}{2s}, \qquad 1 \leq i \leq l;$$

$$\sigma_i \equiv \frac{x_i - \xi_i}{2s} + \frac{3}{s^2}A_i, \qquad \tilde{\sigma}_i \equiv \frac{2}{s}, \qquad l+1 \leq i \leq m;$$

$$\sigma_i \equiv \frac{x_i - \xi_i}{2s}, \qquad \tilde{\sigma}_i \equiv \frac{1}{2s}, \qquad m+1 \leq i \leq n;$$

$$A_i \equiv y_i + \frac{s}{2}(x_i + \xi_i) - \eta_i, \qquad 1 \leq i \leq m,$$

$$B_i \equiv z_i + \frac{s}{2}(y_i + \eta_i) + \frac{s^2}{12}(x_i - \xi_i) - \zeta_i, \qquad 1 \le i \le l.$$

На підставі умови А

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\tau, \Xi)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v(\tau, \Xi) \ge \beta e^{\varepsilon s} v(\tau, \Xi)\Bigg(\beta e^{\varepsilon s}\delta_0|\sigma|^2 - \\ - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau, \Xi)\tilde{\sigma}_i\Bigg).$$

Візьмемо $\beta > \dfrac{1}{\delta_0}$ і врахуємо, що $\varepsilon > 1$ і $e^{\varepsilon s} > 1$. Тоді одержимо

$$\left(\beta e^{\varepsilon s} v(\tau, \Xi)\right)^{-1}(L^* v)(\tau, \Xi) \le -\Bigg(-\frac{|x-\xi|^2}{4s^2} + \frac{3}{s^3} \times \\ \times \sum_{i=1}^{m}(x_i + \xi_i)A_i - \frac{9}{s^4}\sum_{i=1}^{m} A_i^2 + \frac{180}{s^5}\sum_{i=1}^{l}(y_i + \eta_i)B_i + \\ + \frac{60}{s^4}\sum_{i=1}^{l}(x_i - \xi_i)B_i - \frac{900}{s^6}\sum_{i=1}^{l} B_i^2 + \frac{\varepsilon|x-\xi|^2}{4s} + \frac{3\varepsilon}{s^3}\sum_{i=1}^{m} A_i^2 + \\ + \frac{180\varepsilon}{s^5}\sum_{i=1}^{l} B_i^2\Bigg) + \frac{6}{s^3}\sum_{i=1}^{m}\xi_i A_i - \frac{180}{s^4}\sum_{i=1}^{l}\xi_i B_i + \frac{360}{s^5}\sum_{i=1}^{l}\eta_i B_i + \\ + \sum_{i=1}^{l}\Bigg(\Bigg(-2\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j} a_{ij}(\tau, \Xi) + a_i(\tau, \Xi)\Bigg)\Bigg(\frac{x_i - \xi_i}{2s} - \frac{3}{s^2}A_i + \\ + \frac{30}{s^3}B_i\Bigg) - \beta e^{\varepsilon s}\delta_0\left(\frac{x_i - \xi_i}{2s} - \frac{3}{s^2}A_i + \frac{30}{s^3}B_i\right)^2 + a_{ii}(\tau, \Xi)\frac{9}{2s}\Bigg) + \\ + \sum_{i=l+1}^{m}\Bigg(\Bigg(-2\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j} a_{ij}(\tau, \Xi) + a_i(\tau, \Xi)\Bigg)\left(\frac{x_i - \xi_i}{2s} - \frac{3}{s^2}A_i\right) - \beta e^{\varepsilon s}\delta_0 \times \\ \times\left(\frac{x_i - \xi_i}{2s} - \frac{3}{s^2}A_i\right)^2 + a_{ii}(\tau, \Xi)\frac{2}{s}\Bigg) + \sum_{i=m+1}^{n}\Bigg(\Bigg(-2\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j} a_{ij}(\tau, \Xi) + a_i(\tau, \Xi)\Bigg) \times \\ \times \frac{x_i - \xi_i}{2s} - \beta e^{\varepsilon s}\delta_0\left(\frac{x_i - \xi_i}{2s}\right)^2 + a_{ii}(\tau, \Xi)\frac{1}{2s}\Bigg) - \left(\beta e^{\varepsilon s} s^2\right)^{-1} \times \\ \times \Bigg(\alpha - s^2\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} a_{ij}(\tau, \Xi) - \sum_{i=1}^{n}\partial_{\xi_i} a_i(\tau, \Xi) + a_0(\tau, \Xi)\Bigg)\Bigg) \le \\ \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - \xi_i)^2}{4s^2} - \frac{(x_i - \xi_i)^2}{4s^2}\right) + \sum_{i=1}^{m}\Bigg(\frac{9}{s^4}A_i^2 - \frac{9}{s^4}A_i^2 - \frac{3(x_i + \xi_i)}{s^3}A_i + \frac{6\xi_i}{s^3}A_i + \\ + \frac{3(x_i - \xi_i)}{s^3}A_i\Bigg) + \sum_{i=1}^{l}\Bigg(\frac{900}{s^6}B_i^2 - \frac{900}{s^6}B_i^2 - \frac{180(y_i + \eta_i)}{s^5}B_i - \frac{60(x_i - \xi_i)}{s^4}B_i -$$

$$- \frac{180\xi_i}{s^4}B_i + \frac{360\eta_i}{s^5}B_i - \frac{30(x_i-\xi_i)}{s^4}B_i + \frac{180}{s^5}A_iB_i \Bigg) + \sum_{i=1}^{n}\Bigg((1-\varepsilon)\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4s} +$$

$$+ \frac{9}{4s}\Bigg(-2\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j}a_{ij}(\tau,\Xi) + a_i(\tau,\Xi)\Bigg)^2 + \frac{9}{2s}a_{ii}(\tau,\Xi)\Bigg) + \sum_{i=1}^{m}(1-\varepsilon)\times$$

$$\times\frac{3}{s^3}A_i^2 + \sum_{i=1}^{l}(1-\varepsilon)\frac{180}{s^5}B_i^2 - \left(\beta e^{\varepsilon s}s^2\right)^{-1}\Bigg(\alpha - s^2\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}a_{ij}(\tau,\Xi) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\partial_{\xi_i}a_i(\tau,\Xi) + a_0(\tau,\Xi)\Bigg)\Bigg) \le -(\varepsilon-1)\Bigg(\frac{|x-\xi|^2}{4s} + \frac{3}{s^3}\left|y+\frac{s}{2}(x''+\xi'')-\eta\right|^2 +$$

$$+ \frac{180}{s^5}\left|z+\frac{s}{2}(y'+\eta')+\frac{s^2}{12}(x'-\xi')-\zeta\right|^2\Bigg) - (\beta e^{\varepsilon s}s^2)^{-1}\Bigg(\alpha - s^2\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}a_{ij}(\tau,\Xi) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\partial_{\xi_i}a_i(\tau,\Xi) + a_0(\tau,\Xi)\Bigg)\Bigg) + \frac{9}{4s}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(2a_{ii}(\tau,\Xi) + \Bigg(-2\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_i}a_{ij}(\tau,\Xi) + a_i(\tau,\Xi)\Bigg)^2\Bigg).$$

Якщо врахувати умову B, то за рахунок вибору $\alpha > 0$ останню суму можна зробити від'ємною. Це доводить нерівність (21).

Покладемо

$$\lambda \equiv \lambda(X,\delta,R) \equiv \min\left\{ Z(t,X;\tau,\Xi) \,\middle|\, \Xi\in B(X,R),\ \tau\in\left[t_0, t-\frac{\delta}{2}\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-2\alpha\delta^{-1} - 6|X|^2\right\}, \qquad R > (\alpha\delta_1^{-1})^{1/2}.$$

З додатності Z випливає, що $\lambda > 0$. Застосуємо тепер в $\left[t_0, t-\frac{\delta}{2}\right)\times \times\left(\mathbb{R}^N \setminus B(X,R)\right)$ для функції $u(\tau,\Xi) \equiv \lambda v(\tau,\Xi) - Z(t,X;\tau,\Xi)$, $(\tau,\Xi)\in \in \Pi_{[t_0,t-\delta/2)}$, принцип максимуму з [9] для рівняння (6). На підставі нерівності (21) і властивості нормальності ф. р. $(L^*u)(\tau,\Xi)\le 0$, $(\tau,\Xi)\in\Pi_{[t_0,t-\delta/2)}$. Умова $\overline{\lim}_{(\tau,\Xi)\to(\tau_0,\Xi_0)} u(\tau,\Xi) \le 0$ для кожної точки $(\tau_0,\Xi_0)\in \in \partial\left(\left[t_0,t-\frac{\delta}{2}\right)\times\left(\mathbb{R}^N\setminus B(X,R)\right)\right)\setminus\{t=t_0\}$ виконується, оскільки, по-перше, на підставі нерівності (19) і означення λ

$$u(\tau,\Xi) \le \lambda\exp\left\{6|X|^2\right\} - Z(t,X;\tau,\Xi) \le 0, \quad |X-\Xi| = R, \quad \tau\in\left[t_0,t-\frac{\delta}{2}\right),$$

по-друге, на підставі (19) $\lim_{(\tau,\Xi)\to(t-\delta/2,\Xi_0)} v(\tau,\Xi) = 0$ і $\lim_{(\tau,\Xi)\to(t-\delta/2,\Xi_0)} u(\tau,\Xi) \le \le 0$, $\Xi_0\in\mathbb{R}^N\setminus B(X,R)$. Нарешті, враховуючи (5) і (19), маємо

$$\overline{\lim_{|X|\to\infty}}\, u(\tau,\Xi) = 0, \qquad \tau\in\left[t_0,t-\frac{\delta}{2}\right).$$

Отже, одержуємо $u(\tau,\Xi)\le 0$, $(\tau,\Xi)\in\left[t_0,t-\frac{\delta}{2}\right)\times\left(\mathbb{R}^N\setminus B(X,R)\right)$. На підставі означення λ і (19) $u\le 0$ також в $[t_0,t-\delta]\times B(X,R)$. Тому $u\le 0$ в $\Pi_{[t_0,t-\delta]}$ або $Z(t,X;\tau,\Xi)\ge\lambda v(\tau,\Xi)$, $(\tau,\Xi)\in\Pi_{[t_0,t-\delta]}$, звідки з допомогою нерівності (20) випливає потрібна оцінка (11).

6. Доведення теореми 2. Позначимо через u_0 розв'язок задачі (1), (12) з $\varphi = 0$, який належить до класу E_0^T. Досить довести, що $u_0 = 0$ в $\Pi_{(0,T]}$.

Спочатку доведемо існування такого числа $\delta \in (0, T]$, залежного тільки від числа a з умови (13) і коефіцієнтів рівняння (1), що $u_0 = 0$ в $\Pi_{(0,\delta]}$.

Нехай $G_{\delta,R} \equiv (0, \delta] \times B_R$, $\delta \in (0, T]$, $R > 0$; θ — функція з простору $C^\infty([0, \infty))$ така, що $\theta(r) = 1$ для $r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\theta(r) = 0$ для $r \in \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$ і $\theta' \leq \leq 0$; (t, X) — точка з $G_{\delta, \overline{R}/4}$, де δ і $\overline{R} > 0$ — фіксовані числа, причому величина δ буде вказана пізніше.

Скориставшись формулою (7), в якій замість β, Λ, t_0, t_1, Ω, $u(\beta, \Lambda)$ і $v(\beta, \Lambda)$ покладемо відповідно τ, Ξ, h, $t - \varepsilon$, B_R, $u_0(\tau, \Xi)$ і $\theta(|\Xi|/R) Z^*(\tau, \Xi; t, X)$, де $R \geq \overline{R}$, $0 < h < \frac{t}{2}$ і $0 < \varepsilon < \frac{t}{2}$, на підставі рівності (9) і властивостей функції θ одержимо

$$\int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; t - \varepsilon, \Xi) \theta(|\Xi|/R) u_0(t - \varepsilon, \Xi)\, d\Xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; h, \Xi) \theta(|\Xi|/R) u_0(h, \Xi)\, d\Xi -$$

$$- \int_h^{t-\varepsilon} d\tau \int_{K_R} \overline{L^*\big(\theta(|\Xi|/R) Z^*(\tau, \Xi; t, X)\big)}\, u_0(\tau, \Xi)\, d\Xi, \qquad K_R \equiv B_{3R/4} \setminus B_{R/2}.$$

Після переходу в цій рівності до границі при $\varepsilon \to 0$ і використання (4) прийдемо до рівності

$$u_0(t, X) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; h, \Xi) \theta(|\Xi|/R) u_0(h, \Xi)\, d\Xi -$$

$$- \int_h^t d\tau \int_{K_R} \overline{L^*\big(\theta(|\Xi|/R) Z^*(\tau, \Xi; t, X)\big)}\, u_0(\tau, \Xi)\, d\Xi \equiv$$

$$\equiv I_{1h}^{(R)} + I_{2h}^{(R)}. \tag{22}$$

На підставі співвідношення (15) для u_0 з $\varphi = 0$, оцінки (5) і того, що інтегрування в $I_{1h}^{(R)}$ ведеться фактично по $B_{3R/4}$, маємо $\lim\limits_{h \to 0} I_{1h}^{(R)} = 0$. Тому, перейшовши в (22) до границі при $h \to 0$, одержимо

$$u_0(t, X) = -\int_0^t d\tau \int_{K_R} \overline{L^*\big(\theta(|\Xi|/R) Z^*(\tau, \Xi; t, X)\big)}\, u_0(\tau, \Xi)\, d\Xi \equiv -I_2^{(R)}. \tag{23}$$

Доведемо, що при відповідному виборі δ

$$\lim_{R \to \infty} I_2^{(R)} = 0. \tag{24}$$

Використовуючи (9), (5), властивості θ та нерівності

$$\left| \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_{\eta_i} \theta(|\Xi|/R) \right| \leq \frac{C}{R} |\xi|, \qquad \left| \sum_{i=1}^l \eta_i \partial_{\zeta_i} \theta(|\Xi|/R) \right| \leq \frac{C}{R} |\eta|,$$

$$\left| \partial_{\xi_i} \theta(|\Xi|/R) \right| \leq \frac{C}{R}, \qquad \left| \partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j} \theta(|\Xi|/R) \right| \leq \frac{C}{R^2}, \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

при $R \geq 1$ одержуємо оцінку

$$\left| L^*\left(\theta(|\Xi|/R)Z^*(\tau, \Xi; t, X)\right)\right| \leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-(M+1)/2}\exp\{-c\rho(t-\tau, X, \Xi)\}. \tag{25}$$

Зауважимо, що має місце нерівність

$$\rho(\beta, X, \Xi) \geq c_1\beta^{-\lambda}R^2, \quad 0 < \beta \leq T, \quad X \in B_{\overline{R}/4}, \quad \Xi \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R/2}, \tag{26}$$

де $c_1 > 0$; $\lambda = 1$ при $0 < \beta \leq 1$ і $\lambda = 5$ при $\beta > 1$; $\overline{R}$ — фіксоване число; R — досить велике число і $0 < \overline{R} < R$.

Справді, якщо $0 < \beta \leq T$ і $X \in B_{\overline{R}/4}$, то

$$\rho(\beta, X, \Xi) \geq \beta^{-\lambda}\left|\left(x, y+\beta x'', z+\beta y' + \frac{\beta^2}{2}x'\right) - \Xi\right|^2 \geq$$
$$\geq \beta^{-\lambda}\left||\Xi| - \left|\left(x, y+\beta x'', z+\beta y' + \frac{\beta^2}{2}x'\right)\right|\right|^2,$$
$$\left|\left(x, y+\beta x'', z+\beta y' + \frac{\beta^2}{2}x'\right)\right| \leq |X| + \left|\left(0, \beta x'', \beta y' + \frac{\beta^2}{2}x'\right)\right| \leq$$
$$\leq \frac{\overline{R}}{4}\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).$$

Для $\Xi \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R/2}$ одержуємо

$$\rho(\beta, X, \Xi) \geq \beta^{-\lambda}\left(\frac{R}{2} - \frac{\overline{R}}{4}\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right)\right)^2 \geq \frac{1}{4}\beta^{-\lambda}R^2$$

для всіх $R \geq R_0$, якщо для R_0 виконується нерівність

$$R_0 - \overline{R}\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right) \geq 0.$$

На підставі нерівностей (25) і (26) маємо

$$\left|I_2^{(R)}\right| \leq C\int_0^t d\tau \int_{K_R} (t-\tau)^{-(M+1)/2}\exp\left\{-cc_1(t-\tau)^{-\lambda}R^2\right\}|u_0(\tau, \Xi)|\,d\Xi.$$

Оскільки

$$(t-\tau)^{-(M+1)/2}\exp\left\{-cc_1(t-\tau)^{-\lambda}R^2\right\} = R^{-(M+1)/\lambda}\left((t-\tau)^{-\lambda/2}R\right)^{(M+1)/\lambda} \times$$
$$\times \exp\left\{-cc_1(t-\tau)^{-\lambda}R^2\right\} \leq C\exp\left\{-c_2\delta^{-\lambda}R^2\right\}, \tag{27}$$
$$0 \leq \tau < t \leq \delta, \quad R \geq 1, \quad c_2 > 0,$$

то

$$\left|I_2^{(R)}\right| \leq C\exp\left\{-c_2\delta^{-\lambda}R^2\right\}\int_0^t d\tau \int_{K_R} \exp\left\{-a|\Xi|^2\right\}|u_0(\tau, \Xi)| \times$$
$$\times \exp\left\{a|\Xi|^2\right\}d\Xi \leq C\exp\left\{-(c_2\delta^{-\lambda} - a)R^2\right\}\|u_0\|_0^a.$$

Звідси на підставі того, що $u_0 \in E_0^T$, випливає співвідношення (24), якщо $\delta <$ $< \min\left(\left(\frac{c_2}{a}\right)^{1/\lambda}, T\right)$.

Якщо в (23) перейти до границі при $R \to \infty$ і скористатись (24), то одержимо, що $u_0 = 0$ в $\Pi_{(0,\delta]}$. Аналогічно доводиться, що $u_0 = 0$ в $\Pi_{(\delta, 2\delta]}$, $\Pi_{(2\delta, 3\delta]}$ і т. д. Отже, теорему 2 доведено.

7. Доведення теореми 3. Як і при доведенні теореми 2, позначимо через u_0 розв'язок з класу E_p^T, $1 \le p \le \infty$, рівняння (1), який задовольняє умову (12) з $\varphi = 0$ в сенсі (16) і (17), та доведемо, що $u_0 = 0$ в $\Pi_{(0,T]}$.

Вважаючи точку (t, X) фіксованою в $G_{T,\overline{R}/4}$ для розв'язку u_0, як і в п. 6, одержимо рівність (22). Перейдемо в цій рівності до границі при $R \to \infty$. Доведемо, що при цьому $I_{1h}^{(R)}$ прямує до

$$I_{1h} \equiv \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; h, \Xi) u_0(h, \Xi) d\Xi.$$

За допомогою оцінки (5) для $J_h^{(R)} \equiv \left| I_{1h} - I_{1h}^{(R)} \right|$ маємо

$$J_h^{(R)} = \left| \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; h, \Xi)(1 - \theta(|\Xi|/R)) u_0(h, \Xi) d\Xi \right| \le$$

$$\le C(t-h)^{-M/2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R/2}} \exp\{-(c - c_0)\rho(t-h, X, \Xi)\} \times$$

$$\times \exp\Big\{-c_0 \rho(t-h, X, \Xi) + k_1(h, a_1)|\xi|^2 + k_2(h, a_2)|\eta + h\xi''|^2 +$$

$$+ k_3(h, a_3)\left|\zeta + h\eta' + \frac{h^2}{2}\xi'\right|^2\Big\}\Big(|u_0(h, \Xi)| \exp\Big\{-k_1(h, a_1)|\xi|^2 -$$

$$- k_2(h, a_2)|\eta + h\xi''|^2 - k_3(h, a_3)\left|\zeta + h\eta' + \frac{h^2}{2}\xi'\right|^2\Big\}\Big) d\Xi. \tag{28}$$

На підставі нерівностей (14) одержуються такі нерівності:

$$-c_0 \rho(t-h, X, \Xi) + k_1(h, a_1)|\xi|^2 + k_2(h, a_2)|\eta + h\xi''|^2 +$$

$$+ k_3(h, a_3)\left|\zeta + h\eta' + \frac{h^2}{2}\xi'\right|^2 \le -c_0 \rho(t-h, X, \Xi) + s_1(h)|\xi|^2 +$$

$$+ s_2(h)|\eta|^2 + s_3(h)|\zeta|^2 \le k_1(t-h, s_1(h))|x|^2 + k_2(t-h, s_2(h)) \times$$

$$\times |y + (t-h)x''|^2 + k_3(t-h, s_3(h))\left|z + (t-h)y' + \frac{(t-h)^2}{2}x'\right|^2 \le c_3,$$

$$X \in B_{\overline{R}/4}, \quad \Xi \in \mathbb{R}^N, \tag{29}$$

де h — досить мале число таке, що $0 < t - h < T < \min\limits_{1 \le i \le 3} \left(\dfrac{c_0}{s_i(h)} \right)^{1/(2i-1)}$; $c_3 > 0$. Далі таке число h фіксуємо.

З нерівностей (26) – (29) випливає оцінка

$$J_h^{(R)} \le C \exp\left\{ -\frac{(c - c_0)c_1}{2}(t-h)^{-\lambda} R^2 + c_3 \right\} \int_{\mathbb{R}^N} (t-h)^{-M/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{c-c_0}{2}\rho(t-h, X, \Xi)\right\}\Big(|u_0(h,\Xi)|\exp\Big\{-k_1(h,a_1)|\xi|^2 -$$

$$- k_2(h,a_2)|\eta + h\xi''|^2 - k_3(h,a_3)\left|\zeta + h\eta' + \frac{h^2}{2}\xi'\right|^2\Big\}\Big)d\Xi. \qquad (30)$$

Якщо $p = 1$, то з (30) відразу одержуємо

$$J_h^{(R)} \le C(t-h)^{-M/2}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}(t-h)^{-\lambda}R^2 + c_3\right\}\times$$

$$\times \|u_0(h,\cdot)\|_1^{k(h,a)} \to 0, \quad R\to\infty.$$

Якщо $1 < p < \infty$, то з допомогою нерівності Гельдера і рівності

$$\int_{\mathbb{R}^N} t^{-M/2}\exp\{-\delta\rho(t,X,\Xi)\}d\Xi = \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{N/2}, \quad \delta > 0, \quad t > 0, \quad X\in\mathbb{R}^N, \qquad (31)$$

одержуємо

$$J_h^{(R)} \le C\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}(t-h)^{-\lambda}R^2 + c_3\right\}(t-h)^{-M/2p}\times$$

$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^N}(t-h)^{-M/2}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)p'}{2}\rho(t-h,X,\Xi)\right\}d\Xi\right)^{1/p'}\|u_0(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)} \to 0,$$

$$R\to\infty, \quad p' \equiv p/(p-1).$$

Використовуючи нерівність (30) і рівність (31), при $p = \infty$ маємо

$$J_h^{(R)} \le C\|u_0(h,\cdot)\|_\infty^{k(h,a)}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}(t-h)^{-\lambda}R^2\right\}\to 0, \quad R\to\infty.$$

Тепер доведемо, що $I_{2h}^{(R)} \to 0$, $R\to\infty$. Використовуючи оцінку (25), так само, як вище для $J_h^{(R)}$, доводимо

$$\left|\int_{K_R} L^*\big(\theta(|\Xi|/R)Z^*(\tau,\Xi;t,X)\big)u_0(\tau,\Xi)d\Xi\right| \le$$

$$\le C\|u_0(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau,a)}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}(t-\tau)^{-\lambda}R^2\right\}(t-\tau)^{-\alpha},$$

де $\alpha = (M+p)/2p$ при $1\le p<\infty$ і $\alpha = 1/2$ при $p=\infty$.

Оскільки (подібно до (27))

$$(t-\tau)^{-\alpha}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}(t-\tau)^{-\lambda}R^2\right\} \le C\exp\left\{-c_2t^{-\lambda}R^2\right\},$$

$$0\le\tau<t, \quad R\ge 1, \quad c_2>0,$$

і $u_0\in E_p^T$, то

$$\left|I_{2h}^{(R)}\right| \le C\exp\left\{-c_2t^{-\lambda}R^2\right\}\to 0, \quad R\to\infty.$$

Отже, після переходу в (22) до границі при $R\to\infty$ одержимо

$$u_0(t,X) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;h,\Xi)u_0(h,\Xi)d\Xi \equiv I_{1h}. \qquad (32)$$

Тепер у рівності (32) перейдемо до границі при $h \to 0$. На підставі нерівностей (5) і (29) маємо

$$\left|I_{1h}\right| \le C(t-h)^{-M/2} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-(c-c_0)\rho(t-h, X, \Xi)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_0(\rho(t-h, X, \Xi) + s_1(h)|\xi|^2 + s_2(h)|\eta|^2 + s_3(h)|\zeta|^2\right\} \times$$

$$\times\left(|u_0(h, \Xi)|\exp\left\{-s_1(h)|\xi|^2 - s_2(h)|\eta|^2 - s_3(h)|\zeta|^2\right\}\right)d\Xi \le$$

$$\le C(t-h)^{-M/2} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-(c-c_0)\rho(t-h, X, \Xi)\right\}(|u_0(h, \Xi)| \times$$

$$\times \exp\left\{-s_1(h)|\xi|^2 - s_2(h)|\eta|^2 + s_3(h)|\zeta|^2\right\}\right)d\Xi.$$

При $p = 1$ відразу одержумо оцінку

$$\left|I_{1h}\right| \le C(t-h)^{-M/2}\|u_0(h, \cdot)\|_1^{s(h)}, \tag{33}$$

а при $1 < p < \infty$ за допомогою нерівності Гельдера та рівності (31) маємо

$$\left|I_{1h}\right| \le C(t-h)^{-M/2p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(t-h)^{-M/2}\exp\left\{-(c-c_0)p'\rho(t-h, X, \Xi\right\}d\Xi\right)^{1/p'} \times$$

$$\times \|u_0(h, \cdot)\|_p^{s(h)} = C(t-h)^{-M/2p}\|u_0(h, \cdot)\|_p^{s(h)}. \tag{34}$$

На підставі співвідношення (16) для u_0 з $\varphi = 0$ з оцінок (33) і (34) випливає

$$\lim_{h \to 0} I_{1h} = 0 \tag{35}$$

і, отже, рівність $u = 0$ в $\Pi_{(0, T]}$ при $1 \le p < \infty$.

Таке ж твердження має місце і при $p = \infty$. Щоб у цьому переконатись, досить довести співвідношення (35) для $t \in (0, T_0]$, де T_0 — досить мале число з $(0, T)$. З такого співвідношення випливатиме, що $u_0 = 0$ в $\Pi_{(0, T_0]}$, а звідси, взявши в (32) $h \le T_0$, одержимо рівність $u_0 = 0$ в $\Pi_{(0, T]}$.

Запишемо I_{1h} при $p = \infty$ у вигляді

$$I_{1h} = \int_{\mathbb{R}^N}(Z(t, X; h, \Xi) - Z(t, X; 0, \Xi))u_0(h, \Xi)d\Xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} Z(t, X; 0, \Xi)u_0(h, \Xi)d\Xi \equiv I'_{1h} + I''_{1h}. \tag{36}$$

Користуючись неперервністю ф. р. Z, оцінкою (5), обмеженістю норм $\|u_0(h, \cdot)\|_\infty^{k(h, a)}$, $0 < h \le T$, і теоремою Лебега про обмежену збіжність, можна обгрунтовувати правильність співвідношення

$$\lim_{h \to 0} I'_{1h} = 0. \tag{37}$$

Оскільки при

$$0 < t \le T_0 < \min_{1 \le i \le 3}\left(\frac{c_0}{s_i(T)}\right)^{1/(2i-1)}, \qquad T_0 \le T,$$

функція $\psi(\Xi) \equiv Z(t, X; 0, \Xi)$, $\Xi \in \mathbb{R}^N$, на підставі нерівностей (5) і (14), задовольняє нерівність

$$|\psi(\Xi)|\exp\left\{s_1(T)|\xi|^2+s_2(T)|\eta|^2+s_3(T)|\zeta|^2\right\}\le$$

$$\le Ct^{-M/2}\exp\left\{-(c-c_0)\rho(t,X,\Xi)+k_1(t,s_1(T))|x|^2+\right.$$

$$\left.+k_2(t,s_2(T))|y+tx''|^2+k_3(t,s_3(T))\left|z+ty'+\frac{t^2}{2}x'\right|^2\right\}$$

і, отже, $\psi\in\Psi$, то на підставі співвідношення (17) для u_0 з $\varphi=0$ одержуємо при $0<t\le T_0$

$$\lim_{h\to 0} I''_{1h} = 0. \tag{38}$$

З (36) – (38) випливає потрібне співвідношення (35) і теорему 3 доведено.

8. Доведення теореми 4. Нехай u — невід'ємний розв'язок рівняння (1). Доведемо, що він належить до класу $E_0^{T_1}$, $T_1<T$.

Покладемо

$$v_R(t,X)\equiv\int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)\theta(|\Xi|/R)u(\tau,\Xi)\,d\Xi,\qquad (t,X)\in\Pi_{(\tau,T]},$$

де $0\le\tau<T$, $R>0$, θ — функція з п. 6. Перевіримо виконання умов принципу максимуму з [9] для різниці $u-v_R\equiv U_R$. Очевидно, $(LU_R)(t,X)\ge 0$, $(t,X)\in\Pi_{(\tau,T]}$. Умова $\lim\limits_{(t,X)\to(t_0,X_0)} U_R(t,X)\ge 0$ для кожної точки $(t_0,X_0)\in\partial(\Pi_{(\tau,T]})\setminus\{t=T\}$ виконується, тому що на підставі співвідношення (4) для (2) маємо

$$\lim_{t\to\tau}\int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)\theta(|\Xi|/R)u(\tau,\Xi)\,d\Xi = \theta(|\Xi|/R)u(\tau,\Xi)\le u(\tau,\Xi),$$

$$0\le\tau<T,\qquad X\in\mathbb{R}^N.$$

Оскільки інтегрування в v_R ведеться тільки по $B_{3R/4}$, то з допомогою оцінки (5) одержимо

$$\lim_{|X|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)\theta(|\Xi|/R)u(\tau,\Xi)\,d\Xi = 0,\qquad t\in(\tau,T].$$

Це означає, що виконується остання умова $\lim\limits_{|X|\to\infty} U_R(t,X)\ge 0$, $t\in(\tau,T]$.

Отже, на підставі принципу максимуму $U_R\ge 0$ в $\Pi_{(\tau,T]}$, тобто для кожного $0\le\tau<T$

$$u(t,X)\ge\int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)\theta(|\Xi|/R)u(\tau,\Xi)\,d\Xi,\qquad (t,X)\in\Pi_{(\tau,T]}.$$

Оскільки ця нерівність виконується для будь-якого $R>0$ і підінтегральний вираз невід'ємний, то при $R\to\infty$ одержимо

$$u(t,X)\ge\int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)u(\tau,\Xi)\,d\Xi,\qquad (t,X)\in\Pi_{(\tau,T]}. \tag{39}$$

Проінтегруємо нерівність (39) по $\tau\in(t_0,t-\delta)$, $\delta\in(0,t-t_0)$. Якщо покласти $t_0=0$, $t=\Delta$ і використати оцінку (11), то одержимо

$$(\Delta-\delta)u(\Delta, X) \geq \int_0^{\Delta-\delta} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \omega \exp\left\{-\gamma|\Xi|^2\right\} u(\tau, \Xi)\, d\Xi,$$

тобто

$$\int_0^{\Delta-\delta} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-\gamma|\Xi|^2\right\} u(\tau, \Xi)\, d\Xi \; < \; \infty.$$

Якщо тепер покласти $t_0 = \Delta - \delta$, $t = 2\Delta - \delta$, то аналогічно одержимо збіжність інтеграла, в якому інтегрування по τ здійснюється по інтервалу $(\Delta - \delta, 2(\Delta - \delta))$. Продовжуватимемо цей процес доти, поки $t = i\Delta - (i-1)\delta < T$. Нарешті покладемо $t_0 = T - \Delta$ і $t = T$. Об'єднавши одержане, матимемо

$$\int_0^{T-\delta} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-\gamma|\Xi|^2\right\} u(\tau, \Xi)\, d\Xi \; < \; \infty,$$

тобто $u \in E_0^{T_1}$, $T_1 \equiv T - \delta$.

Застосувавши теорему 2, одержимо єдиність у $\Pi_{(0, T_1]}$ невід'ємного розв'язку рівняння (1), який задовольняє умову (12) у розумінні (15). Оскільки δ можна взяти як завгодно малим, то звідси випливає єдиність у $\Pi_{(0, T]}$.

1. *Сонин И. М.* Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее применения. – 1967. – **12**, вип. 3. – С. 540–547.
2. *Малицкая А. П.* Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений // Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений: Тем. сб. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1973. – С. 109–130.
3. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 7. – С. 1316–1330.
4. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 713–718.
5. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. Н.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений. – Черновцы, 1989. – 62 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, № 1762-Ук89.
6. *Івасишен С. Д., Тичинська Л. М., Ейдельман С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 5. – С. 6–8.
7. *Івасишен С. Д., Дронь В. С.* Деякі властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Волин. мат. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 76–78.
8. *Малицька Г. П.* Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 195–201.
9. *Дронь В. С.* Про принцип максимуму для вироджених ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – 1996. – Вип. 12. – С. 272–277.
10. *Scornazzani V.* Sulle soluzioni non negative dell'equazione di Kolmogorov // Rend. mat. e appl. – 1982. – **2**, № 4. – P. 689–709.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

Одержано 16.10.96