УДК 512.544

Н. В. Калашнікова (Дніпропетров. ун-т)

ГРУПИ, ВСІ ВЛАСНІ ФАКТОР-ГРУПИ ЯКИХ ШАРОВО-ЧЕРНІКОВСЬКІ

We describe solvable groups whose all proper quotient groups possess the layer–Chernikov properties.

Одержано опис розв'язних груп, всі власні фактор-групи яких шарово-черніковські.

В теорії груп вже досить довгий час вивчаються групи, всі власні фактор-групи яких (тобто фактор-групи за неодиничними нормальними підгрупами) мають яку-небудь властивість або належать до якого-небудь (достатньо вивченого) класу груп. Одними з перших робіт (в теорії нескінченних груп) були роботи М. Н'юмена [1, 2], в яких вивчались нескінченні групи, всі власні фактор-групи яких абелеві. Далі з'явились роботи Д. Маккарті [3, 4] і Дж. Уілсона [5], де вивчались нескінченні групи, всі власні фактор-групи яких скінченні. Це привело, з одного боку, до розгляду груп, всі власні фактор-групи яких є узагальненнями абелевих груп і, з іншого боку, груп, всі власні фактор-групи яких задовольняють деяку умову скінченності. Наприклад, Д. Робінсон і Дж. Уілсон [6] описали розв'язні групи, всі власні фактор-групи яких задовольняють умову Max. Для розв'язних груп, всі власні фактор-групи яких задовольняють двоїсту умову Min, опис одержано в роботах [7, 8]. У роботі Д. Робінсона і Ж. Женга [9] вивчались розв'язні групи, всі власні фактор-групи яких скінченні над центром або мають скінченний комутант, тобто є добре вивченими підкласами класу FC-груп. Іншим добре вивченим підкласом класу FC-груп є шарово-скінченні групи (групи, в яких множина елементів кожного порядку є скінченною). У свою чергу, шарово-скінченні групи — це підклас класу шарово-черніковських груп.

Шарово-скінченні групи були введені С. М. Черніковим [10, 11]. Вони були досконало вивчені С. М. Черніковим у роботах [10, 12]. Цей клас залишається одним з найбільш вивчених підкласів у класі FC-груп. Я. Д. Половицький у роботах [13, 14] вивчав періодичні групи, у яких для кожного $n \in \mathbb{Z}$ підгрупа $G(n)$ є черніковською. Ці групи називаються тепер шарово-черніковськими. Деякі питання будови шарово-черніковських груп вивчав Д. Робінсон [15]. Шарово-черніковські групи є також одним з найбільш досконало вивчених підкласів класу CC-груп (груп з черніковськими класами спряжених елементів). У той же час вони мають деякі властивості, які суттєво відрізняють їх від FC-груп. Тому вивчення груп, кожна власна фактор-група яких є шарово-черніковською, є природною та цікавою задачею.

Вивченню таких груп і присвячена дана робота.

Нехай G — група, A — її абелева нормальна підгрупа, $H = G/A$. Тоді A можна розглядати як $\mathbb{Z}H$-модуль, якщо означити дію $\mathbb{Z}H$ на A за правилом

$$a\left(n_1\overline{h}_1 + \ldots + n_k\overline{h}_k\right) = \left(a^{h_1}\right)^{n_1}\left(a^{h_2}\right)^{n_2} \ldots \left(a^{h_k}\right)^{n_k}, \quad a \in A,$$

де $a^{h_i} = h_i^{-1}ah_i$, $\overline{h}_i = h_iA$, $1 \le i \le k$.

Нехай A — модуль над кільцем K. Будемо говорити, що A — *коквазіскінченний модуль* (*див.* [16, § 1.2]), *якщо кожний його ненульовий підмодуль має скінченний індекс та перетин всіх ненульових підмодулів — нульовий підмодуль.*

Лема 1. *Нехай G — майже розв'язна періодична група, всі власні фактор-групи якої шарово-черніковські. Якщо G не є шарово-черніковською, то G включає в себе таку нескінченну нормальну елементарну абелеву p-підгрупу, p — просте число, що $\mathbb{F}_p(G/A)$-модуль A або простий, або коквазіскінченний.*

Нижче $\hookrightarrow$ — знак вкладення.

Доведення. Оскільки група G майже розв'язна, то вона включає в себе нормальну абелеву підгрупу B. Якщо B включає в себе такі неодиничні G-припустимі підгрупи B_1, B_2, що $B_1 \cap B_2 = \langle 1 \rangle$, то за теоремою Ремака (див., наприклад, [17], теорема I.1.2) одержуємо вкладення $G \hookrightarrow G/B_1 \times G/B_2$. Оскільки фактор-групи G/B_1 і G/B_2 шарово-черніковські, то звідси випливає, що й G шарово-черніковська. Тому будемо припускати, що кожні дві неодиничні G-припустимі підгрупи B мають неодиничний перетин. Це означає, зокрема, що B — абелева p-підгрупа для деякого простого числа p. Нехай $C = \Omega_1(B)$ — нижній шар B. Якщо C скінченна, то оскільки G/C шарово-черніковська, то й вся група G шарово-черніковська. Тому розглянемо випадок, коли підгрупа C нескінченна. Нехай

$$\mathfrak{M} = \{E \mid E \text{ — неодинична } G\text{-припустима підгрупа } C\}.$$

Якщо $\cap \mathfrak{M} \neq \langle 1 \rangle$, то покладемо $A = \cap \mathfrak{M}$. Тоді A не включає в себе власних неодиничних G-припустимих підгруп, тобто $\mathbb{F}_p(G/A)$-модуль A є простим.

Якщо $\cap \mathfrak{M} = \langle 1 \rangle$, то покладемо $A = C$. Якщо E — неодинична G-припустима підгрупа A, то фактор-група G/E шарово-черніковська. Тому її елементарна абелева підгрупа A/E скінченна. Іншими словами, це означає, що $\mathbb{F}_p(G/A)$-модуль A є коквазіскінченним. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай G — майже розв'язна періодична група, всі власні фактор-групи якої шарово-черніковські, причому G не є шарово-черніковською. Припустимо далі, що G включає в себе таку нормальну нескінченну елементарну абелеву p-підгрупу A, p — просте число, що $\mathbb{F}_p(G/A)$-модуль A — простий. Тоді $A = C_G(A)$.*

Доведення. Припустимо, що $C_G(A) \neq A$. Покладемо $C = C_G(A)$. Оскільки фактор-група G/A шарово-черніковська, то C/A включає в себе скінченну неодиничну G-припустиму підгрупу K/A. Тоді підгрупа K скінченна над центром, а тому, маючи на увазі теорему Шура (див., наприклад, [17], теорема II.1.4), одержимо, що її комутант $[K, K]$ скінченний. Очевидно, підгрупа $[K, K]$ — G-припустима. Тому якщо припустити тепер, що підгрупа $[K, K]$ неодинична, то з того факту, що $G/[K, K]$ шарово-черніковська, випливає, що й вся група G шарово-черніковська.

Одержана суперечність показує, що $[K, K] = \langle 1 \rangle$, тобто підгрупа K абелева. Фактор-група G/A майже розв'язна, тобто вона включає в себе нормальну розв'язну підгрупу H/A скінченного індексу. З теореми 1 роботи Д. І. Зайцева [18] та теореми A роботи [19] випливає тепер розкладання $K = A \times B$, де B — H-припустима підгрупа. Ясно, що B скінченна, отже, індекс $|H: C_H(B)|$ скінченний. Оскільки й індекс $|G: H|$ скінченний, то скінченним буде також індекс $|G: C_G(B)|$. Одержуємо тепер, що підгрупа B^G скінченна. Оскільки $K \neq A$, то B — неодинична, а це означає, що B^G неодинична. Знову група G включає в себе скінченну неодиничну нормальну підгрупу. Але вище вже зазначалось, що в цьому випадку вона шарово-черніковська. Знову одержуємо суперечність, яка доводить рівність $C_G(A) = A$. Лему доведено.

Лема 3. *Нехай G — майже розв'язна періодична група, всі власні фактор-групи якої шарово-черніковські, причому G не є шарово-черніковською. Тоді G включає в себе таку нескінченну нормальну елементарну абелеву p-підгрупу $A = C_G(A)$, p — просте число, що $\mathbb{F}_p(G/A)$-модуль A — простий.*

Доведення. Із леми 1 випливає, що G включає в себе таку нескінченну елементарну абелеву p-підгрупу A, p — просте число, що або $\mathbb{F}_pG$-модуль A є коквазіскінченним, або $\mathbb{F}_pG$-модуль A — простий. У другому випадку з леми 2 одержуємо рівність $A = C_G(A)$. Покажемо, що перший випадок неможливий.

Припустимо протилежне, нехай A — коквазіскінченний $\mathbb{F}_p(G/A)$-модуль і $H = G/C_G(A)$. Якщо припустити, що фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, то для будь-якого елемента $1 \neq a \in A$ підгрупа $\langle a \rangle^G$ скінченна. Проте вище вже не раз зазначалося, що група G не може включати в себе неодиничних скінченних нормальних підгруп. Отже, H нескінченна. Нехай K — нормальна розв'язна підгрупа, яка має в H скінченний індекс; $\mathbb{F}_pH$-модуль A очевидно нетеровий, тому з теореми А роботи Дж. Уілсона [19] випливає, що A — нетеровий $\mathbb{F}_pK$-модуль. Тому A включає в себе такий $\mathbb{F}_pK$-підмодуль B, що A/B або нескінченний простий $\mathbb{F}_pK$-модуль, або A/B — коквазіскінченний $\mathbb{F}_pK$-модуль. Нехай S — повна множина представників суміжних класів групи H по K, які взяті по одному з кожного класу. Тоді $\bigcap_{x \in S} Bx$ — $\mathbb{F}_pH$-підмодуль. Оскільки цей підмодуль має нескінченний індекс, то $\bigcap_{x \in S} Bx = \langle 0 \rangle$, тобто $A \hookrightarrow \bigoplus_{x \in S} A/Bx$. Припустимо, що A/B — нескінченний простий $\mathbb{F}_pK$-модуль. Тоді й A/Bx — також нескінченний простий $\mathbb{F}_pK$-модуль для будь-якого $x \in S$. Таким чином, A є підмодулем напівпростого $\mathbb{F}_pK$-модуля, а тому A — напівпростий $\mathbb{F}_pK$-модуль, більш того, $A = E_1 \oplus \ldots \oplus E_l$, де E_j — нескінченний простий $\mathbb{F}_pK$-підмодуль для будь-якого j, $1 \leq j \leq l$. Якщо C — ненульовий $\mathbb{F}_pH$-підмодуль A, то C — також і $\mathbb{F}_pK$-підмодуль. Тому або $E_j \cap C = \langle 0 \rangle$, або $E_j \cap C = E_j$. Але в першому випадку $E_j \cong E_j/E_j \cap C \cong E_j + C/C$, а останній фактор-модуль скінченний, тому що індекс $|A : C|$ скінченний. Отже, $E_j \cap C = E_j$, тобто $E_j \leq C$ для будь-якого j, $1 \leq j \leq l$. Це означає, що $C = A$, тобто A — простий $\mathbb{F}_pH$-модуль. Одержана суперечність показує, що $\overline{A} = A/B$ — коквазіскінченний $\mathbb{F}_pK$-модуль.

Покладемо $R = O_{p'}(K)$, тоді K/R — черніковська група [13]. Припустимо, що $R = \langle 1 \rangle$, тобто K — черніковська підгрупа. Нехай D — ділена частина K. Якщо $\overline{C}$ — довільний ненульовий $\mathbb{F}_pK$-підмодуль $\overline{A}$, то фактор-модуль $\overline{A}/\overline{C}$ скінченний, тому скінченний і індекс $|D : C_D(\overline{A}/\overline{C})|$. Але D не включає в себе власних підгруп скінченного індексу, отже, $D = C_D(\overline{A}/\overline{C})$. Іншими словами, $\overline{A}(g-1) \leq \overline{C}$ для всякого елемента $g \in D$. Оскільки перетин всіх ненульових підмодулів $\overline{A}$ — нульовий підмодуль, то $\overline{A}(g-1) = \langle 0 \rangle$, тобто $D \leq C_K(A/B)$. Аналогічно $D \leq C_K(A/Bx)$ для будь-якого $x \in S$. Оскільки $A \hookrightarrow \bigoplus_{x \in S} A/Bx$, то

$$\bigcap_{x \in S} C_K(A/Bx) \leq C_K(A) = \langle 1 \rangle.$$

Звідси $D = \langle 1 \rangle$, тобто підгрупа K скінченна. Але тоді для будь-якого елемента $\bar{a} \in \bar{A}$ підмодуль, породжений $\bar{a}$, скінченний, а тому його індекс нескінченний. Одержана суперечність показує, що $R \neq \langle 1 \rangle$. За допомогою аналогічних тверджень можна показати, що R нескінченна. Нехай $\bar{C}$ — власний ненульовий $\mathbb{F}_p K$-підмодуль $\bar{A}$. Оскільки фактор-модуль $\bar{A}/\bar{C}$ скінченний, то індекс $|R : C_R(\bar{A}/\bar{C})|$ скінченний. Зокрема, звідси випливає, що $C_R(\bar{A}/\bar{C})$ — нескінченна K-припустима підгрупа R. Оскільки K — шарово-черніковська і розв'язна, то $C_R(\bar{A}/\bar{C})$ включає в себе абелеву K-припустиму скінченну підгрупу U. З теореми Машке (див., наприклад, [20], теорема 10.8) одержуємо розкладання $\bar{A} = \bar{C} \oplus \bar{E}$, де $\bar{E}$ — $\mathbb{F}_p U$-підмодуль. Для будь-якого $u \in U$ маємо $\bar{E}(u-1) \leq \bar{E}$. З іншого боку, $u \in C_R(\bar{A}/\bar{C})$, тому $\bar{E}(u-1) \leq \bar{C}$. Отже, $\bar{E}(u-1) \leq \bar{E} \cap \bar{C} = \langle 0 \rangle$, тобто $\bar{E} \leq C_{\bar{A}}(U)$. Це означає, що $C_{\bar{A}}(U) = \bar{C}_1 \neq \langle 0 \rangle$. Якщо $\bar{a} \in \bar{C}_1$, $u \in U$, $g \in K$, то $gu = u_1 g$ для деякого елемента $u_1 \in U$ (адже U нормальна в K), отже, маємо

$$(\bar{a}g)u = \bar{a}(gu) = \bar{a}(u_1 g) = \bar{a}g.$$

Це означає, що $C_{\bar{A}}(U)$ — $\mathbb{F}_p K$-підмодуль. Оскільки $C_{\bar{A}}(U) \neq \langle 0 \rangle$, то звідси випливає, що фактор-модуль $\bar{A}/C_{\bar{A}}(U)$ скінченний. Розглянемо відображення

$$\varphi : \bar{a} \to \bar{a}(u-1), \qquad \bar{a} \in \bar{A}.$$

Оскільки U абелева, то легко показати, що φ — $\mathbb{F}_p U$-гомоморфізм, причому $\operatorname{Ker} \varphi = C_{\bar{A}}(U)$, $\operatorname{Im} \varphi = \bar{A}(u-1)$. З огляду на те, що $\bar{A}/C_{\bar{A}}(U)$ скінченний, скінченним є також і $\bar{A}/C_{\bar{A}}(U)$, а тому $\bar{A}/C_{\bar{A}}(U) \cong \bar{A}(u-1)$ скінченний. Нехай S_1 — повна множина представників суміжних класів підгрупи K по $C_K(u)$, які взяті по одному з кожного класу. Якщо $x \in C_K(u)$, то $xu = ux$, тобто $\bar{A}(u-1)x = \bar{A}(u-1)$. Оскільки U нормальна в K, то для кожного $x \in S_1$ маємо $ux = xu_x$ для деякого $u_x \in U$. Тому $\bar{A}(u-1)x = Ax(u_x - 1) = A(u_x - 1)$. Покладемо $\bar{A}_1 = \sum_{u \in U} \bar{A}(u-1)$, тоді $\bar{A}_1$ — $\mathbb{F}_p K$-підмодуль $\bar{A}$. Але $\bar{A}_1$ скінченний. Оскільки $\bar{A}$ — коквазіскінченний, то це означає, що $\bar{A}_1 = \langle 0 \rangle$, тобто $\bar{A}(u-1) = \langle 0 \rangle$ для будь-якого $u \in U$. Але тоді $U \leq C_K(\bar{A}) = C_K(A/B)$. Звідси маємо включення $U = x^{-1}Ux \leq x^{-1}C_K(A/B)x = C_K(A/Bx)$ для будь-якого $x \in S$. У цьому випадку $U \leq C_H(A)$, тому що $A \hookrightarrow \bigoplus_{x \in S} A/Bx$. Але $C_H(A) = \langle 1 \rangle$. Одержана суперечність показує, що модуль A не може бути коквазіскінченним. Лему доведено.

Наступний результат неявно зустрічається в багатьох роботах (див., наприклад, [9]), але явно ніде не сформульований. Доведення стандартне.

Лема 4. *Нехай F — поле, G — група, $C = \zeta(G)$ — центр G, A — простий FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$, $I = \operatorname{Ann}_{FC}(A)$. Тоді I — простий ідеал групового кільця FC.*

Доведення. Нехай x_1, x_2 — такі елементи FC, що $x_1 x_2 \in I$. Припустимо, що $x_1 \notin I$. Тоді знайдеться елемент $a_1 \in A$, для якого $a_2 = a_1 x_1 \neq 0$. Розглянемо відображення $\varphi : A \to A$, яке означене за правилом $a\varphi = ax_2$ для будь-якого $a \in A$. Оскільки x_2 міститься в центрі кільця FG, то φ — FG-гомоморфізм. Далі маємо $0 = a_1(x_1 x_2) = (a_1 x_1)x_2 = a_2 x_2 = a_2 \varphi$, тобто $a_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$, зокрема $\operatorname{Ker} \varphi \neq \langle 0 \rangle$. Оскільки $\operatorname{Ker} \varphi$ — FG-підмодуль A, то це означає, що $A = \operatorname{Ker} \varphi$, тобто $ax_2 = 0$ для будь-якого $a \in A$. Але тоді $x_2 \in I$. Лему доведено.

Якщо G — група, то через $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G$ позначимо підгрупу, яка породжена всіма мінімальними нормальними абелевими підгрупами G.

Якщо H — підгрупа G, то покладемо $\mathrm{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} x^{-1} H x$.

Лема 5. *Нехай F — поле, G — шарово-черніковська група, A — простий FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Тоді $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G$ містить у собі таку підгрупу R, яка має наступні властивості:*

1) $\mathrm{Core}_G(R) = \langle 1 \rangle$;
2) $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G / R$ *— локально циклічна група;*
3) *якщо* $\mathrm{char}\, F = p > 0$, *то* $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G / R$ *— p'-група, тобто* $p \notin \Pi(\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G)$.

Доведення. Нехай q — просте число, Q — силовська підгрупа $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G$. Тоді Q — скінченна G-припустима підгрупа $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G$, тому $K = C_G(Q)$ — нормальна підгрупа скінченного індексу. З результатів роботи Д. І. Зайцева ([21], лема) одержуємо розклад $A = B \oplus B x_1 \oplus \ldots \oplus B x_l$ для деяких елементів $x_1, \ldots, x_l \in G$, де B — простий $\mathbb{F}K$-підмодуль. Нехай $I = \mathrm{Ann}_{F\zeta(K)} B$. З леми 4 випливає, що фактор-кільце $P = F\zeta(K)/I$ буде областю цілісності. Розглянемо відображення $\varphi: Q \to U(P)$, означене за правилом $u\varphi = u + I$, $u \in Q$. Очевидно, φ — груповий гомоморфізм. Якщо $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, то $u + I = 1 + I$, тобто $u - 1 \in I$. Але це означає, що $u \in C_Q(B) = R_Q$. Отже, фактор-група Q/R_Q вкладається в групу оборотних елементів деякої області цілісності. У свою чергу, кожна область цілісності вкладається в поле, а всяка скінченна підгрупа мультиплікативної групи поля є циклічною (причому p'-групою, якщо $\mathrm{char}\, F = p > 0$). Звідси виходить, що Q/R_Q — циклічна група. Якщо $q = \mathrm{char}\, F$, то $Q = R_Q$, але це суперечить співвідношенню $C_Q(A) = \langle 1 \rangle$. З рівностей $C_Q(Bx) = x^{-1} C_Q(B) x = x^{-1} R_Q x$ одержуємо

$$\bigcap_{x \in S} x^{-1} R_Q x \le C_G(A) = \langle 1 \rangle.$$

Отже, $\mathrm{Core}_G R_Q = \langle 1 \rangle$. Покладемо тепер $R = \times_{q \in \Pi(\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} Q)} R_Q$. Лему доведено.

Зауважимо, що має місце й зворотне твердження. Саме для всякої локально розв'язної шарово-черніковської групи G, $\mathrm{Soc}_{\mathfrak{A}} G$ якої задовольняє умови 1–3 леми 5, існує простий $\mathbb{F}_p G$-модуль A з властивостями $C_Q(A) = \langle 1 \rangle$ і $p \in \Pi(\mathrm{Soc}\, G)$.

Нехай F — алгебраїчне замикання поля $\mathbb{F}_p$, тоді мультиплікативна група $U(F)$ поля F є діленою. Оскільки $\mathrm{Soc}\, G/R$ — локально циклічна група, то існує груповий гомоморфізм $\theta: \mathrm{Soc}\, G \to U(F)$ з властивістю $\mathrm{Ker}\,\theta = R$. Покладемо $F_1 = \mathbb{F}_p[\mathrm{Im}\,\theta]$. Очевидно F_1 — підполе F. Відображення θ можна розширити до кільцевого гомоморфізму $\theta_1: \mathbb{F}_p(\mathrm{Soc}\, G) \to F_1$ за правилом

$$\left(\sum_{x \in \mathrm{Soc}\, G} a_x x \right) \theta_1 = \sum_{x \in \mathrm{Soc}\, G} a_x x\theta.$$

Ясно, що $\mathrm{Im}\,\theta_1 = F_1$. Покладемо $I = \mathrm{Ker}\,\theta_1$. Оскільки F_1 — поле, то I — максимальний ідеал $\mathbb{F}_p(\mathrm{Soc}\, G)$. Тому можемо розглядати $B = \mathbb{F}_p(\mathrm{Soc}\, G)/I$ як простий $\mathbb{F}_p(\mathrm{Soc}\, G)$-модуль. Нехай $g \in C_{\mathrm{Soc}\, G}(B)$, b — довільний елемент $\mathbb{F}_p(\mathrm{Soc}\, G)$. Тоді $(b + I) = (b + I)g = bg + I$, тобто $bg - b = b(g - 1) \in I$.

Оскільки I — простий ідеал, то це означає, з огляду на довільність b, що $g-1 \in I$. Отже, $(g-1)\theta_1 = g\theta_1 - 1 = g\theta - 1 = 0$, тобто $g\theta = 1$. Звідси випливає, що $g \in \operatorname{Ker}\theta = R$. Таким чином, $C_{\operatorname{Soc} G}(B) = R$.

Нехай тепер $M = B \otimes_{\mathbb{F}_p(\operatorname{Soc} G)} \mathbb{F}_p G$. Тоді M ізоморфний $\bigoplus_{x \in T} B \otimes x$, де T — повна множина представників суміжних класів G по $\operatorname{Soc} G$, які взяті по одному в кожному класі. Модуль M має $\mathbb{F}_p G$-композиційну систему. Нехай A — $\mathbb{F}_p G$-композиційний фактор M. Тоді $A \cong \oplus_{x \in T_1} B \otimes x$, де $T_1 \subseteq T$. Таким чином, A — простий $\mathbb{F}_p G$-модуль. Припустимо, що $C_G(A) \neq \langle 1 \rangle$. З того, що $C_G(A)$ — нормальна підгрупа G, випливає, що $\langle 1 \rangle \neq C_G(A) \cap \operatorname{Soc} G = E$. Зокрема, $E \leq C_G(B \otimes x) = x^{-1} C_G(B) x$ для будь-якого $x \in T_1$. Звідси $xEx^{-1} \leq C_G(B)$. Оскільки E — нормальна підгрупа G, то $xEx^{-1} = E$, отже, $E \leq C_G(B) \cap \operatorname{Soc} G = R$. Але тоді $E \leq \operatorname{Core}_G R = \langle 1 \rangle$. Одержана суперечність показує, що $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Таким чином, шуканий модуль побудовано.

Твердження 1. *Нехай G — розв'язна періодична група і G не є шарово-черніковською. Кожна власна фактор-група групи G тоді і тільки тоді шарово-черніковська, коли група G задовольняє наступні умови:*

1) *$G = A \leftthreetimes E$, де A — нескінченна нормальна елементарна абелева p-підгрупа, p — просте число, E — шарово-черніковська підгрупа;*

2) *A — простий $\mathbb{F}_p E$-модуль, $C_E(A) = \langle 1 \rangle$;*

3) *$p \notin \Pi(\operatorname{Soc} E)$;*

4) *$\operatorname{Soc} E$ включає в себе таку підгрупу R, що $\operatorname{Soc} E / R$ — локально циклічна група і $\operatorname{Core}_E R = \langle 1 \rangle$;*

5) *якщо $G = A \leftthreetimes D$ для деякої підгрупи D, то підгрупи D і E спряжені.*

Доведення. Нехай у групі G всяка власна фактор-група шарово-черніковська. З леми 3 випливає, що G включає в себе таку нескінченну нормальну елементарну абелеву p-підгрупу A, що $A = C_G(A)$, і $\mathbb{F}_p G$-модуль A — простий. Із теореми 2 роботи [18] одержуємо розкладання $G = A \leftthreetimes E$, а також той факт, що всякі два доповнення до A спряжені. Оскільки $E \cong G/A$, то E — шарово-черніковська. Умови 3, 4 випливають із леми 5.

Навпаки, нехай виконані умови 1–5. Відразу зауважимо, що такі групи існують. Трохи вище побудовано простий $\mathbb{F}_p E$-модуль з властивістю $C_E(A) = \langle 1 \rangle$. Будемо розглядати напівпрямий добуток $G = A \leftthreetimes E$. Якщо H — неодинична нормальна підгрупа G, то розглянемо перетин $H \cap A$. Оскільки A — мінімальна нормальна підгрупа G, то або $A \leq H$, або $H \cap A = \langle 1 \rangle$. У другому випадку $H \leq C_G(A)$. Але $C_G(A) = A$, таким чином, залишається тільки перша можливість. Отже, $A \leq H$, а тому фактор-група G/H шарово-черніковська. Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай G — майже розв'язна неперіодична група, і припустимо, що $\zeta(G) \neq \langle 1 \rangle$. Кожна власна фактор-група групи G тоді і тільки тоді шарово-черніковська, коли G — локально циклічна група без скруту.*

Доведення. Покладемо $C = \zeta(G)$. Якщо припустити, що періодична частина T підгрупи C неодинична, то з того факту, що фактор-група G/T шарово-черніковська (зокрема, періодична) випливає, що й уся група G періодична. Але це суперечить умові. Отже, C не має скруту. Оскільки G/C шарово-черніковська, то $[G, G]$ є періодичною [22]. Звідси випливає, що $[G, G] = \langle 1 \rangle$, тобто G — абелева група. Якщо припустити, що $r_0(G) \geq 2$, то G містить у собі дві такі нескінченні циклічні підгрупи Z_1, Z_2, що $Z_1 \cap Z_2 = \langle 1 \rangle$. З теореми Ремака отримуємо, що $G \hookrightarrow G/Z_1 \times G/Z_2$, тобто G знову періодична. Таким чином, $r_0(G) = \langle 1 \rangle$. Обернене твердження очевидне. Твердження доведено.

Твердження 3. *Нехай G — майже розв'язна неперіодична група і припустимо, що $\zeta(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо кожна власна фактор-група G шарово-черніковська, то кожна власна фактор-група G черніковська та група G майже абелева і мінімаксна.*

Доведення. Оскільки група G майже розв'язна, то G містить у собі неодиничну абелеву нормальну підгрупу A. Якщо припустити, що періодична частина T підгрупи A неодинична, то фактор-група G/T шарово-черніковська, тобто G періодична, а це суперечить умові. Отже, A вільна від скруту. Покладемо $\mathfrak{M} = \{B \mid B$ — неодинична G-припустима підгрупа $A\}$. Нехай B_1, $B_2 \in \mathfrak{M}$ і припустимо, що $B_1 \cap B_2 = \langle 1 \rangle$. За теоремою Ремака (див., наприклад, [17], теорема I.1.2) одержуємо вкладення $G \hookrightarrow G/B_1 \times G/B_2$, яке показує, що група G шарово-черніковська. Ця суперечність показує, що $B_1 \cap B_2 \neq \langle 1 \rangle$ для будь-яких $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}$. Можливі дві ситуації: $\cap \mathfrak{M} \neq \langle 1 \rangle$ і $\cap \mathfrak{M} = \langle 1 \rangle$. Розглянемо першу ситуацію. Нехай $C = \cap \mathfrak{M}$. Тоді C можна розглядати як простий $\mathbb{Z}(G/C)$-модуль. Але адитивна група простого модуля над локально скінченною групою є елементарною абелевою (Р. Бер, [23]). Ця суперечність показує, що $\cap \mathfrak{M} = \langle 1 \rangle$.

Нехай $1 \neq a \in A$, $A_1 = \langle a \rangle^G$. Оскільки $\cap \mathfrak{M} = \langle 1 \rangle$, то A_1 не є простим $\mathbb{Z}(G/A)$-модулем. Нехай A_2 — власна неодинична G-припустима підгрупа A_1. Тоді фактор-група G/A_2 шарово-черніковська. Звідси виходить, що $\langle a \rangle^G A_2/A_2 = A_1/A_2$ черніковська. Зокрема, вона періодична. Отже, елемент aA_2 має скінченний порядок. Нехай $|aA_2| = n$. Тоді $|(gA_2)^{-1} aA_2(gA_2)| = |aA_2| = n$. Оскільки A_1/A_2 — абелева нормальна підгрупа, то звідси випливає, що порядки її елементів обмежені в сукупності. Проте обмежена черніковська група скінченна, тобто A_1/A_2 скінченна. Отже, кожна неодинична G-припустима підгрупа A_1 має в A_1 скінченний індекс. Разом з умовою $\cap \mathfrak{M} = \langle 1 \rangle$ це показує, що A_1 — коквазіскінченний $\mathbb{Z}(G/A)$-модуль.

Покладемо $H = G/C_G(A_1)$ і нехай K — нормальна розв'язна підгрупа, яка має в H скінченний індекс. Як і в лемі 3, можна показати, що A_1 включає в себе такий $\mathbb{Z}K$-підмодуль в E, що A_1/E — коквазіскінченний $\mathbb{Z}K$-модуль. Далі, якщо S — повна множина представників суміжних класів групи H по підгрупі K, то $A_1 \hookrightarrow \bigoplus_{x \in S} A_1/Ex$. Із рівності $C_k(A_1/Ex) = x^{-1} C_k(A_1/E)x$ одержуємо, що $\bigcap_{x \in S} C_k(A_1/Ex) = \langle 1 \rangle$. Очевидно також, що A_1/Ex — коквазіскінченний $\mathbb{Z}K$-модуль для будь-якого $x \in S$. За теоремою 2 роботи [24] одержуємо, що A_1/Ex — мінімаксна при будь-якому $x \in S$, а фактор-група $K/C_k(A_1/Ex)$ скінченно породжена і майже абелева. Із вкладень $A_1 \hookrightarrow \bigoplus_{x \in S} A_1/Ex$ і $K \hookrightarrow \bigoplus_{x \in S} K/C_k(A_1/Ex)$ виходить, що A_1 — мінімаксна, а фактор-група $G/C_G(A_1)$ скінченно породжена і майже абелева. Оскільки ця фактор-група шарово-черніковська, то $G/C_G(A_1)$ скінченна.

Нехай $D = C_G(A_1)$. Фактор-група D/A_1 є періодичною, тому $[D, D]$ є періодичною [22]. Оскільки A_1 вільна від скруту, то це означає, що $[D, D] \cap \cap A_1 = \langle 1 \rangle$, отже, $[D, D] = \langle 1 \rangle$. Таким чином, D абелева. D/A_1 — періодична група, підгрупа A_1 мінімаксна, таким чином, D має скінченний ранг. Індекс $|G: D|$ скінченний і $A_1 = \langle a \rangle^G$, отже, підгрупа A_1 скінченно породжена.

Припустимо, що фактор-група D/A_1 не є черніковською. Фактор-група G/A_1 шарово-черніковська і майже абелева. Звідси легко одержати, що $G/A_1 = G_1/A_1 D/A_1$, де G_1/A_1 — нормальна черніковська підгрупа. Оскільки D/A_1 не черніковська, то множина $\Pi(D/A_1)$ нескінченна. А тому D/A_1 включає в себе G-припустиму підгрупу D_1/A_1 з властивостями $D_1/A_1 \cap \cap G_1/A_1 = \langle 1 \rangle$ і G/D_1 — черніковська. Оскільки, очевидно, $[G/A_1, G/A_1] \leq \leq G_1/A_1$, то $D_1/A_1 \leq \zeta(G/A_1)$. Для будь-якого $g \in G \backslash D$ розглянемо відображення φ_g: $D_1 \to D_1$, означене за правилом $d\varphi_g = [d, g]$, $d \in D_1$. Легко переконатися в тому, що φ_g — ендоморфізм D_1. З того, що $D_1/A_1 \leq \zeta(G/A_1)$, випливає, що $\operatorname{Im} \varphi_g \leq A_1$. Далі, $\operatorname{Ker} \varphi = C_{D_1}(g)$, отже, $D_1/C_{D_1}(g)$ скінченно породжена для будь-якого $g \in G \backslash D$. Покладемо $D_2 = C_{D_1}(g)$. Оскільки індекс $|G: D|$ скінченний, то $|G: C_G(D_2)|$ скінченний, зокрема, множина $\{ D_2^g \mid g \in G \}$ скінченна. Покладемо $\{ D_2^g \mid g \in G \} = \left\{ D_2^{g_1}, \ldots, D_2^{g_k} \right\}$. Тепер

$$\operatorname{Core}_G D_2 = D_2^{g_1} \cap \ldots \cap D_2^{g_k}.$$

Із вкладення $D_1/\operatorname{Core}_G D_2 \hookrightarrow D_1/D_2^{g_1} \times \ldots \times D_1/D_2^{g_k}$ одержимо, що $D_1/\operatorname{Core}_G D_2$ скінченно породжена. Покладемо $L_g = \operatorname{Core}_G D_2$, G/D_1 — черніковська, отже, G/L_g — мінімаксна. Нехай U — повна множина представників суміжних класів групи G із підгрупи A, які взяті по одному в кожному класі. Оскільки U скінченна, то з вкладення $D/\bigcap_{g \in U} L_g \hookrightarrow \times_{g \in U} D/L_g$ випливає, що фактор-група $D/\bigcap_{g \in U} L_g$ мінімаксна. Звідси випливає, що $\bigcap_{g \in U} L_g = R \neq \langle 1 \rangle$. Очевидно, $R \leq \zeta(G)$, що суперечить умові. Отже, G/A_1 черніковська, а G мінімаксна і майже абелева. Нехай V — неодинична нормальна підгрупа G. Тоді $|A_1: A_1 \cap V|$ скінченна, тому що A_1 коквазіскінченний $\mathbb{Z}G$-модуль. Оскільки G/A_1 черніковська, то і $G/A_1 \cap V$ також черніковська, тобто й G/V черніковська. Твердження доведено.

Зауважимо, що розв'язні групи, кожна власна фактор-група яких черніковська, описані в роботах [7, 8].

Всі одержані результати можна об'єднати в наступній теоремі.

Теорема. *Нехай G — розв'язна група. Кожна власна фактор-група G тоді і тільки тоді шарово-черніковська, коли G — група одного з наступних типів:*

I) *G — шарово-черніковська група;*

II) *G — майже абелева, мінімаксна і кожна власна фактор-група G черніковська;*

III) *G — локально циклічна група вільна від скруту;*

IV) *$G = A \leftthreetimes E$ і виконуються наступні умови:*

IVA) *A — нескінченна нормальна елементарна абелева p-підгрупа для деякого простого числа p;*

IVB) *E — шарово-черніковська підгрупа;*

IVC) *$A = C_G(A)$ і $\mathbb{F}_p E$-модуль A — простий;*

IVD) $p \notin \Pi(\operatorname{Soc} E)$;

IVE) $\operatorname{Soc} E$ *включає в себе таку підгрупу* R, *що* $\operatorname{Soc} E/R$ — *локально циклічна група і* $\operatorname{Core}_E R = \langle 1 \rangle$;

IVF) *якщо* $G = A \leftthreetimes D$ *для деякої підгрупи* D, *то підгрупи* D *і* E *спряжені*.

Справді, якщо G — періодична, то використаємо твердження 1. Якщо G — неперіодична і $\zeta(G) \neq \langle 1 \rangle$, то використаємо твердження 2. Якщо G — неперіодична і $\zeta(G) = \langle 1 \rangle$, то використаємо твердження 3.

1. *Newman M. F.* On a class of metabelian groups // Proc. London Math. Soc. – 1960. – **10**, № 39. – P. 354–364.
2. *Newman M. F.* On a class of nilpotent groups // Ibid. – 1960. – **10**, № 39. – P. 365–375.
3. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotients are finite // Communs Pure and. Appl. Math. – 1968. – **21**, № 5. – P. 157–167.
4. *McGarthy D.* Infinite groups whose proper quotients are finite // Ibid. – 1968. – **21**, № 6. – P. 545–562.
5. *Wilson J. S.* Groups with every proper quotients finite // Proc.Cambr. Phil. Soc. – 1972. – **69**, № 3. – P. 373–391.
6. *Robinson D. J. S., Wilson J. S.* Soluble groups with many polycyclic quotients // Proc. London Math. Soc. – 1984. – **48**. – P. 193–229.
7. *Курдаченко Л. А., Горецкий В. Э., Пылаев В. В.* Группы с некоторой системой минимаксных фактор-груп // Допов. АН України. Сер. А. – 1988. – № 3. – С. 17–20.
8. *Franciosi S., de Giovanny F.* Soluble groups with many Chernikov quotients // Atti Accad. Naz. Lincei. – 1985 – **79**. – P. 19–24.
9. *Robinson D. J. S., Zhang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**, № 2. – P. 346–368.
10. *Черников С. Н.* Бесконечные слойно-конечные группы // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 1. – С. 101–133.
11. *Baer R.* Finiteness properties of group // Duke Math. J. – 1948. – **15**, № 4. – P. 1021–1032.
12. *Черников С. Н.* О слойно-конечных группах // Мат. сб. – 1958. – **45**. – С. 415–416.
13. *Половицкий Я. Д.* Слойно-экстремальные группы // Мат. сб. – 1962. – **56**, № 1. – С. 95–106.
14. *Половицкий Я. Д.* Локально-экстремальные и слойно-экстремальные группы // Там же. – 1962. – **58**, № 6. – С. 685–694.
15. *Robinson D. J. S.* On the theory of groups with extremal layers // J. Algebra. – 1970. – **14**. – P. 182–193.
16. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 3. – С. 75–114.
17. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. – М.: Наука, 1978. – 120 с.
18. *Зайцев Д. И.* Расщепляемые расширения абелевых групп // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 22–31.
19. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1970. – **114**, № 1. – P. 19–21.
20. *Кэртис И., Райнер И.* Теория представлений конечных груп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969.
21. *Зайцев Д. И.* О существовании прямых дополнений в группах с операторами // Исследования по теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – С. 26–44.
22. *Черников С. Н.* О структуре групп с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР. – 1957. – **115**. – С. 60–63.
23. *Baer R.* Irreducible groups of automorphisms of abelian groups // Pacif. J. Math. – 1964. – **14**, № 2. – P. 385–406.
24. *Karbe M. J., Kurdachenko L. A.* Just infinite modules over locally soluble groups // Archiv Math. – 1988. – **51**, № 5. – P. 401–411.

Одержано 21.02.96