УДК 517.9

О. І. Кашпіровський (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ),
Ю. В. Митник (ІП ММС НАН України, Київ)

АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРНИХ ПОЛІНОМІВ *

The theorems on characterization are obtained for classes of functions whose best approximations by algebraic polynomials tend to zero in a given order. The approximations of solutions of operator-differential equations by polynomials in an inverse operator are constructed.

Одержані теореми про характерізацію класів функцій, найкращі наближення яких алгебраїчними поліномами мають заданий порядок прямування до нуля. Побудовані наближення розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою поліномів від оберненого оператора.

В сепарабельному гільбертовому просторі H при $0 \le t < \infty$ розглядається однорідне операторно-диференціальне рівняння першого порядку

$$y' + Ay = 0, \tag{1}$$

де A — самоспряжений напівобмежений знизу оператор в H, $A \ge I$, з областю визначення $D(A)$ та спектральним розкладом одиниці E_λ, $y = y(t)$ — вектор-функція, яка при $t > 0$ є сильно неперервно диференційовна в H, набуває значення в $D(A)$, а при $t \to 0$ має обмежену в H норму.

Як відомо [1], така вектор-функція задовольняє рівняння (1) при $t > 0$ тоді і тільки тоді, коли має місце зображення

$$y(t) = U(t)h, \quad h \in H,$$

де $U(t) = e^{-At}$ — півгрупа, породжена оператором $-A$. За допомогою операторного числення ця півгрупа визначається спектральним інтегралом $e^{-At} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda$.

Оскільки розклад одиниці E_λ оператора A не завжди відомий, то в зв'язку з цим природно виникає проблема побудови апроксимацій півгрупи $U(t)$ за допомогою послідовностей операторних поліномів вигляду $P_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B^k$, де α_k — скалярні функції від $t \ge 0$ та $n \in N$, $B = \varphi(A)$ — деяка функція оператора A. В роботах [2, 3] ця проблема вивчається для випадку $B = A$. Зокрема в [3] для наближення розв'язків рівняння (1) використовується розклад функції

$$e^{-t\lambda} = \frac{\sqrt{\delta}}{t+\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t+\delta} \right)^n L_n(\lambda), \quad \delta > 0, \tag{2}$$

де $\{L_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність поліномів Лагерра, що утворюють ортонормований базис в просторі $L_2(0, \infty, e^{-\delta\lambda})$. Операторні поліноми, що є частковими сумами розкладу (2) із заміною змінної λ на оператор A, визначені на C^∞-векторах оператора A. Для збіжності необхідно вимагати від векторів f ще більшої гладкості відносно оператора A.

У роботах [4, 5] для побудови операторних поліномів використовуються часткові суми розкладу (2) з перестановкою місцями змінних t і λ. При цьому одержуються операторні поліноми $P_n(B)$, де $B = (A - \gamma I)(A + \gamma I)^{-1}$ — пере-

* Ця робота частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України.

творення Келі оператора A (або когенератор півгрупи $U(t)$). Такі поліноми визначені на всьому просторі H, а при наявності певної гладкості вектора f відносно оператора A в [4, 5] одержані оцінки збіжності.

У даній роботі вивчаються наближення розв'язків задачі Коши для рівняння (1) поліномами від оберненого оператора $P_n(A^{-1})$ такими, що $P_n(\mu)$ є частковою сумою розкладу функції $\Phi_t(\mu) = e^{-t\mu^{-1}}$ в ряд Фур'є – Чебишева на відрізку $0 \le \mu \le 1$:

$$\Phi_t(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\Phi_t) T_k^*(\mu),$$

де $T_k^*(\mu) = \cos(2k(\arccos\sqrt{\mu})) = \cos(k\arccos(2\mu-1))$ — зміщені поліноми Чебишева 1-го роду [6, 7], $k \in N$, $t > 0$.

Теорема 1. *Нехай*

$$P_n(\mu) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(\Phi_t) T_k^*(\mu)$$

часткова сума ряду Фур'є – Чебишева функції $\Phi_t(\mu) = e^{-t\mu^{-1}}$. Тоді для апроксимацій розв'язків задачі Коші рівняння (1)

$$y_n(t) = P_n(A^{-1})f$$

мають місце наступні оцінки:

$$\| y(t) - y_n(t) \|_H \le C \exp(-\delta \sqrt[3]{tn^2}) \| f \|_H, \tag{3}$$

де C, δ — додатні константи, незалежні від $n \in N$, $t > 0$.

Частково цей результат анонсовано в [8] і наведено оцінку

$$\| y(t) - y_n(t) \| \le C_1 \exp(-C_2\sqrt{n}) \| f \|_H,$$

де $C_1, C_2 > 0$ — константи, залежні від t.

Для того щоб довести цю теорему, розглянемо спочатку задачу характеризації класів функцій $f(x)$ із заданою оцінкою прямування до нуля найкращих наближень алгебраїчними поліномами $E_n(f)$, або відповідно оцінок прямування до нуля коефіцієнтів $\alpha_k(f)$ розкладу в ряд Фур'є – Чебишева. При цьому будуть використані результати [9] про найкращі наближення „гладких" векторів необмеженого оператора A в гільбертовому просторі H за допомогою векторів експоненціального типу цього оператора.

Нагадаємо деяки означення просторів гладких векторів, що відповідають невід'ємному самоспряженому необмеженому оператору A в H [1].

Нехай $G(\lambda)$ — монотонно зростаюча на $[0, \infty)$ функція така, що $G(\lambda) \ge$ $\ge c > 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} G(\lambda) = +\infty$. На $D(G(A))$ — області визначення оператора $G(A) = \int_0^\infty G(\lambda)\, dE_\lambda$ — визначимо скалярний добуток

$$(f,g)_{H_G} = (G(A)f,\, G(A)g)_H = \int_0^\infty G^2(\lambda)\, d(E_\lambda f, g)_H \quad \forall f,\, g \in D(G(A)),$$

який породжує на $D(G(A))$ структуру позитивного гільбертового простору $H_G = H_G(A)$, що щільно вкладається в H: $H_G \subset H$.

При $G(\lambda) = 1 + \lambda^s$, $s > 0$, одержимо гільбертову шкалу просторів $H_s(A) = H_{1+\lambda}(A)$.

В просторі C^∞-векторів оператора A

$$H_\infty(A) = \lim pr_{s\to\infty} H_s(A)$$

визначимо класи гладких векторів Жевре типу Рум'є оператора A порядку $\alpha > 0$:

$$H_{(\alpha)}(A) = \left\{ f \in H_\infty(A) \colon \exists L \geq 0,\ C > 0 \colon \left\| A^n f \right\|_H \leq L^n n^{\alpha n} \right\}.$$

Ці класи можна визначити також за допомогою індуктивної границі

$$H_{(\alpha)}(A) = \lim ind_{\delta\to 0} H_{G_{\alpha,\delta}}(A),$$

де $G_{\alpha,\delta}(\lambda) = \exp(\delta\lambda^{1/\alpha})$.

У випадку $H = L_2(0,\pi)$, $A = D = \sqrt{D^2}$, де D^2 — самоспряжений оператор, що породжується диференціальним виразом $lu(\vartheta) = -d^2u/d\vartheta^2$ з граничними умовами $u'(0) = u'(\pi) = 0$, простори $H_s(D)$ збігаються з просторами типу Соболєва $\hat{W}_2^s[0,\pi]$, які при $s \geq 1$ відрізняються від „звичайного" простору Соболєва $W_2^s[0,\pi]$ наявністю додаткових граничних умов на похідні непарних порядків:

$$u^{(2k-1)}(0) = u^{(2k-1)}(\pi) = 0, \quad 1 \leq 2k-1 < s - 1/2. \tag{4}$$

Простір $H_\infty(D)$ збігається з $\hat{C}^\infty[0,\pi]$-класом нескінченно диференційовних функцій $u(\vartheta)$, для яких (4) виконується для всіх $k \in N$. Класи $H_{(\alpha)}(D)$ збігаються з

$$\hat{G}_\alpha[0,\pi] = \hat{C}^\infty[0,\pi] \cap G_\alpha[0,\pi],$$

де $G_\alpha[a,b] = \{f \in C^\infty[a,b] \colon \exists C, L > 0 \colon \left| f^{(m)}(x) \right| \leq CL^m m^{\alpha m}\}$ — клас функцій Жевре типу Рум'є порядку α на відрізку $[a,b] \subset R^1$.

Оскільки $\{\cos k\vartheta\}_{k=0}^\infty$ — власний ортогональний базис оператора D ($D \cos k\vartheta = k \cos k\vartheta$), то введені простори оператора D можна охарактеризувати за допомогою оцінок коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є [10]:

$$u(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(u) \cos k\vartheta, \tag{5}$$

а також за допомогою оцінок найкращих наближень парними тригонометричними поліномами [9]:

$$\hat{E}_n(u) = \min_{\alpha_k} \max_{0\leq\vartheta\leq\pi} \left| u(\vartheta) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos k\vartheta \right|;$$

$$H_\infty(D) = \hat{C}^\infty[0,\pi] = \left\{ u \in C[0,\pi] \colon \forall l > 0 \ \lim_{k\to\infty} k^l \alpha_k(u) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ u \in C[0,\pi] \,\middle|\, \forall l > 0 \colon \lim_{n\to\infty} n^l \hat{E}_n(u) = 0 \right\};$$

$$H_{(\alpha)}(D) = \hat{G}_\alpha[0,\pi] = \left\{u \in C[0,\pi] \,\middle|\, \exists C, \delta > 0 : \left|\alpha_k(u) \le C\exp(-\delta k^{1/\alpha})\right.\right\} = ,$$

$$= \left\{u \in C[0,\pi] \,\middle|\, \exists C, \delta > 0 : \hat{E}_n(u) \le C\exp(-\delta n^{1/\alpha})\right\}.$$

Для функцій $u \in C[0,\pi]$ із степеневою оцінкою найкращих наближень

$$\hat{E}_n(u) \le Cn^{-r}, \quad r > 0, \quad n \in N, \tag{6}$$

n-і часткові суми Фур'є, а отже, і коефіцієнти ряду Фур'є (5) оцінюються величиною $C_1 n^{-r} \ln n$ [11, с. 112]. Таким чином, $u \in \hat{W}_2^s[0,\pi]$, $0 < s < r - 1/2$. Навпаки, якщо $u \in \hat{W}_2^s[0,\pi]$, то (6) виконується для $0 < r < s - 1/2$. Повна характеризація функцій, для яких виконується (6), приведена в [11, 12].

Заміна незалежної змінної $\vartheta = \arccos x$, $-1 \le x \le 1$, переводить тригонометричні ряди (5) в ряди Фур'є – Чебишева

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T_k(x),$$

де $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ — поліном Чебишева 1-го роду [6, 7].

Породжене такою заміною відображення $S : u(\vartheta) \to f_u(x) = u(\arccos x)$ встановлює ізометричну відповідність між гільбертовими просторами $L_2(0,\pi)$ та $L_{2,\rho} = L_2(-1, 1, \rho(x))$, $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, а також між просторами неперервних функцій $C[0,\pi]$ та $C[-1, 1]$.

Оскільки S-образами тригонометричних поліномів

$$\hat{P}_n(\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos k\vartheta$$

є алгебраїчні поліноми

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(x),$$

то проблема визначення алгебраїчного полінома найкращого наближення функції $f \in C[-1,1]$ еквівалентна проблемі визначення тригонометричного полінома найкращого наближення функції $u_f(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$ [7, s. 389], причому

$$E_n = \hat{E}_n(u_f),$$

де

$$E_n(f) = \inf_{\alpha_k} \max_{|x| \le 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \right|.$$

Отже, задача характеризації класів функцій, найкращі наближення яких алгебраїчними поліномами мають певний порядок прямування до нуля, еквівалентна задачі визначення S-образів класів гладких векторів оператора D, тобто класів гладких парних періодичних функцій, або, що те саме, визначенню класів гладких векторів самоспряженого в $L_{2,\rho}$ оператора $\Lambda = SDS^{-1}$, для якого поліноми Чебишева $\{T_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ утворюють власний базис. Оператор Λ^2 є самоспряженим розширенням мінімального оператора, що породжується диференціальним виразом

$$-(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}.$$

Відповідні узагальнені граничні умови вказані в [13].

Оскільки диференціальний вираз оператора Λ^2 має при підході до кінців відрізка $[-1,1]$ виродження, то функції, що є гладкими векторами оператора Λ, мають при $x \to \pm 1$ зниження гладкості в порівнянні з внутрішніми точками інтервалу $(-1, 1)$. Ця обставина ускладнює формулювання обернених теорем теорії наближень алгебраїчними поліномами [11, 12].

Перейдемо до описання класів гладких векторів оператора Λ та формулювання відповідних тверджень про наближення функцій алгебраїчними поліномами.

Внаслідок леми 2 з роботи [14] простір $H_m(\Lambda)$, $m \in N$, збігається з простором типу Соболєва $W_{2,\rho}^m$, в якому норма визначається співвідношенням

$$\| f \|^2_{W_{2,\rho}^m} \;=\; \int_{-1}^{1}\left(|f(x)|^2\rho(x)+\left|f^{(m)}(x)\right|^2\rho_m(x)\right)dx,$$

де $\rho_\mu(x)=(1-x^2)^{m-1/2}$.

Функції $f(x)$ з $W_{2,\rho}^m$ майть всередині інтервалу $(-1, 1)$ неперервні похідні до порядку $m-1$ [14]. Наступне твердження гарантує неперервність похідних на $[-1,1]$ до порядку $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ включно. Решта похідних до $(m-1)$-го порядку включно мають при підході до кінців інтервалу $(-1,1)$ степеневі особливості.

Лема 1. *Нехай* $f \in W_{2,\rho}^m$, $m \in N$. *Тоді:*

1) *похідні* $f^{(i)}(x)$, $0 \le i \le (m-1)/2$, *неперервні на відрізку* $[-1, 1]$;

2) *поведінка похідних* $f^{(i)}(x)$, $\left[\frac{m+1}{2}\right] \le i \le m-1$, *при підході до точок* $x = \pm 1$ *характеризується оцінками*

$$\left|f^{(m-k)}(x)\right| \;\le\; C(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+k}, \tag{7}$$

де $i=m-k$, $1 \le k \le m/2$, $C = C(k,f) > 0$.

Доведення. Запишемо зображення похідних $f^{(m-k)}(x)$, $1 \le k \le m$, за допомогою інтегралу від $f^{(m)}(x)$:

$$f^{(m-k)}(x) \;=\; \sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(m-k+j)}(0)}{j!}x^i+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{k-1}f^{(m)}(\xi)\,d\xi.$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $0 \le x \le 1$. Тоді, враховуючи оцінки

$$0 \;\le\; x-\xi \;\le\; 1-\xi \;\le\; 1-\xi^2, \quad (1-x)^{-1} \;\le\; 2(1-x^2)^{-1},$$

для $1 \le k \le [m/2]$ одержимо

$$\left|f^{(m-k)}(x)\right| \;\le\; C_1+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (1-\xi)^{k-1}\left|f^{(m)}(\xi)\right|d\xi \;\le\; C_1 \;+$$

$$+\;\frac{1}{(k-1)!}\left(\int_0^x (1-\xi)^{m-1/2}\left|f^{(m)}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_0^x (1-\xi)^{2(k-1)-(m-1/2)}\,d\xi\right)^{1/2} \;\le$$

$$\leq C_1 + \frac{1}{(k-1)!}\left(\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{m-1/2}\left|f^{(m)}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left|m-2k-\frac{1}{2}\right|^{-1/2}\left((1-x)^{-m+2k-1/2}-1\right)^{1/2} \leq C(1-x^2)^{-m/2-1/4+k},$$

де

$$C_1 = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\left|f^{(m-k+j)}(0)\right|}{j!};$$

$$C = C_1 + 2^{k-m/2-1/4}\left((k-1)!\left(m-2k-\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right)^{-1}\|f\|_{W_{2,\rho}^m}.$$

Якщо $k > m/2 + 1/4$, то відповідні інтеграли обмежені, а отже, похідні $f^{(i)}(x)$, $0 \leq i \leq (m-1)/2$, неперервні на $[-1, 1]$. Лему 1 доведено.

З леми 1 випливає неперервність на відрізку $[-1, 1]$ функцій з $D(\Lambda)$ — області визначення оператора Λ $(D(\Lambda) = W_{2,\rho}^1)$.

За допомогою цієї леми можна доповнити теореми Бернштейна про характеризацію функцій, для яких $E_n(f)$ має степеневий порядок прямування до нуля [12], характеристикою поведінки похідних при підході до кінців інтервалу. Для ілюстрації розглянемо приклад.

Функція

$$f(x) = (1-x^2)^l \ln(1-x^2), \quad l \in N,$$

аналітична всередині інтервалу $(-1, 1)$, а на відрізку $[-1, 1]$ має $l-1$ неперервну похідну. Найбільше число m, для якого $f \in W_{2,\rho}^m$ дорівнює $2l$. Похідні $f^{(i)}(x)$, $l < i \leq 2l-1$, задовольняють оцінки (7). При тригонометричній заміні $x = \cos\vartheta$ функція $f(x)$ переходить в функцію

$$u_f(\vartheta) = (1-\cos^2\vartheta)^l \ln(1-\cos^2\vartheta) = \sin^{2l}\vartheta \ln(\sin^2\vartheta),$$

яка має $2l-1$ неперервну похідну і $u_f \in \hat{W}_2^{2l}[0, \pi]$. Таким чином,

$$E_n(f) = \hat{E}_n(u_f) \leq Cn^{-2l+\varepsilon}, \quad C > 0, \quad \varepsilon > 1/2, \quad n \in N.$$

З леми 1 випливає також теорема Бернштейна про характеризацію $C^\infty[-1, 1]$ [12]:

$$C^\infty[-1, 1] = \left\{f \in C[-1, 1] \mid \forall l > 0: \lim_{n\to\infty} n^l E_n(f) = 0\right\}.$$

Таким чином, поведінка функцій $f(x)$, для яких $E_n(x)$ прямує до нуля швидше довільного степеня n^{-l}, $l \in N$, є однаковою на всьому відрізку $[-1, 1]$. Виявляється, що при $E_n(f) \sim \exp(-\delta n^{1/\alpha})$, $\alpha > 1$, $\delta > 0$, маємо виродження гладкості $f(x)$ при $x \to \pm 1$, що випливає з наступного твердження.

Теорема 2. *Для того щоб функція $f \in C^\infty[-1, 1]$ належала $H_{(\alpha)}(\Lambda)$, $\alpha \geq 1$, необхідно і достатньо, щоб існували такі константи C, $L > 0$, що*

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leq C\left(\frac{L}{\sqrt{1-x^2}}\right)^m m^{\alpha m}, \quad m \in N. \tag{8}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $f \in H_{(\alpha)}(\Lambda)$. Оскільки $H_{(\alpha)}(\Lambda)$ є S-образом $G_\alpha[0, \pi]$, то коефіцієнти $a_k(f)$ розкладу $f(x)$ в ряд Фур'є – Чебишева задовольняють наступні оцінки:

$$|a_k(f)| \leq C\exp(-\delta k^{1/\alpha}), \quad C, \delta > 0, \quad k \in N. \tag{9}$$

Користуючись нерівністю Бернштейна для похідних поліномів Чебишева [11, с. 216]

$$\left|T_k^{(m)}(x)\right| \leq k^m (1-x^2)^{-m/2}, \quad k \geq m,$$

одержуємо

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k(f)| \left|T_n^{(m)}(x)\right| \leq$$

$$\leq C \sum_{k=m}^{\infty} k^m (1-x^2)^{-m/2} \exp(-\delta k^{1/\alpha}) \leq$$

$$\leq C(1-x^2)^{-m/2} \int_0^\infty \lambda^m \exp(-\delta \lambda^{1/\alpha})\, d\lambda =$$

$$= C\delta^{-\alpha(m+1)} (1-x^2)^{-m/2} \int_0^\infty \mu^{\alpha(m+1)-1} e^{-\mu}\, d\mu =$$

$$= C\delta^{-\alpha} \left(\frac{\delta^{-\alpha}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^m \Gamma(\alpha m + \alpha) \leq$$

$$\leq C_1 \left(\frac{(\delta e)^{-\alpha} + \varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}\right)^m m^{\alpha m}, \quad C_1 = C_1(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай похідні функції $f \in C^\infty[-1, 1]$ задовольняють оцінки (8). Оцінимо норму $\Lambda^m f(x)$ в просторі $L_{2,\rho}$.

Розіб'ємо ряд Фур'є – Чебишева функції на дві частини:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{2m} a_k(f)\, T_k(x), \quad f_2(x) = \sum_{k=2m+1}^{\infty} a_k(f)\, T_k(x).$$

Для $f_1(x)$ — полінома степені $2m$ маємо

$$\|\Lambda^m f_1(x)\|_{L_{2,\rho}}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{2m} k^{2m} |a_k(f)|^2 \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} (2m)^{2m} \|f_1\|_{L_{2,\rho}}^2 \leq \frac{\pi}{2} (2m)^{2m} \|f\|_{L_{2,\rho}}^2. \tag{10}$$

Для оцінки $\|\Lambda^m f_2\|_{L_{2,\rho}}$ скористаємось представленням похідних поліномів Чебишева [14]

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_k^{(m)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{m-1} (k^2 - i^2) \right)^{1/2} P_{k-m,m}(x), \tag{11}$$

де $k \in N$, $k \geq m$, $\left\{ P_{j,m}(x) \right\}_{j=0}^{\infty}$ — поліноми Якобі, які задовольняють умову ортогональності відносно ваги $\rho_m(x)$:

$$\int_{-1}^{1} P_{i,m}(x)\, P_{j,m}(x)\, \rho_m(x)\, dx = \delta_{ij}, \quad i, j \in N. \tag{12}$$

Оскільки для $k > 2m$

$$\prod_{i=0}^{m-1} (k^2 - i^2) = k^{2m} \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \left(\frac{i}{k} \right)^2 \right) \geq k^{2m} \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \left(\frac{m}{2m} \right)^2 \right) = \left(\frac{3}{4} \right)^m k^{2m},$$

то внаслідок (9), (11), (12) одержимо

$$\left\| \Lambda^m f_2 \right\|_{L_{2,\rho}}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=2m+1}^{\infty} k^{2m} |a_k(f)|^2 \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^m \sum_{k=2m+1}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \left(k^2 - i^2 \right) |a_k(f)|^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{3} \right)^m \sum_{k=m}^{\infty} |a_k(f)|^2 \int_{-1}^{1} \left| T_k^{(m)}(x) \right|^2 \rho_m(x)\, dx =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \right)^m \int_{-1}^{1} \left| f^{(m)}(x) \right|^2 \rho_m(x)\, dx \leq$$

$$\leq C^2 \left(\frac{4}{3} L^2 \right)^m m^{2\alpha m} \int_{-1}^{1} \rho(x)\, dx = \pi C^2 \left(\frac{4}{3} L^2 \right)^m m^{2\alpha m}. \tag{13}$$

З (10) і (13) маємо

$$\left\| \Lambda^m f \right\| \leq C_1 L_1^m m^{\alpha m},$$

де $C_1 = \sqrt{\pi}\left(C + \frac{1}{2} \| f \|_{L_{2,\rho}}\right)$, $L_1 = \max\left(2, \frac{2L}{\sqrt{3}}\right)$.

Достатність, а отже, і теорему 2 в цілому доведено.

Згідно з доведеною теоремою функції з $H_{(\alpha)}(\Lambda)$, $\alpha \geq 1$, належать $G_\alpha[a, b]$, де $[a, b]$ — довільний відрізок з інтервалу $(-1, 1)$. В цілому про ці функції можна сказати, що вони є нескінченно диференційовними на $[-1, 1]$.
Більш точну відповідь дає наступне твердження.

Лема 2. *Функції* $f \in H_{(\alpha)}(\Lambda)$, $\alpha \geq 1$, *належать простору* $G_{2\alpha-1}[-1, 1]$.

Доведення. Нехай $f \in H_{(\alpha)}(\Lambda)$, тобто мають місце оцінки (8) для $a_k(f)$. Тоді, користуючись нерівностями Маркова для похідних поліномів Чебишева [11, с. 220; 6, с. 48]

$$\left| T_k^{(m)}(x) \right| \leq T^{(m)}(1) = \frac{1}{(2m-1)!!} \prod_{i=0}^{m-1} (k^2 - i^2) \leq \frac{k^{2m}}{m!},$$

одержимо оцінки для $f^{(m)}(x)$:

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \le \sum_{k=m}^{\infty}\left|a_k(f)\right| T_k^{(m)}(1) \le \frac{C}{m!}\sum_{k=m}^{\infty} k^{2m}\exp(-\delta k^{1/\alpha}) \le$$

$$\le \frac{C}{m!}\int_0^{\infty}\lambda^{2m}\exp(-\delta\lambda^{1/\alpha})\,d\lambda = \frac{C}{m!}\delta^{-2\alpha m-\alpha}\Gamma(2\alpha m+\alpha) \le$$

$$\le C_1\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^{2\alpha-1}\delta^{2\alpha}}\right)^m m^{2\alpha-1},$$

де $\varepsilon > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$.

Лему 2 доведено.

Об'єднуючи теорему 2 та лему 2 одержуємо твердження.

Теорема 3. *Для того щоб функція* $f \in C^{\infty}[-1,1]$ *належала простору* $H_{(\alpha)}(\Lambda)$, $\alpha \ge 1$, *необхідно і достатньо, щоб мали місце оцінки*

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \le C L^m m^{\alpha m}\left(\min\left(m^{\alpha-1}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)^m$$

при деяких $C, L > 0$, $m \in N$.

Враховуючи вказаний вище зв'язок між класами гладких векторів операторів D і Λ та між апроксимаціями функцій тригонометричними та алгебраїчними поліномами, одержуємо твердження.

Теорема 4. *Для того щоб для неперервної на* $[-1,1]$ *функції* $f(x)$ *мали місце оцінки найкращих наближень*

$$E_n(f) \le C\exp(-\delta n^{1/\alpha}), \quad \alpha \ge 1,$$

при деяких $C, \delta > 0$, *необхідно і достатньо, щоб* $f(x)$ *була нескінченно диференційовною і її похідні допускали оцінки*

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \le C_1 L^m m^{\alpha m}\left(\min\left(m^{\alpha-1}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)^m$$

при деяких $C_1, L > 0$.

Теорема 4 уточнює результати [15] про апроксимацію алгебраїчними поліномами функцій класів Жевре.

При $\alpha = 1$ клас $H_{(1)}(\Lambda)$-аналітичних векторів оператора Λ співпадає з класом аналітичних на $[-1,1]$ функцій, а теорема 4 в цьому випадку — це відома теорема Бернштейна [12] про наближення аналітичних функцій алгебраїчними поліномами.

Для $0 < \alpha < 1$ з оцінки $E_n(f) \le C\exp(-\delta n^{1/\alpha})$ випливає, внаслідок [16], що $f(x)$ є ціла функція порядку $1/(1-\alpha)$.

Розглянемо приклад. Нехай

$$F_{pt}(x) = \exp\left(-t(1+x)^{-p}\right),$$

де $p, t > 0$ — параметри.

Як відомо [17, с. 165], ця функція належить до класу $G_{1+1/p}[-1,1]$. Виявляється, що відповідна періодична функція

$$u_{p,t}(\vartheta) = \exp\left(-t(1+\cos\vartheta)^{-p}\right) = \exp\left(-2^{-p} t\cos^{-2p}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

має в околі особливої точки $\vartheta = \pi$ таку саму поведінку, як і функція $F_{2p,t}(x)$ в околі точки $x = -1$.

Врахувавши асимптотику при $t \to 0$, оцінимо похідні $u_{p,t}^{(m)}(\vartheta)$, $m \in N$, застосувавши вказану в [17, с. 118] методику до похідної $u'_{p,t}(\vartheta)$:

$$\left| u_{p,t}^{(m)}(\vartheta) \right| \le C L^m t^{-\frac{m-1}{2p}} m^{\left(1+\frac{1}{2p}\right)m},$$

де $C, L > 0$ — константи, залежні від p.

Звідси одержимо оцінки коефіцієнтів Фур'є

$$\left| \alpha_k(u_{p,t}) \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} u_{p,t}(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta \right| = \frac{k^{-m}}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} u_{p,t}^{(m)}(\vartheta) \cos\left(k\vartheta + \frac{m\pi}{2}\right) d\vartheta \right| \le$$

$$\le 2Ct^{\frac{1}{2p}} \left(\frac{L}{t^{1/2p} k} \right)^m m^{\left(\frac{1}{2p}+1\right)m}, \quad k,\ m \in N;$$

$$\left| \alpha_k(u_{p,t}) \right| \le 2Ct^{\frac{1}{2p}} \inf_{m>0} \left(\frac{L}{t^{1/2p} k} \right)^m m^{\left(\frac{1}{2p}+1\right)m} =$$

$$= 2Ct^{\frac{1}{2p}} \exp\left(-\delta_1 t^{\frac{1}{2p+1}} k^{\frac{2p}{2p+1}} \right), \quad \delta_1 = \delta_1(p) > 0,$$

та відповідні оцінки найкращих наближень

$$E_n(F_{p,t}) = \hat{E}_n(u_{p,t}) \le \left| \alpha_k(u_{p,t}) \right| \le 2Ct^{\frac{1}{2p}} \int_n^{\infty} \exp\left(-\delta_1 t^{\frac{1}{2p+1}} \lambda^{\frac{2p}{2p+1}} \right) d\lambda \le$$

$$\le C_1 \exp\left(-\delta t^{\frac{1}{2p+1}} n^{\frac{2p}{2p+1}} \right), \quad C_1 > 0, \quad \delta = \delta_1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Поклавши $p = 1$, $\mu = \frac{1}{x+1}$, одержимо з (14) оцінки найкращих наближень алгебраїчними поліномами функції $\Phi_t(\mu) = e^{-t\mu^{-1}}$, $0 \le \mu \le 1$, що збігаються з оцінками наближень частковими сумами ряду Фур'є – Чебишева. Застосувавши спектральне зображення функцій від оператора A^{-1} [18, с. 348], одержимо оцінки (3) наближень $y_n(t)$ розв'язків $y(t)$ задачі Коші для рівняння (1). Отже, теорему 1 доведено.

Зробимо кілька зауважень.

1. Оцінки (14) дозволяють одержати відповідні оцінки апроксимацій розв'язків задачі Коші для рівняння (1) за допомогою поліномів від від'ємних степенів $B = A^{-1/p}, p > 0$, оператора A. А саме, для наближеного розв'язку $y_n(t) = P_n(B)f$, де $P_n(\mu)$ — n-та часткова сума ряду Фур'є – Чебишева функції $e^{-t\mu^{-p}}$, має місце оцінка

$$\| y(t) - y_n(t) \|_H \le C \exp\left(-\delta t^{\frac{1}{2p+1}} n^{\frac{2p}{2p+1}} \right) \| f \|_H.$$

Таким чином, при зростанні p оцінка швидкості наближення розв'язку близька до геометричної прогресії.

2. Запропонована в [5] методика дозволяє узагальнити результати даної роботи на випадок неоднорідних рівнянь.

3. Замість часткових сум ряду Фур'є – Чебишева функції $\Phi_t(\lambda)$ можна взяти інтерполяційні поліноми Лагранжа з вузлами Чебишева, для яких є явні формули [6, с. 89]. При цьому формулювання теореми 1 не змінюється.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.
2. *Бабин А. В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // Мат. сб. – 1984. – **123**, – № 2. – С. 147 – 174.
3. *Горбачук М. Л., Городецкий В. В.* О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 4. – С. 140.
4. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1994. – **15**, № 5, 6. – P. 583 – 598.
5. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Reprezantation and approximation of the solution of an initial value problem for a first order differential equation in Banach space // J. Anal. and Applic. – 1996. – № 15. – P. 495 – 527.
6. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 452 с.
7. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
8. *Кашпіровський О. І.* Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь першого порядку // Тези Міжнародної конф., присвяченої пам'яті акад. М. П. Кравчука. – Київ – Луцьк, 1992. – С. 61.
9. *Горбачук В. І., Горбачук М. Л.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616 – 628.
10. *Горбачук В. И.* О суммируемости разложений по собственным функциям самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. – 1987. – **292**, № 1. – С. 20 – 25.
11. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
12. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.
13. *Мартиненко О. В.* Ортогональні ряди в класах узагальнених функцій: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1984. – 9 с.
14. *Томин Н. Г.* Применение интерполяции линейных операторов к вопросам сходимости рядов коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Докл. АН СССР. – 1973. – **212**, № 5. – С. 1074 – 1077.
15. *Зобин Н. М.* Теоремы продолжения и представления для пространств типа Жеврея // Там же. – 1973. – **212**, № 6. – С. 1280 – 1283.
16. *Извеков И. Г., Мартыненко Е. В.* О класах Жевре некоторых самосопряженных операторов с вырождением // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1622 – 1627.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
18. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 448 с.

Одержано 04.07.96