УДК 517.9

Ю. А. Митропольский (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Нгуен Донг Ань, Нгуен Дык Тьинь (Ханой, Вьетнам)

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ШИРОКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

We construct the second approximation for random oscillations described by the Van der Pol equation which are influenced by wide-band stochastic process.

Будується друге наближення для випадкових коливань, що описуються рівнянням Ван дер Поля, яке знаходиться під впливом широкосмугового випадкового процесу.

Рассмотрим задачу о решении уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФКП) на основе метода усреднения и метода малого параметра [1–3] для системы Ван дер Поля под действием широкополосного случайного процесса. Известно, что строгая теория усреднения, разработанная Н. Н. Боголюбовым, включает алгоритм построения как усредненных уравнений с любой точностью, так и математическое обоснование. Метод усреднения Боголюбова органически связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключать время из правых частей уравнений с любой степенью точности относительно малого параметра. Метод усреднения Боголюбова с большими успехами применяется в области детерминированных колебаний. Однако в области случайных колебаний этот метод, в большинстве случаев, ограничивается первым приближением. Известно, что точность первого приближения может быть недостаточна для многих нелинейных случайных систем. Например, нелинейный член в случайной системе Дюффинга не появляется при первом приближении, или точность первого приближения в случайной системе Ван дер Поля изменяется в пределах 1,2 – 17,2% по сравнению с решением моделирования [4]. В этой связи в последнее время некоторые варианты получения более высоких приближений в методе усреднения Боголюбова предлагаются для случайных нелинейных систем [5, 6].

1. Рассмотрим систему с одной степенью свободы. Уравнение движения этой системы имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — широкополосный случайный процесс с интенсивностью 1.

Введем новые переменные $a(t)$, $\varphi(t)$ с помощью замены

$$x(t) = a\cos\varphi, \qquad \dot{x}(t) = -a\cos\varphi. \tag{2}$$

Используя формулу Ито, получаем следующие стохастические дифференциальные уравнения для a и φ [3]:

$$\begin{aligned} da &= \varepsilon K_1(a, \varphi)\,dt - \sqrt{\varepsilon}\frac{\sigma}{\omega}\sin\varphi\, d\xi(t), \\ d\varphi &= (\omega + \varepsilon K_2(a, \varphi))\,dt - \sqrt{\varepsilon}\frac{\sigma}{a\omega}\cos\varphi\, d\xi(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} K_1 = -\frac{1}{\omega}f(a\cos\varphi, -a\omega\sin\varphi)\sin\varphi + \frac{1}{2a\omega^2}\sigma^2\cos^2\varphi, \\ K_2 = -\frac{1}{a\omega}f(a\cos\varphi, -a\omega\sin\varphi)\cos\varphi - \frac{1}{a^2\omega^2}\sigma^2\cos\varphi\sin\varphi, \\ K_{11} = \frac{\sigma^2}{\omega^2}\sin^2\varphi, \quad K_{12} = \frac{\sigma^2}{a\omega^2}\sin\varphi\cos\varphi, \quad K_{12} = \frac{\sigma^2}{a^2\omega^2}\cos^2\varphi. \end{gathered} \tag{4}$$

Для данных функций $K_i(a, \varphi), K_{ij}(a, \varphi), K_{ij} = K_{ji}$, $i, j = 1, 2$, определяем операторы

$$[K_i, \ K_{ij}]L(W) = \frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(K_2 W) -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{2\partial^2}{\partial a \partial \varphi}(K_{12}W) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(K_{22}W)\right];$$

$$[K_i, \ K_{ij}]l(W) = \left(\frac{\partial K_1}{\partial a} + \frac{\partial K_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K_{11}}{\partial a^2} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a \partial \varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K_{22}}{\partial \varphi^2}\right) +$$

$$+ \left(K_1 - \frac{\partial K_{11}}{\partial a} - \frac{\partial K_{12}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial W}{\partial a} + \left(K_2 - \frac{\partial K_{22}}{\partial \varphi} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a}\right)\frac{\partial W}{\partial \varphi} -$$

$$- \frac{1}{2}\left\{K_{11}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)^2\right) + 2K_{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial a \partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial a}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) + K_{22}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right)\right\}. \quad (5)$$

Тогда уравнение ФПК для стационарной функци плотности вероятностей системы (3) имеет вид

$$\omega \frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\varepsilon [K_i, K_{ij}] L(W), \quad (6)$$

где K_i, K_{ij} взяты из (4).

Решение уравнения ФПК (6) ищется в виде ряда малого параметра [6]

$$W(a, \varphi) = W_0(a, \varphi) + \varepsilon W_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 W_2(a, \varphi) + \ldots + \varepsilon^n W_n(a, \varphi) + \ldots . \quad (7)$$

Подстановка (7) в (6) дает систему разделяющихся уравнений для неизвестных функций

$$\varepsilon^0: \ \omega \frac{\partial W_0}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\varepsilon^1: \ \omega \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = -[K_i, K_{ij}] L(W_0),$$

$$\varepsilon^2: \ \omega \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = -[K_i, K_{ij}] L(W_1),$$

$$\varepsilon^n: \ \omega \frac{\partial W_n}{\partial \varphi} = -[K_i, K_{ij}] L(W_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \quad (8)$$

Из (8) находим

$$W_n(a, \varphi) = -\frac{1}{\omega}\int [K_i, K_{ij}] L[W_{n-1}] d\varphi + W_{n0}(a), \quad (9)$$

где произвольная функция интегрирования $W_{n0}(a)$ определяется из условия периодичности функции $W_{n+1}(a, \varphi)$ по переменной φ. В часности, имеем

$$\langle [K_i, K_{ij}] L(W_0(a)) \rangle = 0, \quad (10)$$

где $\langle \ \rangle$ — оператор усреднения относительно φ

$$\langle \ \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cdot) d\varphi.$$

Очевидно, что уравнение (10) совпадает с известным усредненным уравнением ФПК

$$\frac{\partial}{\partial a}[\langle K_1 \rangle W_1(a)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}[\langle K_{11} \rangle W_0(a)] = 0. \tag{11}$$

Итак, усредненное уравнение ФПК (11) может быть получено как равенство нулю среднего значения члена степени ε в оригинальном уравнении ФПК (6). В соответствии с этим $(n+1)$-е приближенное решение уравнения ФПК (6) определяется как

$$W(a, \varphi) = W_0(a)\{1 - \varepsilon(W_{10}(a) + W_{11}(a, \varphi) + \varepsilon^2(W_{20}(a) + W_{22}(a, \varphi))\}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что решение этого уравнения может принимать отрицательные значения при некоторых значениях a и φ. Однако это свойство (недостаток) часто появляется при разложении функции плотности вероятностей в некоторый ряд. Как показано [6] для конкретных нелинейных уравнений (1), система (8) может быть интегрируема в явном виде.

2. Другой вид разложения. Для избежания отрицательности разложения (7), а также улучшения точности приближенных решений можно использовать следующее разложение:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \ldots, \tag{13}$$

где

$$\Phi(a, \varphi) = \ln W(a, \varphi). \tag{14}$$

Легко показать, что новая функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\omega\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\varepsilon[K_i, K_{ij}]l(\Phi). \tag{15}$$

Подставляя (13) в (15), получаем

$$\omega\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\omega\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} = -[K_i, K_{ij}]l(\Phi_0),$$

$$\omega\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} = -\left(K_1 - \frac{\partial K_{11}}{\partial a} - \frac{\partial K_{12}}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\Phi_1}{\partial a} - \left(K_2 - \frac{\partial K_{22}}{\partial\varphi} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a}\right)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} +$$
$$+ \frac{1}{2}K_{11}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial a^2} + 2\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\right) + K_{12}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial a\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial a}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{2}K_{22}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi^2}. \tag{16}$$

Аналогично можно определить $\Phi_n(a, \varphi)$ из (16) в явном виде.

3. Уравнение Ван дер Поля. Рассмотрим известное уравнение Ван дер Поля:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\dot{x} + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{17}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — белый шум или широкополосный случайный процесс с интенсивностью 1.

Соответствующие коефициенты сноса и диффузии имеют вид

$$K_1 = (1 - \gamma a^2\cos^2\varphi)a\sin^2\varphi + \frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\cos^2\varphi,$$

$$K_2 = (1 - \gamma a^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\sigma^2}{a^2\omega^2}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$K_{11} = \frac{\sigma^2}{\omega^2}\sin^2\varphi, \qquad K_{12} = \frac{\sigma^2}{a\omega^2}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad K_{12} = \frac{\sigma^2}{a^2\omega^2}\cos^2\varphi. \tag{18}$$

Усредненное решение третьего порядка имеет вид

$$W(a,\varphi) = W_0(a)\{1 - \varepsilon W_{11}(a,\varphi) + \varepsilon^2[W_{20}(a) + W_{22}(a,\varphi)]\}, \tag{19}$$

$$W_0(a) = Ca\exp\left\{\frac{\omega^2}{\sigma^2}a^2 - \frac{\gamma\omega^2}{8\sigma^2}a^4\right\}, \tag{20}$$

где C — константа нормировки функции.

После конкретных вычислений имеем

$$W_{10}(a) = 0,$$

$$W_{11}(a,\varphi) = \frac{\gamma}{32\omega\sigma^2}(12\sigma^2a^2 + 4\omega^2a^4 - \gamma\omega^2a^6)\sin 2\varphi + \frac{\gamma\omega}{64\sigma^2}(\gamma a^6 - 4a^4)\sin 4\varphi,$$

$$W_{20}(a) = -\frac{9\gamma}{16\omega^2}a^2 + \left(\frac{39\gamma^2}{256\omega^2} - \frac{9\gamma}{64\sigma^2}\right)a^4 + \frac{29\gamma^2}{384\sigma^2}a^6 +$$

$$+ \left(\frac{5\gamma^2\omega^2}{1024\sigma^4} - \frac{109\gamma^3}{8192\sigma^4}\right)a^8 - \frac{5\gamma^2\omega^2}{2048\sigma^4}a^{10} + \frac{5\gamma^4\omega^2}{16384\sigma^4}a^{12},$$

$$W_{22}(a,\varphi) = D_1(a)\cos 2\varphi + D_2(a)\cos 4\varphi + D_3(a)\cos 6\varphi + D_4(a)\cos 8\varphi,$$

$$D_1(a) = -\frac{9\gamma}{16\omega^2}a^2 + \left(\frac{13\gamma^2}{64\omega^2} - \frac{3\gamma}{16\sigma^2}\right)a^4 + \frac{5\gamma^2}{64\sigma^2}a^6 -$$

$$-\left(\frac{7\gamma^3}{1024\sigma^2} + \frac{\gamma^2\omega^2}{256\sigma^4}\right)a^8 + \frac{\gamma^3\omega^2}{512\sigma^4}a^{10} - \frac{\gamma^4\omega^2}{4096\sigma^4}a^{12},$$

$$D_2(a) = \left(\frac{3\gamma}{64\omega^2} - \frac{11\gamma^2}{128\omega^2}\right)a^4 - \frac{17\gamma^2}{256\sigma^2}a^6 + \left(\frac{15\gamma^3}{1024\sigma^2} - \frac{\gamma^2\omega^2}{256\sigma^4}\right)a^8 +$$

$$+ \frac{\gamma^3\omega^2}{512\sigma^4}a^{10} - \frac{\gamma^4\omega^2}{4096\sigma^4}a^{12},$$

$$D_3(a) = \frac{\gamma^2}{48\sigma^2} + \left(\frac{\gamma^2\omega^2}{256\sigma^4} - \frac{19\gamma^2}{3072\sigma^2}\right)a^8 - \frac{\gamma^3\omega^2}{512\sigma^4}a^{10} + \frac{\gamma^4\omega^2}{4096\sigma^4}a^{12},$$

$$D_4(a) = \left(\frac{\gamma^3}{4096\sigma^2} - \frac{\gamma^2\omega^2}{1024\sigma^4}\right)a^8 + \frac{\gamma^2\omega^2}{2048\sigma^4}a^{10} - \frac{\gamma^4\omega^2}{16384\sigma^4}a^{12}. \tag{21}$$

Пользуясь разложением (13)

$$W(a,\varphi) = \exp\{\Phi_0(a) + \varepsilon\Phi_1(a,\varphi) + \varepsilon^2\Phi^2(a,\varphi)\}, \tag{22}$$

получаем из (16) выражения

$$\Phi_0(a) = \ln C + \ln a + \frac{\omega^2}{\sigma^2}a^2 - \frac{\omega^2}{8\sigma^2}a^4,$$

$$\Phi_1(a,\varphi) = \Phi_{10}(a) + \Phi_{11}(a,\varphi), \qquad \Phi_{10}(a) = 0,$$

$$\Phi_{11}(a,\varphi) = \frac{\gamma}{32\omega\sigma^2}(12\sigma^2a^2 + 4\omega^2a^4 - \gamma\omega^2)\sin 2\varphi + \frac{\gamma\omega}{64\sigma^2}(\gamma a^6 - 4a^4)\sin 4\varphi,$$

$$\Phi_2(a,\varphi) = \Phi_{20}(a) = \Phi_{22}(a,\varphi),$$

$$\Phi_{20}(a) = -\frac{9\gamma}{2^4\omega^2}a^2 + \left(\frac{15\gamma^2}{2^7\omega^2} - \frac{9\gamma}{2^6\sigma^2}\right)a^4 + \frac{5\gamma^2}{3\cdot 2^5\sigma^2}a^8 - \frac{61\gamma^2}{2^{13}\sigma^2}a^8,$$

$$\Phi_{22}(a,\varphi) = D_{22}(a)\cos 2\varphi + D_{24}(a)\cos 4\varphi + D_{26}(a)\cos 6\varphi + D_{28}(a)\cos 8\varphi,$$

$$D_{22}(a) = -\frac{9\gamma}{2^4\omega^2}a^2 + \left(\frac{13\gamma^2}{2^6\omega^2} - \frac{3\gamma}{2^4\sigma^2}\right)a^4 + \frac{23\gamma^2}{2^8\sigma^2}a^6 - \frac{5\gamma^3}{2^9\sigma^2}a^8,$$

$$D_{24}(a) = \left(\frac{3\gamma}{2^6\sigma^2} - \frac{13\gamma}{2^8\omega^2}\right)a^4 - \frac{11\gamma^2}{2^8\sigma^2}a^6 + \frac{9\gamma^2}{2^{10}\sigma^3}a^8,$$

$$D_{26}(a) = \frac{7\gamma^2}{3\cdot 2^8\sigma^2}a^6 - \frac{5\gamma^3}{3\cdot 2^9\sigma^2}a^8,$$

$$D_{28}(a) = \frac{\gamma^3}{2^{12}\sigma^2}a^8. \tag{23}$$

Отметим, что выражение функции $W_{11}(a, \varphi)$ из (21) точно совпадает с выражением функции порядка ε в формуле (7.8.30) из [5].

Итак, в [5] получено второе приближение, а в даной работе получено третье приближение.

Сравнение точности третьих приближений (19) и (23) с решением, полученным методом Монте Карло [4], дано в таблице, где $\langle x^2\rangle_3$ — второй момент, полученный из (19), $\langle x^2\rangle_{3m}$ — второй момент, полученный из (23), $\langle x^2\rangle_{MC}$ — решение, полученное методом Монте Карло [4]. Для отрезка изменения интенсивности случайного воздействия $\sigma^2 \in [0, 5]$ оба третьи приближения $\langle x^2\rangle_3$, $\langle x^2\rangle_{3m}$ намного ближе к решению $\langle x^2\rangle_{MC}$, чем первое приближение $\langle x^2\rangle_1$. Для более сильных воздействий ($\sigma^2 \in [10, 20]$) только третье приближение $\langle x^2\rangle_{3m}$ хорошо сводится к решению $\langle x^2\rangle_{MC}$, а третье приближение $\langle x^2\rangle_3$ расходится.

Сравнение с Монте Карло методом $\omega = 1, \gamma = 10, \varepsilon = 0{,}2$

σ^2	$\langle x^2\rangle_{MC}$	$\langle x^2\rangle_1$	$\langle x^2\rangle_3$	$\langle x^2\rangle_{3m}$
0,0	0,2	0,2	0,2	0,2
0,1	0,2080	0,2055 (1,2%)	0,2075 (0,24%)	0,2091 (0,52%)
1,0	0,3600	0,3402 (5,5%)	0,3779 (5,0%)	0,3734 (4,28%)
5,0	0,7325	0,6433 (12,1%)	0,7741 (5,5%)	0,7243 (1,2%)
10,0	1,0310	0,8750 (15,1%)	1,5553 (50,8%)	0,9634 (6,4%)
20,0	1,4540	1,2040 (17,2%)	1,8033 (24,1%)	1,2954 (10,9%)

Метод усреднения Боголюбова является одним из мощных методов исследования как детерминированных, так и случайных нелинейных колебаний. Таким образом, дальнейшее развитие этого метода всегда представляет большой интерес у исследователей. В даной работе высшие приближения уравнений ФПК получены на основе метода усреднения в сочетании с методом малого параметра. Применение к системе Ван дер Поля дает хорошие результаты. Что касается задачи сходимости разложения, то она еще не решена.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в нелинейной механике.– М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Митропольський Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 240 с.
3. *Митропольский Ю.А ., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. – Киев: Наук. думка, 1992. – 337 с.
4. *Roy R. V., Spanos P. D.* Pade-type approach to non-linear random vibration analysis // Prob. Enging Mech. – 1991. – **6**, № 3, 4. – P. 119–128.
5. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 396 с.
4. *Nguyen Dong Anh.* Higher approximate solutions in stochastic averaging method // Proc. of NCSR of VN. – 1993. – **5**, № 1. – P. 19–26.

Получено 13.02.98