УДК 519. 54

**В. Л. Потемкин, В. И. Рязанов**
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# О НЕКОМПАКТНОСТИ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО МЕРЕ НА ДИЛАТАЦИЮ

We establish the fact that the classes of maps with restrictions in measure cannot be compact at all exept for only separate cases of degeneration. In particular, this implies that any David class ΓI is noncompact.

Встановлено, що класи відображень з обмеженнями за мірою взагалі не можуть бути компактними, за винятком лише окремих випадків виродження. Зокрема, звідси випливає, що будь-який клас ΓI Давіда є некомпактним.

Данная работа непосредственно примыкает к исследованию различных классов отображений, квазиконформных в среднем [1 – 12]. Новая теорема существования и единственности для уравнения Бельтрами, доказанная Г. Давидом [13], придала сильнейший импульс дальнейшим исследованиям общих гомеоморфизмов плоскости. Изучение свойств компактности для гомеоморфизмов Давида начато П. Тукиа [14]. В нашей работе приведено окончательное решение проблемы компактности не только для классов Давида, но и для классов с ограничениями по мере самого общего вида на дилатацию.

**1. Определения и предварительные замечания.** Как известно [15, с. 10 и 134], любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм комплексной плоскости $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ с обобщенными производными в смысле Соболева удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где $\mu:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — некоторая измеримая функция с $|\mu(z)|\le 1$ и, как обычно, $f_{\bar z}=(f_x+if_y)/2$, $f_z=(f_x-if_y)/2$, $z=x+iy$. Полагая $\mu(z)=0$ при $f_z=f_{\bar z}=0$, устраняем связанную с этим случаем неопределенность. Функцию $\mu(z)$ принято называть *комплексной характеристикой*, а величину

$$p(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \tag{2}$$

— *дилатацией* отображения $f$.

В частности, если $p(z)\le Q$ почти всюду, при некотором $Q\in[1,\infty)$, то гомеоморфизм $f$ называется *Q-квазиконформным отображением*.

В дальнейшем через $\widetilde{\mathfrak{F}}_Q$ обозначается класс всех $Q$-квазиконформных отображений $f$ расширенной комплексной плоскости на себя, нормированных следующим образом:

$$f(0)=0,\qquad f(1)=1,\qquad f(\infty)=\infty. \tag{3}$$

Как известно, класс $\widetilde{\mathfrak{F}}_Q$ является *секвенциально компактным* относительно локально равномерной сходимости [14, с. 76], т. е. из любой последовательности $f_n\in\widetilde{\mathfrak{F}}_Q$, $n=1,2,\ldots$, можно выделить подпоследовательность $f_{n_k}$, $k = 1,2,\ldots$, сходящуюся локально равномерно к некоторому отображению $f_0$, и при этом $f_0\in\widetilde{\mathfrak{F}}_Q$.

Известна также теорема существования и единственности для отображений класса $\widetilde{\mathfrak{F}}_Q$ [1, с. 90].

Недавно (1988 г.) Г. Давид [13] доказал новую теорему существования и единственности нормированных (3) гомеоморфных решений $f:\ \overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}$ для уравнения Бельтрами с коэффициентом $\mu(z)$, удовлетворяющим ограничениям по мере вида

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\} \le c_0 e^{-\alpha/\varepsilon} \tag{4}$$

для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, $\alpha > 0$, $c_0 > 0$.

Условие (4) удобнее переписать в эквивалентной форме в виде *ограничений по мере экспоненциального типа* на дилатацию

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t\} \le c e^{-\gamma t} \tag{5}$$

для всех $t \ge T$, где параметры $T, \gamma, c$ связаны с параметрами $\varepsilon_0, \alpha, c_0$ формулами $T = -1 + 2/\varepsilon_0 \ge 1$, $\gamma = \alpha/2 > 0$, $c = c_0 e^{-\gamma} > 0$. Эта связь является прямым следствием строгой монотонности и непрерывности функций $\Psi(\tau) = (1 + \tau)/(1 - \tau)$, $\tau \in [0, 1)$ из соотношения (2).

Г. Давид установил локальную равностепенную ограниченность и открытость таких гомеоморфизмов. Таким образом, в силу известной теоремы Арцела – Асколи [16, с. 289] указанный класс гомеоморфизмов является предкомпактным в пространстве $H$ всех гомеоморфизмов плоскости относительно локально равномерной сходимости.

П. Тукиа [14] удалось установить, что локально равномерные пределы гомеоморфизмов Давида с ограничениями (5) также являются гомеоморфизмами Давида, но, вообще говоря, с другими постоянными $T, \gamma$ и $c$. Таким образом, проблема секвенциальной компактности и замкнутости классов Давида оставалась нерешенной до последнего времени.

В этой связи также естественным образом возникает вопрос о секвенциальной компактности классов с *ограничениями по мере общего вида* на дилатацию:

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t\} \le \varphi(t), \tag{6}$$

где $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $I = [1, \infty)$, — произвольная функция.

В дальнейшем через $H(\varphi)$ обозначается класс всех гомеоморфизмов плоскости $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, сохраняющих ориентацию, класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}$ с нормировками (3) и ограничениями на дилатацию вида (6).

***Замечание* 1.** Класс $H(\varphi)$ заведомо не пуст, поскольку всегда содержит тождественное отображение. Класс $H(\varphi)$ нетривиален, т. е. содержит отображения отличные от тождественного, в том и только в том случае, когда

$$\liminf_{t \to 1} \varphi(t) \ne 0. \tag{7}$$

Действительно, если

$$\liminf_{t \to 1} \varphi(t) = \varepsilon > 0,$$

то найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $\tau \in (1, 1 + \delta)$: $\varphi(\tau) \ge \varepsilon/2$. Тогда отображение

$$f(z) = \begin{cases} z|z|^{\tau-1}, & |z| \le \rho, \\ cz, & |z| \ge \rho, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{\varepsilon/2\pi}$, $c = \rho^{\tau-1}$, имеет дилатацию

$$p(z) = \begin{cases} \tau, & |z| \le \rho, \\ 1, & |z| \ge \rho, \end{cases}$$

и, таким образом, заведомо принадлежит классу $H(\varphi)$.

Необходимость условия (7) очевидна.

Можно показать, на самом деле, что при условии (7) мощность класса $H(\varphi)$ совпадает с мощностью класса всех измеримых функций.

В дальнейшем важно, что в (6) $\varphi$ всегда можно заменить на функцию, обладающую дополнительными свойствами, с сохранением класса. Точнее, выполняется следующее утверждение о *регулярной замене*.

**Предложение 1.** *Для любой функции* $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $I = [1, \infty)$, *существует и единственна невозрастающая непрерывная справа функция* $\varphi_r: I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *такая, что*

$$H(\varphi) = H(\varphi_r). \tag{8}$$

*При этом*

$$\varphi_r(t) = \lim_{b \to t+0} \left\{ \inf_{1 \le a \le b} \varphi(a) \right\} \tag{9}$$

*для всех* $t \ge 1$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\varphi_1$ *и* $\varphi_2: [1, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ — *невозрастающие непрерывные справа функции. Тогда для выполнения равенства*

$$H(\varphi_1) = H(\varphi_2) \tag{10}$$

*необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$ *на всем интервале* $I = [1, \infty)$.

***Доказательство.*** 1. Сначала рассмотрим функцию

$$\tilde{\varphi}(b) = \inf_{1 \le a \le b} \varphi(a), \qquad b \in I. \tag{11}$$

С одной стороны, по построению эта функция является невозрастающей и $\tilde{\varphi}(b) \le \varphi(b)$, $b \in I$. Поэтому $H(\tilde{\varphi}) \subseteq H(\varphi)$.

С другой стороны, любая измеримая функция $p(z): \mathbb{C} \to I$, удовлетворяющая системе неравенств $\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > a\} \le \varphi(a)$ при всех $a \ge 1$, по определению (11) также будет удовлетворять и системе неравенств $\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > b\} \le \tilde{\varphi}(b)$ при всех $b \ge 1$, т. е. $H(\varphi) \subseteq H(\tilde{\varphi})$. Таким образом,

$$H(\varphi) = H(\tilde{\varphi}). \tag{12}$$

2. Теперь рассмотрим функцию $\varphi_r(t) = \lim\limits_{b \to t+0} \tilde{\varphi}(b)$. По построению она непрерывна справа, не возрастает и $\varphi_r(t) \le \tilde{\varphi}(t)$. Следовательно, имеет место очевидное включение

$$H(\varphi_r) \subseteq H(\tilde{\varphi}). \tag{13}$$

Кроме того, для любой измеримой функции $p: \mathbb{C} \to I$ в силу счетной аддитивности меры выполняется тождество

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t\} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t + 1/n\}.$$

Поэтому

$$H(\tilde{\varphi}) \subseteq H(\varphi_r). \tag{14}$$

Сопоставляя (12) – (14), приходим к равенству (8).

3. Наконец, докажем единственность регулярной замены.

Действительно, допустим, что существуют две невозрастающие непрерывные справа функции $\varphi_1$ и $\varphi_2: I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ такие, что выполняется (10). Тогда найдется точка $t_0$, где $\varphi_1(t_0) \neq \varphi_2(t_0)$. Пусть для определенности $\Phi_2 = \varphi_2(t_0) > \varphi_1(t_0) = \Phi_1$ и пусть $\Delta = \Phi_2 - \Phi_1 > 0$. При любом $\tau$, достаточно близком к $t_0$ справа, получаем неравенства

$$0 \leq \varphi_2(t_0) - \varphi_2(\tau) < \Delta/3 \quad \text{и} \quad 0 \leq \varphi_1(t_0) - \varphi_1(\tau) < \Delta/3.$$

Рассмотрим отображение

$$f(z) = \begin{cases} z|z|^{\tau-1}, & |z| \leq \rho, \\ cz, & |z| \geq \rho, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{\varphi_2(\tau)/\pi}$, $c = \rho^{\tau-1}$, которое имеет дилатацию вида

$$p(z) = \begin{cases} \tau, & |z| \leq \rho, \\ 1, & |z| \geq \rho, \end{cases}$$

и, таким образом, $f$ принадлежит классу $H(\varphi_2)$, но не принадлежит классу $H(\varphi_1)$. Последнее противоречит предположению (10). Таким образом, регулярная замена действительно может быть только одна.

Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Предложение 1 позволяет нам без потери общности при исследовании классов $H(\varphi)$ ограничиться рассмотрением только таких функций $\varphi$, которые не возрастают и непрерывны справа. Это значительно облегчает процесс доказательства соответствующих теорем для $H(\varphi)$. При необходимости, сначала сформулировав и доказав тот или иной результат для регулярной замены, его всегда можно простой переформулировкой перевести на язык исходной функции ввиду наличия их конструктивной связи (9).

В работе [12] рассмотрены классы $H^\Phi$ всех нормированных гомеоморфизмов $f$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на себя, нормированных условием (3), с обобщенными производными в смысле Соболева и с ограничениями на дилатации вида

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))\,dx\,dy \leq 1, \tag{15}$$

где $\Phi\colon [1,\infty] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ — произвольная функция.

Пусть

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1/\varphi(t), & t \in [1,\infty), \\ \infty, & t = \infty, \end{cases} \tag{16}$$

где $\varphi\colon [1,\infty] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ — произвольная невозрастающая непрерывная справа функция из предложения 1 о регулярной замене.

Тогда функция $\Phi\colon [1,\infty] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ — неубывающая непрерывная справа функция. Таким образом, имеет место очевидное включение

$$H^\Phi \subseteq H(\varphi). \tag{17}$$

Обратное включение, вообще говоря, не имеет места. Например, если в некоторой точке $t_0 \in (1,\infty)$ наблюдается разрыв слева, т. е.

$$\varphi_1 \overset{\text{def}}{=} \varphi(t_0 - 0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \varphi(t) > \varphi(t_0) = \varphi_0,$$

то $Q$ — квазиконформное отображение $f \in \mathfrak{F}_Q$, $Q = t_0$, с комплексной характеристикой

$$\mu(z) = \begin{cases} t_0, & |z| < r_0, \\ 0, & |z| \geq r_0, \end{cases}$$

где $r_0 = \sqrt{\varphi_1/\pi}$ принадлежит классу $H(\varphi)$. В то же время

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))\,dx\,dy = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} > 1,$$

т. е. отображение $f$ заведомо не принадлежит классу $H^{\Phi}$.

**2. Решение проблемы компактности.** Приведенная ниже теорема дает исчерпывающий ответ по проблеме компактности для классов с ограничениями по мере общего вида на дилатацию. Вследствие предложения 1 о регулярной замене в классах $H(\varphi)$, без потери общности функции $\varphi: [1, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ можно считать невозрастающими и непрерывными справа.

**Теорема 1.** *Пусть функция* $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *не возрастает и непрерывна справа. Тогда для компактности класса* $H(\varphi)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi$ *имела вид*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \infty, & 1 \leq t < Q, \\ 0, & t \geq Q, \end{cases} \tag{18}$$

*для некоторого* $1 \leq Q < \infty$.

Другими словами среди классов $H(\varphi)$ секвенциально компактными могут быть только полные классы $\mathfrak{F}_Q$ всех нормированных $Q$-квазиконформных отображений расширенной комплексной плоскости на себя. Отсюда, в частности, вытекает такое следствие.

***Следствие 2.*** *Ни один из классов Давида не является секвенциально компактным классом.*

Действительно, в классах Давида

$$\varphi(t) = \begin{cases} \infty, & 1 \leq t < T, \\ c e^{-\gamma t}, & t \geq T, \end{cases} \tag{19}$$

где $c$ и $\gamma > 0$, т. е. функция $\varphi$ не возрастает и непрерывна справа. Согласно критерию теоремы 1 такие классы не могут быть секвенциально компактными.

Используя конструктивную связь (9) регулярной замены $\varphi_r$ с исходной функцией $\varphi$, из теоремы 1 получаем другую формулировку критерия компактности.

**Теорема 2.** *Пусть* $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *— произвольная функция. Тогда для секвенциальной компактности класса* $H(\varphi)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$Q = \inf_{\varphi(t) < \infty} t < \infty \tag{20}$$

*и*

$$\liminf_{t \to Q} \varphi(t) = 0. \tag{21}$$

Это так, поскольку условия (20) и (21), очевидно, являются необходимыми и достаточными для того, чтобы регулярная замена $\varphi_r$ функции $\varphi$ имела вид

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} \infty, & 1 \leq t < Q, \\ 0, & t \geq Q, \end{cases} \tag{22}$$

при некотором $1 \leq Q < \infty$. Поэтому теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 1 и предложения 1.

Для сравнения в [11] был дан критерий компактности классов $H^{\Phi}$, нормированных гомеоморфизмов плоскости, выделяемых интегральными ограничениями вида (15), где $\Phi: [1, \infty] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ — произвольная функция с экспоненциальным ростом на бесконечности. Заметим, что для непустоты классов $H^{\Phi}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf \Phi = 0. \tag{23}$$

При этом критерий компактности $H^{\Phi}$ состоял в том, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi$ была неубывающей, выпуклой (вниз) и непрерывной в смысле $\overline{\mathbb{R}}^+$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t) < \infty} t. \tag{24}$$

Для таких $\Phi$ справедливо очевидное включение $H^{\Phi} \subseteq H(\varphi)$, $\varphi = 1/\Phi$. Однако, как показывают приведенные критерии компактности, такие классы не могут совпасть.

**3. Основная лемма.** В следующей лемме используется конструкция работы [17].

**Лемма 1.** *Пусть $t_1, t_2 \in [1, Q]$, $t_1 \neq t_2$, $1 < Q < \infty$ и $\lambda \in [0, 1]$ — произвольные числа. Тогда найдется последовательность $F_n$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, $Q$-квазиконформных отображений с дилатациями $p_n(z)$, принимающими только два значения $t_1$ и $t_2$, которая сходится локально равномерно к $Q$-квазиконформному отображению $F_0$ с дилатацией*

$$p_0(z) \equiv t_0 = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2. \tag{25}$$

*Кроме того, для любого измеримого множества $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{C}$ с $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \infty$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{z \in \mathscr{E}:\ p_n(z) = t_1\}}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} = \lambda. \tag{26}$$

*Доказательство.* Прежде всего рассмотрим $Q$-квазиконформные отображения $\zeta = g_s(z)$, $s = 0, 1, 2$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, которые сводятся к растяжениям вдоль оси $y$: $\xi^{(s)} = x$, $\eta^{(s)} = t_s y$, $s = 0, 1, 2$, соответственно. Как легко видеть, их дилатации равны $t_s$, $s = 0, 1, 2$, поскольку, используя тождества $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, их также можно переписать в комплексной форме:

$$\zeta^{(s)} = g_s(z) = z\frac{1+t_s}{2} + \bar{z}\frac{1-t_s}{2}. \tag{27}$$

Зафиксируем натуральное число $n = 1, 2, \ldots$, и разобьем плоскость $\mathbb{C}$ на полосы горизонтальными прямыми, заданными в параметрической форме $l_{mn}(\tau) = \tau + im/2^n$, $\tau \in \mathbb{R}$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Каждую такую полосу разобьем на две полоски с помощью горизонтальных прямых

$$\tilde{l}_{mn}(\tau) = \tau + i\left(\frac{m}{2^n} + \frac{\lambda}{2^n}\right), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Между прямыми $l_{0n}$ и $\tilde{l}_{0n}$ полагаем $F_n(z) \equiv g_1(z)$. В остальных случаях определяем $F_n(z) \equiv g_s(z) + ic_{mn}^{(s)}$, где $s$ равно 1 или 2 (между прямыми $l_{mn}$ и

$\tilde{l}_{mn}$ выбираем $s = 1$; между прямыми $\tilde{l}_{mn}$ и $l_{(m+1)n}$ — $s = 2$), а постоянные $c_{mn}^{(s)}$ находятся для каждого фиксированного $n$ индукцией по $m$ в обе стороны от нуля ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ) из условия склеивания.

Вследствие устранимости аналитических дуг отображения $F_n$ будут $Q$-квазиконформными [15, с. 47].

Отметим, что по построению между прямыми $l_{mn}$ и $\tilde{l}_{mn}$ отображения $F_n$ имеют дилатации $p_n(z) = t_1$, в то время как между прямыми $\tilde{l}_{mn}$ и $l_{(m+1)n}$: $p_n(z) = t_2$.

Далее, при $\Delta z^{(s)} = i h_s$, $h_s > 0$, $s = 0, 1, 2$, имеем $\Delta g_s = i h_s t_s$. Отсюда получаем

$$\Delta F_n = \frac{1}{2^n}\{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\} = \frac{1}{2^n} t_0 = \Delta g_0 \tag{28}$$

для $\Delta z = i 2^{-n}$ (достаточно выбрать $h_0 = 2^{-n}$, $h_1 = \lambda 2^{-n}$ и $h_2 = (1-\lambda) 2^{-n}$). Это показывает, в частности, что $F_n(z) \equiv g_0(z)$ на горизонтальных линиях $l_{mn}$ для $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ , $n = 1, 2, \ldots$ .

Итак, на множестве точек плоскости линий $l_{mn}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ , $n = 1, 2, \ldots$ , которое всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$ последовательность $F_n(z)$ сходится очевидным образом к отображению $F_0(z) \equiv g_0(z)$ и, следовательно, оно сходится к $F_0(z)$ локально равномерно во всей плоскости $\mathbb{C}$ [15, с. 76].

Наконец, соотношение (26) вытекает непосредственно из распределения мер между значениями $t_1$ и $t_2$ в дилатацях $p_n(z)$.

***Следствие 3.*** *Для любых*

$$t_1, t_2 \in [1, Q], \quad t_1 \neq t_2, \quad 1 < Q < \infty, \quad \lambda \in [0, 1], \quad \mathscr{E} \subset \mathbb{C}, \quad \operatorname{mes} \mathscr{E} < \infty,$$

*найдется последовательность* $f_n \in \mathfrak{F}_Q$ *с дилатациями вида*

$$p_n(z) = \begin{cases} t_1, & z \in \mathscr{E}_n, \\ t_2, & z \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_n, \\ 1, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{E}, \end{cases} \tag{29}$$

*такая, что* $f_n \to f_0 \in \mathfrak{F}_Q$ *локально равномерно и*

$$p_0(z) = \begin{cases} t_0, & z \in \mathscr{E}, \\ 1, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{E}, \end{cases}$$

*где*

$$t_0 = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2 \tag{31}$$

*и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \mathscr{E}_n}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} = \lambda. \tag{32}$$

(Определение класса $\mathfrak{F}_Q$ приведено в пункте 1). Следствие 3 получается непосредственно из секвенциальной компактности класса $\mathfrak{F}_Q$, леммы 1 и следующей леммы сравнения.

**Лемма** [18, 19]. *Пусть* $f_n$ *и* $g_n$, $n = 1, 2, \ldots$ , — *последовательности* $Q$-*квазиконформных отображений с комплексными характеристиками* $\mu_n(z)$ *и*

$\nu_n(z)$, *которые сходятся локально равномерно к* $Q$*-квазиконформным отображениям* $f_0$ *и* $g_0$ *с комплексными характеристиками* $\mu_0(z)$ *и* $\nu_0(z)$ *соответственно. Если при этом*

$$\mu_n(z) - \nu_n(z) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{33}$$

*по мере на некотором измеримом множестве* $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{C}$, *то* $\mu_0(z) = \nu_0(z)$ *почти всюду на* $\mathscr{E}$.

**4. Доказательство критерия компактности.** Достаточность условия (18) для секвенциальной компактности класса $H(\varphi)$ очевидна, поскольку в этом случае рассматривается класс $\mathfrak{F}_Q$.

Доказательство необходимости условия (18) сводится к доказательству следующей серии простых предложений.

**Предложение 2.** *Пусть функция* $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *не возрастает. Если класс* $H(\varphi)$ *секвенциально компактен, то*

$$Q_1 = \sup_{\varphi(t)=\infty} t < \infty. \tag{34}$$

Здесь супремум берется по $t \in I$. Если точек $t$, в которых $\varphi(t) = \infty$, вообще нет, то полагаем по определению $Q_1 = 1$.

**Предложение 3.** *Пусть функция* $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *не возрастает и непрерывна справа. Если класс* $H(\varphi)$ *секвенциально компактен, то* $\varphi$ *имеет вид*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \infty, & t \in [1, Q_1), \\ c, & t \in [Q_1, Q_2), \\ 0, & t \in [Q_2, \infty), \end{cases} \tag{35}$$

*где* $0 < c < \infty$ *определено в* (34),

$$Q_2 = \inf_{\varphi(t)=0} t. \tag{36}$$

Здесь инфимум берется по $t \in I$. Если точек $t$, в которых $\varphi(t) = 0$, вообще нет, то полагаем по определению $Q_2 = \infty$.

**Предложение 4.** *Пусть функция* $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *не возрастает и непрерывна справа. Если класс* $H(\varphi)$ *секвенциально компактен, то*

$$Q_1 = Q_2. \tag{37}$$

***Доказательство предложения 2.*** Допустим, что $\varphi(t) \equiv \infty$, $t \in [1, \infty)$. Рассмотрим последовательность квазиконформных отображений

$$f_n(z) = z|z|^{t_n - 1} = z^{\frac{t_n+1}{2}} \bar{z}^{\frac{t_n-1}{2}}, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $t_n \in [1, \infty)$ — произвольная последовательность такая, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Как легко видеть,

$$\mu_n(z) \equiv \frac{z}{\bar{z}} \frac{t_n - 1}{t_n + 1},$$

т. е. $p_n(z) \equiv t_n$ и $f_n \in H(\varphi)$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Для любого фиксированного $z \neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \lim_{n\to\infty} |z|^{t_n} = \infty.$$

Поэтому из $f_n$ нельзя выделить подпоследовательность $f_{n_k}$, сходящуюся к какому-либо отображению $f_0$ класса $H(\varphi)$, что противоречит секвенциальной компактности $H(\varphi)$.

***Доказательство предложения* 3.** Если $Q_1 = Q_2$, то доказательство очевидно. Итак, пусть $Q_2 > Q_1$. Тогда вследствие определения $Q_1$ и $Q_2$ на полуоткрытом интервале $[Q_1, Q_2)$ имеем

$$0 < \varphi(t) < \infty. \tag{38}$$

Покажем, что если

$$\varphi(t_*) = c_0 \tag{39}$$

для некоторого $t_* \in [Q_1, Q_2)$, то и

$$\varphi(t) \equiv c_0 \tag{40}$$

на интервале $(t_*, Q_2)$. Ввиду произвольности $t_* \in [Q_1, Q_2)$ это сразу же приведет нас к (35).

Итак, пусть

$$t^* = \sup_{\varphi(t) = c_0} t \geq t_*. \tag{41}$$

Допустим, что

$$t^* < Q_2. \tag{42}$$

Тогда найдется точка $\tilde{t} \in (t^*, Q_2)$. В такой точке по определению $0 < \varphi(\tilde{t}) < < c_0$. Выбирая в следствии 3 $t_1 = t_*$, $t_2 = \tilde{t}$, $\lambda = \varphi(\tilde{t})/c_0$ и $\mathscr{E}^\varepsilon = \{z = x + iy\colon 0 \leq \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq c_0 - \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon \in (0, c_0)$, имеем некоторую последовательность $f_n \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{t}} \cap H(\varphi)$, сходящуюся локально равномерно к некоторому отображению $f_0^\varepsilon \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{t}} \cap H(\varphi)$ с дилатацией

$$p_0^\varepsilon(z) = \begin{cases} t_0, & z \in \mathscr{E}^\varepsilon, \\ 1, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{E}^\varepsilon, \end{cases}$$

где $t_0 = \lambda t^* + (1 - \lambda)\tilde{t}$, т. е. $t^* < t_0 < \tilde{t}$. Кроме того,

$$\operatorname{mes}\left\{z \in \mathbb{C}\colon p_0^\varepsilon(z) = t_0\right\} = c_0 - \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $t \in (t^*, t_0)$ имеем оценку снизу $\varphi(t) \geq c_0 - \varepsilon$ и ввиду произвольного $\varepsilon$: $\varphi(t) \geq c_0 = \varphi(t_*)$.

Поскольку функция $\varphi$ не возрастает, то $\varphi(t) \equiv \varphi(t_*)$, $t \in (t^*, t_0)$. Однако последнее противоречит определению точки $t^*$. Таким образом, допущение (42) было неверным и (40) имеет место на всем интервале $(t_*, Q_2)$.

***Доказательство предложения* 4.** Допустим, что $Q_1 < Q_2$. Тогда найдется точка $t_* \in (Q_1, Q_2)$. Полагая в следствии 3

$$t_1 = t_*, \quad t_2 = Q_1 \quad \text{и} \quad \mathscr{E}^N = \{z = x + iy\colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq N\},$$

$$\lambda = \lambda^{\varepsilon, N} = \{\varphi(t_*) - \varepsilon\}/N,$$

где $\varepsilon$ и $N$ — произвольные, но фиксированные положительные числа, получаем некоторую последовательность $f_n \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{t_*} \cap H(\varphi)$, сходящуюся локально равномерно к некоторому отображению $f_0 \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{t_*} \cap H(\varphi)$ с дилатацией

$$p^{\varepsilon,N}(z) = \begin{cases} t^{\varepsilon,N}, & z \in \mathscr{E}^N, \\ 1, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{E}^N, \end{cases}$$

где $t^{\varepsilon,N} = \lambda^{\varepsilon,N} t_* + (1-\lambda^{\varepsilon,N}) Q_1$, поэтому $Q_1 < t^{\varepsilon,N} < t_*$.

Кроме того, $\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p^{\varepsilon,N}(z) = t^{\varepsilon,N}\} = N$.

Ввиду произвольности $N > 0$ последнее противоречит (35). Таким образом, допущение было неверным.

Результаты данной работы были анонсированы без доказательства в [20].


1. *Ahlfors L. V.* On quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1953/1954. – **3.** – P. 1–58.
2. *Билута П. А.* Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 4. – С. 717–726.
3. *Кругликов В. И.* О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1973. – С. 123–147.
4. *Кругликов В. И., Миклюков В. М.* О некоторых классах плоских топологических отображений // Там же. – С. 102–122.
5. *Кругликов В. И., Борчук С. М.* Сходящиеся последовательности отображений с искажением, ограниченным в среднем // Докл. АН УССР. – 1990. – № 10. – С. 6–9.
6. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.
7. *Кудьявин В. С.* Локальная структура плоских отображений, квазиконформных в среднем // Докл. НАН Украины. – 1991. – № 3. – С. 10–12.
8. *Миклюков В. М., Суворов Г. Д.* О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками // Исследования по теории функций комплексной переменной и ее приложениям. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 45–53.
9. *Перович М.* О глобальном гомеоморфизме отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 4. – С. 781–784.
10. *Песин И. Н.* Отображения, квазиконформные в среднем // Там же. – 1969. – **187**, № 4. – С. 740–742.
11. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009–1019.
12. *Рязанов В. И.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 2. – С. 378–388.
13. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. – 1988. – **13**, № 1. – P. 25–70.
14. *Tukia P.* Compactness properties of $\mu$-homeomorphism // Ibid. – 1991. – **16,** № 1. – P. 47–69.
15. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – Berlin: Springer, 1973. – 267 p.
16. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
17. *Ryazanov V. I.* Some Questions of Convergence and Compactness for Quasiconformal Mappings // Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – **131**, № 2. – P. 7–19.
18. *Рязанов В. И.* О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 1. – С. 87–104.
19. *Gutlianskii V. Y., Ryazanov V. I.* On boundary correspondence under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1996. – **21**, – P. 167–178.
20. *Потемкин В. Л., Рязанов В. И.* О гомеоморфизмах класса Соболева с ограничениями по мере на дилатацию // Допов. НАН України. – 1996. – № 2. – С. 8–11.


Получено 07.08.96