УДК 519.4147

М. М. Семко (Укр. фін.-екон. ін-т, Ірпінь)

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН ( ]-ГРУП

The notion of a CDN( ]-group G is introduced: G is a group for whose any pair of subgroups A and B such that A is a proper nonmaximal subgroup of B there exists a normal subgroup of G and $A < N \leq B$. Thirteen types of nilpotent and nine types of nonnilpotent locally graded groups of this kind are obtained.

Вводиться поняття УЩН ( ]-групи — такої групи G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N \leq B$. Одержано 13 типів недедекіндових нільпотентних та 9 типів ненільпотентних локально ступінчастих груп такого роду.

Значний і самостійний підклас груп класу УЩН [ ]-груп, повний опис якого можна знайти в [1 – 6], становлять УЩН ( ]-групи. УЩН ( ]-групою називається така група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N \leq B$. В даній роботі одержано повний опис локально ступінчастих УЩН ( ]-груп. Необхідні означення можна знайти в [1, 4].

Теорема 1. *Нільпотентні недедекіндові УЩН ( ]-групи G вичерпуються групами типів:*

1) *G — нільпотентна недедекіндова УЩН ( ]-група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$, тобто G — УЩН ( )-група одного з типів* 1 – 10 *теореми* 1 *з* [3];

2) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

3) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta < 4$, $b^{-1}ab = a^{3}$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = p^2$, $|x| = |b| = p$ — *непарне просте число,* $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |x| = p^2$, $|b| = p$ — *непарне просте число,* $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $0 < s < p$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ — *просте число,* $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 < t < p$; *при* $p > 2$ $t^2 + 4s$ — *неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p = 2$ $t = s = 1$;

7) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = p$ — *просте число,* $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^p$, $[b, x] = a^{sp}b^{tp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$; *при* $p > 2$ $t^2 + 4s$ — *неквадратичний лишок за модулем* p; *при* $p = 2$ $s = 1$;

8) $G = \langle a \rangle M$, $M = (\langle c \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^2$, $|c| = |x| = p$ — *непарне просте число,* $[a, b] = x$, $[b, x] = c$, $\langle c \rangle \times \langle b^p \rangle = Z(G)$, $[a, x] = c^{\varepsilon}b^{p}$, $0 \leq \varepsilon < p$, $a^p = c^{1+\varepsilon t}b^{tp}$, $0 \leq t < p$, *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві*;

9) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = 4$, $M = (\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = 4$, $[a, b] = x^2$, $[b, x] = a^2b^2 \in Z(G)$, $[a, x] = b^2x^2$;

10) $G = \langle a \rangle M$, $|a| = p^2$, $M = (\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|b| = |x| = p$, p — *непарне просте число,* $[b, x] = a^{sp}b^{tp}x^{lp}$, $0 < s < p$, $0 \leq t < p$, $0 \leq l < p$, $[a, b] = x^p$, $[a, x] = a^{fp}b^{kp}$, $0 < f < p$, $0 \leq k < p$, *неквадратичними лишками за модулем* p *є*

числа: $l^2 + 4fs$, $i^2 + 4f$; $k^2 + 4s$, *всі елементи порядку* p *з* G *належать* G', *всі метациклічні підгрупи з* G *абелеві*;

11) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta \in \{2, 3\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

12) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^7$;

13) $G = (\langle a, b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $\langle a, b \rangle$ — *група кватерніонів*, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = a$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 з [4] група G задовольняє умову теореми 3 з [5] і може бути групою одного з типів 1 – 28 згаданої теореми.

Нехай G — група одного з типів: 1 – 3; 10, $|b| \in \{4, 8\}$, $z \in Z(G)$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, $[U, X] = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$; 27 теореми 3 з [5]. Тоді G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 4 чи 5 теореми 3 з [5]. Тоді $w(Z(G)) = G'$, $|G'| = p$ і G містить підгрупу $B = \langle v \rangle \times \langle a \rangle$, $|v| = |a| = p$, $B \cap Z(G) = B \cap G' = 1$. Покладемо $A = 1$. Тоді $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН ( ]-груп $(A; B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $N \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Нехай G — група типу 6 чи 7 теореми 3 з [5]. Припустимо, що $\beta > 3$. Тоді $b^2 \in Z(G)$. Покладемо $d = ab^2$. Ясно, що $G' \cap \langle d \rangle = 1 = \langle a \rangle \cap \langle d \rangle$. За лемою 1 з [3] $\langle d^2 \rangle \lhd G$. Очевидно, що $d^2 = a^2 b^4$. Зрозуміло, що $d^2 \in Z(G)$, $b^2 \in Z(G)$, а $a^2 \notin Z(G)$, що неможливо. Отже, $\beta < 4$. Тоді G — група типу 2 та 3 згаданої теореми відповідно.

Нехай G — група типу 8 чи 9 теореми 3 з [5]. Покладемо в групі G типу 8 $g = b$, а в групі G типу 9 $g = d$. Внаслідок леми 1 з [3] $\langle g^p \rangle \lhd G$, що в групах G розглядуваних типів неможливо і тому G не може бути групою цих типів.

Припустимо, що G — група типу 10 теореми 3 з [5]. Покажемо, що G — група типу 4 теореми 1 з [3]. Для цього досить показати, що $|b| \in \{4, 8\}$, $z \in Z(G)$. Покажемо спочатку, що $z \in Z(G)$. Оскільки $|z| \in \{1, r\}$, то при непарному r це очевидно. Нехай $|z| = 2$. Тоді $|b| \in \{4, 8\}$ і при $|b| = 4$ $z \in Z(G)$. Якщо $|b| = 8$, то G містить підгрупу $B = \langle d \rangle \times \langle z \rangle$, де $d = a^2 b^2$, $|d| = 2$, $d \notin Z(G)$. Покладемо $A = 1$. Тоді, очевидно, $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН ( ]-груп $(A; B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $B \cap G' = B \cap \langle a \rangle = N \cap G' = 1$ і тому $N \leq Z(G)$, $|N| > 1$. Ясно, що $N < B$ і B — група типу $(2, 2)$. Отже, без порушення загальності можна вважати, що $N = \langle z \rangle$ і тому завжди $z \in Z(G)$.

Припустимо, що $|b| = 2^{\beta}$ і $\beta > 3$. Тоді $b^2 \in Z(G)$. Покладемо $d = ab^{2^{\beta-3}}$. Легко бачити, що $|d| = 4$, $\langle d \rangle \cap G' = \langle a \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. Завдяки лемі 1 з [3] $\langle d^2 \rangle \lhd G$, $d^2 = a^2 b^{2^{\beta-2}} \in Z(G)$, що неможливо, оскільки $a^2 \notin Z(G)$. Отже, $\beta < 4$ і G — група типу 4 теореми 1 з [3], а тому G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 11 теореми 3 з [5]. Покажемо, що $z \in Z(G)$. Оскільки $z \in \{1, r\}$, то при $r \neq 3$ це очевидно. Нехай $r = 3$. Тоді в G існує підгрупа $B = \langle b \rangle \times \langle z \rangle$. Покладемо $A = 1$. Тоді, очевидно, $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН ( ]-груп $(A; B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $B \not\leq Z(G)$, $\langle b \rangle \ntriangleleft G$, $G' = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle$, $B \cap G' = \langle b \rangle$. Звідси $\langle b \rangle \ntriangleleft G$ і тому $|N| = 3$. Ясно, що $N \cap$

$\cap G' = \langle b \rangle \cap N = 1$. Отже, $N \leq Z(G)$ і можна вважати, що $N = \langle z \rangle$. Звідси G — група типу 5 теореми 1 з [3] і тому G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 12 теореми 3 з [5]. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, $|c| = |b| = p$ — непарне просте число, $c \in Z(G)$, $b \notin Z(G)$ і G — неметациклічна група. Якщо всі власні підгрупи з G метациклічні, то G група типу 2 теореми 1.3.3 з [4], а тому G — група типу 5 теореми 1 з [3] і, значить, G — група типу 1 розглядуваної теореми. Нехай M — власна неметациклічна підгрупа з G. Тоді M може бути лише групою типу 1 теореми 1.3.3 з [4]. Звідси M містить елемент x, $|x| = p$, $\langle x \rangle \cap G' = 1$. Очевидно, $[G : M] = p$, $G' \leq M$ і $M = G' \leftthreetimes \langle x \rangle$. Зрозуміло, $x \in G \setminus \Phi(G)$ і G — 2-породжена група і тому $x \notin Z(G)$. Припустимо, що $x \in Z(M)$. Покладемо $A = 1$, $B = \langle b \rangle \times \langle x \rangle$. Оскільки $G' = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$ і $G' \cap \cap B = \langle b \rangle$, то $\langle b \rangle \ntriangleleft G$ і $B \ntriangleleft G$. Ясно, що $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН ( ]-груп $(A; B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $|N| = p$, $N \leq Z(G)$. Без порушення загальності можна вважати, що $N = \langle x \rangle$, що не так. Отже, $x \notin Z(M)$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $G' \leq Z(C) \leq C \lhd G$, $C \cap \langle x \rangle = 1$, G / C — підгрупа з $\operatorname{Aut} G'$. Відомо [7], що $\operatorname{Aut} G' \cong GL(2, p)$ і силовська p-підгрупа з $GL(2, p)$ має порядок p. Звідси $[G : C] = p$ і, значить, $|C| = p^3$, $G = C \leftthreetimes \langle x \rangle$, $C' = 1$. За сказаним вище група C — не може бути групою типу (p, p, p). Але тоді $C = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = p$, $a^p = c \in Z(G)$. Оскільки $x \notin Z(M)$, то $[b, x] = c^s$, $0 < s < p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[a, x] = b$. Звідси G — група типу 4 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів: 13; 14; 16; 19; 20; 21; 22, $|b| \in \{4, 8\}$; 23, $|b| = 8$; 25 теореми 3 з [5] є відповідно групами кожного з типів 5 – 13 розглядуваної теореми.

Нехай G — група одного з типів 22 – 24 теореми 3 з [5]. Тоді $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 16$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{2, 3, 4\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a^2 \rangle$. Покажемо, що $\beta < 4$. Нехай це не так. Тоді G містить елемент $d = a^2 b^2$, $[a^2, b^2] = 1$. Звідси $|d| = 4$ і $\langle d \rangle \cap G' = 1$. Внаслідок леми 1 з [3] $d^2 \in Z(G)$ і $d^2 = a^4 b^4$. В групах G розглядуваних типів $b^4 \in Z(G)$ а $a^4 \notin Z(G)$. Суперечність. Отже, G — не може бути групою типу 24 теореми 3 з [5], а група G типу 22 чи 23 теореми 3 з [5] може бути лише групою типу 11 чи 12 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 26 теореми 3 з [5]. Тоді $G = U \leftthreetimes X$. При циклічності U $[U, X] = w(U) \leq Z(G)$. Нехай $C = C_X(U)$. Тоді $C \lhd G$ і X / C — підгрупа з $\operatorname{Aut} U$. При $|U| = 4$ $|\operatorname{Aut} U| = 2$. Звідси $[X : C] = 2$. Нехай $|U| > 4$. Тоді $\operatorname{Aut} U$ — абелева група і, значить, $X' \leq C$. З цього випливає, що $G' \leq Z(G)$ і G' — група типу $(2, 2)$. Легко бачити, що $\Phi(U) \leq Z(G)$. За сказаним вище $[X : C] \in \{2, 4\}$. Припустимо, що $[X : C] = 4$. Тоді $C = X'$ і X / C — група типу $(2, 2)$ з $\operatorname{Aut} U$. Але тоді X / C містить інвертуючий автоморфізм Cz з $\operatorname{Aut} U$. Звідси z індукує на U теж інвертуючий автоморфізм і, значить, $[U, \langle z \rangle] = \Phi(U)$, $|\Phi(U)| > 2$, що суперечить співвідношенню $[U, X] = \Phi(U)$. Отже, $[X : C] = 2$. Тоді $|C| = 4$ і G — група типу 9 теореми 1 з [3] і, значить, G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай U — нециклічна група. Тоді U — група кватерніонів порядку 8. Якщо $|C_X(U)| = 4$, то G — група типу 9 теореми 1 з [3] і тому G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай $C_X(U) = X$. Тоді $U = \langle a, b \rangle$, $X = \langle x, y \rangle$, $G = U \times X$. Покладемо $Q = \langle ax, by \rangle$. Тоді $G = U \leftthreetimes Q$, де Q — група кватерніонів порядку 8. Покладемо

$A = \Phi(Q)$, $B = Q$. Зрозуміло, що $B \ntriangleleft G$. За означенням УЩН ( ]-груп $(A; B] \ni$ $\ni N \triangleleft G$. Звідси $|N| = 4$. Заміняючи X на Q одержимо, що $|C_Q(U)| = |N| = 4$ і тому G — група типу 9 теореми 1 з [3] і, значить, G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай далі $[X : C_x(U)] < 4$. Тоді, поклавши $X = Q$, одержимо, що $G = U \leftthreetimes$ $\leftthreetimes Q$, і як раніше, $|C_Q(U)| = 4$. Звідси знову G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 28 теореми 3 з [5]. Покладемо $A = 1$, $B = \langle ax \rangle$. Тоді $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН ( ]-груп $(A; B] \ni N \triangleleft G$. Легко бачити, що $|N| = 2$ і тому $N \leq Z(G)$, що не так. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведено.

Достатність перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

Теорема 2. *Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН ( ]-групи G вичерпуються групами типів*:

1) G — *ненільпотентна УЩН ( )-група, тобто G-група одного з типів* 1 – 4 *теореми* 2 *з* [3];

2) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *група Шмідта, P — група кватерніонів порядку* 8, $|x| \in$ $\in \{3, 9\}$;

3) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено*, $|P| = p^2$, $|x| \in$ $\in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$, 2 — *показник p за модулем q*, $p \neq 3$, $q > 2$;

4) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *група Шмідта*, $|P| = p^3$, $\exp(P) = |P'| = p$ — *просте число*, $p > 3$, $|x| = q$ — *непарне просте число*, 2 — *показник p за модулем q*;

5) $G = (P \leftthreetimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено*, $|P| = p^2$, $|x| = q$, $p \neq 3$, $q > 2$, $|z| = r$ — *просте число*, $r \neq p$, 2 — *показник p за модулем q*;

6) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = pr$, p *і* r — *не обов'язково різні непарні прості числа*, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle x^q \rangle$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ — *непарне просте число*, $|x| \in$ $\in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

8) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = q^{\beta}$, $\beta >$ > 2, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — *квазіцентральна підгрупа з* G;

9) $G = (R \times P) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|R| = r$, $|P| = p^2$, $|x| = q$, p, q *і* r — *попарно різні прості числа*, $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, 2 — *показник p за модулем q*, $p \neq 3$, $q > 2$, $P \leftthreetimes$ $\leftthreetimes \langle x \rangle$ *і* $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *ненільпотентні групи Міллера – Морено*.

Доведення. *Необхідність*. Нехай G задовольнає умову теореми. Тоді за лемою 1.2.2 з [4] G — ненільпотентна локально ступінчаста УЩН [ ]-група, яка задовольняє умову теореми з [1] і може бути лише групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми. Ясно, що ненільпотентна УЩН ( )-група є ненільпотентною локально ступінчастою УЩН ( ]-групою.

Нехай G — ненільпотентна УЩН ( )-група. Тоді G задовольняє умову теореми 2 з [3] і є групою одного з типів 1 – 4 згаданої теореми. Звідси G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Нехай G — група одного з типів теореми з [1]: 1; 10; 11; 14. Тоді G — група одного з типів 1 – 4 теореми 2 з [3] відповідно і знову G — група типу 1 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів: 3; 4; 7, $|P'| = p$; 8, $|z| = r \neq p$; 9; 12; 13; 16 теореми з [1] є відповідно групою одного з типів 2 – 9 розглядуваної теореми.

В групі G кожного з типів 2, 5, 6, 17 теореми з [1] існує ненормальна в G підгрупа $\langle x \rangle$ порядку qr чи q^{β}, $\beta > 1$, яка не має нормальних в G максимальних підгруп, тобто $\langle x^q \rangle \ntriangleleft G$, що суперечить лемі 1 з [3]. Отже, G не може бути групою згаданих типів.

Нехай G — група типу 7 теореми з [1] і $|P'| = p$. Тоді $P' = 1$ і P — мінімальна нормальна підгрупа з G типу (p, p, p), що суперечить лемі 1 з [3]. Отже, група G типу 7 теореми з [1] при $|P'| = p$ не може бути УЩН ( ]-групою.

Нехай G — група типу 8 теореми з [1]. За попереднім $|z| = r = p$. Тоді $G' = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — мінімальна нормальна підгрупа з G, $|a| = |b| = p$ і G містить ненормальну в G підгрупу $B = \langle a \rangle \times \langle bz \rangle$, яка має з $Z(G)$ одиничний перетин. Покладемо $A = 1$. Тоді $(A; B] \ni N \lhd G$. Очевидно, що $|N| = p$. Зрозуміло, що $G' \cap B = \langle a \rangle \ntriangleleft G$. Звідси $N \cap \langle a \rangle = 1 = G' \cap N$. Але тоді $N \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, група G не може бути УЩН ( ]-групою.

Нехай, нарешті, G — група типу 15 теореми з [1]. Тоді $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — силовська p-підгрупа з G, $|a| = |b| = p^2$, $|x| = q$, $w(P) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \lhd G$, $w(P) \leftthreetimes \langle x \rangle$ — ненільпотентна група Міллера – Морено. Внаслідок леми 1 з [3] $\langle a^p \rangle \lhd G$. Очевидно, що $\langle a^p \rangle \leq w(P)$ — мінімальна нормальна підгрупа типу (p, p) як в $w(P) \leftthreetimes \langle x \rangle$, так і в G, що неможливо. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянуто. Необхідність доведено.

Достатність перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

1. *Семко М. М.* Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН [ ]-груп // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 789–798.
2. *Семко М. М.* Про будову УЩН [ ]-груп з елементарним комутантом рангу два // Там же. – № 10. – С. 1396–1403.
3. *Семко М. М.* Про будову УЩН ( )-груп. – Київ, 1997. – 31 с. – Деп. в ДНТБ України, № 295-Ук97.
4. *Семко М. М.* Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.
5. *Семко М. М.* Будова нільпотентних УЩН [ ]-груп // Класи груп з обмеженнями для підгруп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 27–41.
6. *Семко М. М.* Про будову УЩН [ ]-груп // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1250–1261.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Одержано 20.05.97